задачник
М.Р. ШЕБЕС

М.Р. ШЕБЕС

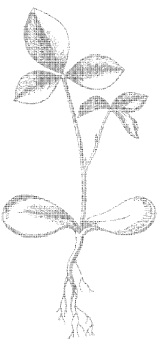
задачник по теории линейных электрических цепей

М. Р. ШЕБЕС

ЗАДАЧНИК ПО ТЕОРИИ ЛИНЕЙНЫХ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ

Издание третье,
переработанное и дополненное

Допущено
Министерством высшего и среднего
специального образования СССР
в качестве учебного пособия
для студентов электротехнических
и радиотехнических специальностей
вузов



МОСКВА «ВЫСШАЯ ШКОЛА» 1982

Scan AAW

ББК 31.211
Ш 30
УДК 621.372 (075)

Рецензент: кафедра ТОЭ Минского радиотехнического института
(зав. кафедрой д-р техн. наук, проф. И. А. Федорова)

Шебес М. Р.

Ш 30 Задачник по теории линейных электрических цепей: Учеб. пособие. 3-е изд., перераб. и доп. — М.: Высш. школа, 1982. — 488 с., ил.

В пер.: 1 р. 10 к.

В книге даны краткий справочный материал, расчетные формулы, типовые задачи с подробными решениями и пояснениями, примеры применения основных методов расчета электрических цепей в установившемся и переходном режимах.

По сравнению с предыдущим изданием, которое вышло в 1973 г. и называлось «Теория линейных электрических цепей в упражнениях и задачах», в книгу введены задачи на условия устойчивости четырехполюсников, задачи на расчет электрических фильтров по рабочим параметрам и линий задержки по таблицам и др.

Предназначается для студентов электротехнических и радиотехнических вузов и факультетов.

Ш $\frac{2302010000-151}{001(01)-82}$ 108—81

ББК 31.211
6П2. 1

© Издательство «Высшая школа», 1973
© Издательство «Высшая школа», 1982, с дополнениями

ПРЕДИСЛОВИЕ

Настоящий задачник является переработанным изданием книги «Теория линейных электрических цепей в упражнениях и задачах», которая вышла в 1973 г., и соответствует утвержденной программе курса.

Теория линейных электрических цепей (ТЛЭЦ) служит теоретической базой в подготовке инженеров по радиоэлектронике и электрической связи. Материал курса широко используется при изучении многих специальных дисциплин, таких, как усилительные устройства, многоканальная электросвязь, радиопередающие и радиоприемные устройства, радиовещание и телевидение, линии связи, электропитание устройств связи и др.

По сравнению с предыдущими изданиями в книгу внесены следующие изменения и дополнения: приведены примеры матричной формы записи основных уравнений цепи, даны задачи на использование таких понятий диапазона частот, как декада, октава, встречающиеся в технике связи и других областях, задачи на расчет электронных цепей в линейном режиме, условия устойчивости линейной цепи с обратной связью; заново написана глава по синтезу четырехполюсников; введен новый раздел, посвященный синтезу фильтров по рабочим параметрам и расчету линий задержки с помощью таблиц на основе использования понятий нормирования по сопротивлению и частоте.

Целью учебного пособия является оказание помощи студентам в их самостоятельной работе. Поэтому к большинству задач даны подробные решения и пояснения, к некоторым — методические указания, к остальным — ответы. В начале каждой главы приведены основные положения теории и важнейшие формулы, которые могут быть использованы при решении задач. В задачнике имеются примеры применения основных методов расчета электрических цепей в установившемся и переходном режимах; при расчете цепей постоянного и переменного токов большое внимание уделено таким цепям, в которых действуют источники напряжения и тока, подробно разобраны резонансные явления в одиночном и индуктивно связанных контурах, имеющих важное значение в специальных курсах; приводятся упражнения и задачи по теории двухполюсников, четырехполюсников, электрических фильтров в цепях с распределенными параметрами, рассмотрены задачи и упражнения, решаемые классическим, операторным и методом наложения; уделено внимание изучению спектральных представлений.

При изучении теории переменных токов достаточно широко используются векторные диаграммы, которые являются хорошей наглядной иллюстрацией соотношений между отдельными величинами. В связи с этим к ряду задач даны векторные диаграммы и указаны приемы их построения.

Буквенные обозначения электрических величин даны по ГОСТ 1494—77. В связи с этим для единообразия комплексы э. д. с., напряжения, тока обозначаются через $\underline{E}$, $\underline{U}$, $\underline{I}$, т. е. так же, как и комплексы сопротивления, проводимости ($\underline{Z}$, $\underline{Y}$). Модули тех же величин обозначены через E, U, I, Z, Y. Комплексные токи в ветвях обозначены через $\underline{I}_{\text{к}}$, контурные токи — $I_{\text{кк}}$, токи источников тока — $\underline{J}_{\text{к}}$. Модули тех же токов, а также постоянные токи обозначаются так же, но без черточек под буквой.

Автор выражает благодарность рецензенту зав. кафедрой ТОЭ МРИ д-ру техн. наук, проф. И. А. Федоровой за полезные рекомендации, которые способствовали улучшению рукописи.

Все замечания и предложения по книге просим направлять по адресу: Москва, К-51, Неглинная ул., 29/14, издательство «Высшая школа».

Автор

ГЛАВА ПЕРВАЯ

МЕТОДЫ РАСЧЕТА ЛИНЕЙНЫХ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ (НА ПРИМЕРАХ ЦЕПЕЙ С ПОСТОЯННЫМИ ТОКАМИ И НАПРЯЖЕНИЯМИ)

ОСНОВНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ И СООТНОШЕНИЯ

1. Элементы электрической цепи. *Пассивный линейный элемент* — резистор, имеющий электрическое сопротивление R (рис. 1.1, *а*). Ток I и напряжение U_{ab} электрического сопротивления связаны законом Ома

$$U_{ab} = RI. \tag{1.1}$$

Величина, обратная сопротивлению, есть электрическая проводимость

$$G = 1/R. \tag{1.2}$$

Активные линейные элементы — источники электромагнитной энергии.

Идеальный источник электродвижущей силы. Напряжение U_{ab} идеального источника э. д. с. не зависит от величины его тока I и характеризуется его электродвижущей силой E (обозначения положительных направлений э. д. с., напряжения и тока показаны на рис. 1.1, *б*):

$$U_{ab} = E. \tag{1.3}$$

Внутреннее сопротивление идеального источника э. д. с. равно нулю. Источник электродвижущей силы (реальный, с внутренним сопротивлением). Он может быть изображен в виде последовательной схемы, содержащей э. д. с. E и внутреннее сопротивление R (на рис. 1.1, *в* показаны положительные направления E и U_{ab}).

Идеальный источник тока. Ток J источника тока не зависит от его напряжения U_{ab} (внутренняя проводимость источника тока равна нулю, напряжение источника тока бесконечно велико). Обозначения положительных направлений тока, напряжения показаны на рис. 1.1, *г*.

Источник тока (реальный, с внутренней проводимостью $G = 1/R$). Он может быть изображен в виде параллельной схемы, содержащей источник тока J, численно равный току короткого замыкания источника тока и проводимости G (рис. 1.1, *д*).

Переход от схемы источника электродвижущей силы к эквивалентной схеме источника тока осуществляется по формулам

$$J = E/R, \quad E = J/G, \quad R = 1/G. \tag{1.4}$$

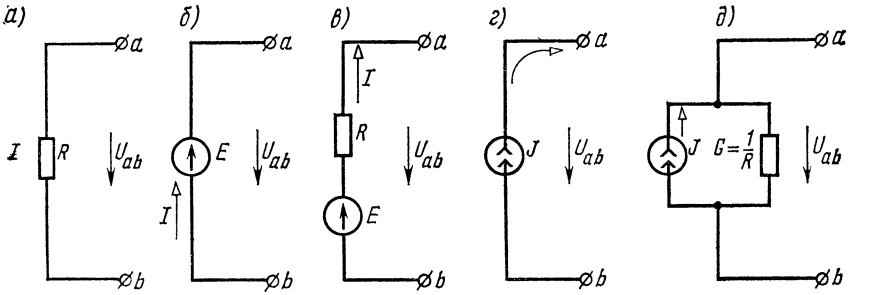


Рис. 1.1

2. Закон Ома. Этот закон применяется для ветви или для одноконтурной замкнутой цепи (не имеющей разветвлений).

При написании закона Ома следует прежде всего выбрать произвольно некоторое положительное направление тока.

Для ветви, состоящей только из резисторов и не содержащей э. д. с. (например, для ветви *mn* рис. 1.2), при положительном направлении тока от точки *m* к точке *n*

$$I = \frac{V_m - V_n}{R_{mn}} = \frac{U_{mn}}{R_{mn}}, \qquad (1.5)$$

где V_m и V_n — потенциалы точек *m* и *n*; U_{mn} — разность потенциалов или напряжение между точками *m* и *n*; $R_{mn} = R_4 + R_5$ — полное сопротивление ветви между точками *m* и *n*.

Для ветви цепи, содержащей э. д. с. и резисторы (например, для ветви *acb*, рис. 1.2),

$$I_1 = \frac{V_a - V_b + \sum E}{\sum R_{ab}} = \frac{U_{ab} + \sum E}{\sum R_{ab}}, \qquad (1.6)$$

где $U_{ab} = V_a - V_b$ — напряжение на концах ветви *acb*, отсчитываемое по выбранному положительному направлению тока; ΣE — алгебраическая сумма э. д. с., находящихся в этой ветви; ΣR_{ab} — арифметическая сумма ее сопротивлений.

В ветви *acb* (рис. 1.2) $\Sigma E = E_1 - E_2$, $\Sigma R_{ab} = R_1 + R_2 + R_9$. Формулу (1.6) называют о б о б щ е н н ы м з а к о н о м О м а.

Для замкнутой одноконтурной цепи

$$I = \frac{\sum E}{\sum R}, \qquad (1.7)$$

где ΣR — арифметическая сумма всех внешних и внутренних сопротивлений цепи; ΣE — алгебраическая сумма электродвижущих сил.

Со знаком плюс берут те э. д. с., направления которых совпадают с выбранным положительным направлением тока, а со знаком ми-

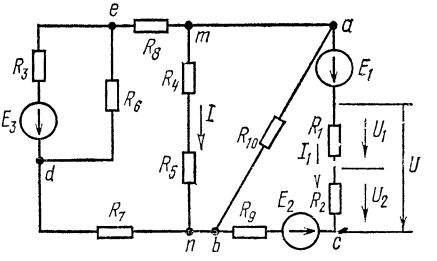


Рис. 1.2

нус — э. д. с. с противоположными направлениями. Примеры приведены в задачах 1.5 и 1.8.

3. Законы Кирхгофа. Для написания законов Кирхгофа необходимо задаться положительными направлениями токов каждой ветви.

Первый закон Кирхгофа — алгебраическая сумма всех токов, сходящихся в любом узле, равна нулю:

$$\sum_{k=1}^{n} I_k = 0. \tag{1.8}$$

Токи, направленные от узла, условно принимаются положительными, а направленные к нему — отрицательными (или наоборот).

Второй закон Кирхгофа — алгебраическая сумма э. д. с. замкнутого контура равна алгебраической сумме падений напряжений в нем:

$$\sum_{k=1}^{n} E_k = \sum_{k=1}^{n} R_k I_k. \tag{1.9}$$

Направление обхода контура выбирается произвольно. При записи левой части равенства э. д. с., направления которых совпадают с выбранным направлением обхода (независимо от направления тока, протекающего через них), принимаются положительными, а э. д. с., направленные против выбранного направления обхода, — отрицательными. При записи правой части равенства со знаком плюс берутся падения напряжения в тех ветвях, в которых выбранное положительное направление тока совпадает с направлением обхода (независимо от направления э. д. с. в этих ветвях), а со знаком минус — падения напряжения в тех ветвях, в которых положительное направление тока противоположно направлению обхода.

Пример приведен в задаче 1.19.

4. Методы расчета сложных цепей постоянного тока (цепь состоит из $N_в$ ветвей, имеет $N_у$ узлов и $N_т$ источников тока). Приводимые далее формулы пригодны для расчета цепей, содержащих и источники напряжения, и источники тока. Они справедливы и для тех частных случаев, когда в цепи имеются только источники напряжения или только источники тока.

Применение законов Кирхгофа. Обычно в цепи известны все источники э. д. с. и источники токов и все сопротивления. В этом случае устанавливается число неизвестных токов, равное $N_в - N_т$. Для каждой ветви задаются положительным направлением тока.

Число У взаимонезависимых уравнений, составляемых по первому закону Кирхгофа, равно числу узлов без единицы. Число взаимонезависимых уравнений, составляемых по второму закону Кирхгофа,

$$K = N_в - N_у + 1 - N_т. \tag{1.10}$$

При составлении уравнений по второму закону Кирхгофа следует выбирать независимые контуры, не содержащие источников тока.

Общее число уравнений, составляемых по первому и второму законам Кирхгофа, равно числу ($N_в - N_т$) неизвестных токов.

Примеры приведены в задачах 1.19 и 1.27.

Метод контурных токов (Максвелла). Он позволяет уменьшить количество уравнений системы до числа K, определяемого формулой (1.10). Метод основан на том, что ток в любой ветви цепи можно представить в виде алгебраической суммы контурных токов, протекающих по этой ветви. При пользовании этим методом выбирают и обозначают контурные токи (по любой ветви цепи должен проходить хотя бы один выбранный контурный ток). Из теории известно, что общее число контурных токов равно $K = N_в - N_у + 1 - N_т$. Рекомендуется выбирать $N_т$ контурных токов так, чтобы каждый из них проходил через один источник тока (эти контурные токи можно считать совпадающими с соответствующими токами источников тока J_1, J_2, ..., $J_{N_т}$, и они обычно являются заданными условиями задачи), а оставшиеся $K = N_в - N_у + 1 - N_т$ контурных токов выбирать проходящими по ветвям, не содержащим источников тока. Для определения последних контурных токов по второму закону Кирхгофа для этих контуров составляют K уравнений в виде

$$\left.\begin{aligned}
&R_{11}I_{11} + R_{12}I_{22} + \cdots + R_{1k}I_{kk} + \cdots + \sum_{1} J_nR_n = E_{11};\\
&R_{21}I_{11} + R_{22}I_{22} + \cdots + R_{2k}I_{kk} + \cdots + \sum_{2} J_nR_n = E_{22};\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&R_{k1}I_{11} + R_{k2}I_{22} + \cdots + R_{kk}I_{kk} + \cdots + \sum_{n} J_nR_n = E_{kk},
\end{aligned}\right\} \quad (1.11)$$

где R_{nn} — собственное сопротивление контура n (сумма сопротивлений всех ветвей, входящих в контур n); R_{nl} — общее сопротивление контуров n и l, причем $R_{nl} = R_{ln}$: если направления контурных токов в общей ветви для контуров n и l совпадают, то R_{nl} положительно ($R_{nl} > 0$), в противном случае R_{nl} отрицательно ($R_{nl} < 0$); E_{nn} — алгебраическая сумма э. д. с., включенных в ветви, образующие контур n; R_n — общее сопротивление ветви контура n с контуром, содержащим источник тока J_n.

Примеры приведены в задачах 1.30 и 1.32.

Метод узловых потенциалов. Он позволяет уменьшить количество уравнений системы до числа У, равного количеству узлов без одного:

$$У = N_у - 1. \quad (1.12а)$$

Сущность метода заключается в том, что вначале путем решения системы уравнений (1.13) определяют потенциалы всех узлов схемы, а токи ветвей, соединяющих узлы, находят с помощью закона Ома по формуле (1.6).

При составлении уравнений по методу узловых потенциалов вначале полагают равным нулю потенциал какого-либо узла (его называют базисным). Для определения потенциалов оставшихся ($У = N_у - 1$) узлов составляется следующая система уравнений:

$$\left.\begin{aligned}
&V_1G_{11} - V_2G_{12} - \ldots - V_sG_{1s} - \ldots - V_nG_{1n} = \sum_1 EG + \sum_1 J;\\
&-V_1G_{21} + V_2G_{22} - \ldots - V_sG_{2s} - \ldots - V_nG_{2n} = \sum_2 EG + \sum_2 J;\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&-V_nG_{n1} - V_2G_{n2} - \ldots - V_sG_{ns} - \ldots + V_nG_{nn} = \sum_n EG + \sum_n J.
\end{aligned}\right\} \quad (1.13)$$

Здесь G_{ss} — сумма проводимостей ветвей, присоединенных к узлу s; G_{sq} — сумма проводимостей ветвей, непосредственно соединяющих узел s с узлом q; $\sum_s EG$ — алгебраическая сумма произведений э. д. с. ветвей, примыкающих к узлу s, на их проводимости; при этом со знаком плюс берутся те э. д. с., которые действуют в направлении узла s, и со знаком минус — в направлении от узла s; $\sum_s J$ — алгебраическая сумма токов источников тока, присоединенных к узлу s; при этом со знаком плюс берутся те токи, которые направлены к узлу s, а со знаком минус — в направлении от узла s.

Методом узловых потенциалов рекомендуется пользоваться в тех случаях, когда число уравнений будет меньше числа уравнений, составленных по методу контурных токов.

Если в схеме некоторые узлы соединяются идеальными источниками э. д. с., то число У уравнений, составляемых по методу узловых потенциалов, уменьшается:

$$У = N_у - N_и - 1, \quad (1.12б)$$

где $N_и$ — число ветвей, содержащих только идеальные источники э. д. с.

Примеры приведены в задачах 1.33; 1.34; 1.36.

Метод двух узлов. Для схем, имеющих два узла (для определенности узлы a и b), узловое напряжение U_{ab} определяется формулой

$$U_{ab} = \frac{\sum_n E_nG_n + \sum_n J_n}{\sum_m G_m}, \quad (1.14)$$

где ΣE_nG_n — алгебраическая сумма произведений э. д. с. ветвей (э. д. с. считаются положительными, если они направлены к узлу a, и отрицательными, если направлены от узла a к узлу b) на проводимости этих ветвей; J_n — токи источников тока (положительны, если они направлены к узлу a, и отрицательны, если направлены от узла a к узлу b); $\sum_m G_m$ — сумма проводимостей всех ветвей, соединяющих узлы a и b.

Метод наложения. Если в электрической цепи заданными величинами являются э. д. с. источников и токи источников тока, то расчет токов по методу наложения состоит в следующем. Ток в любой ветви можно рассчитать как алгебраическую сумму токов, вызы-

ваемых в ней э. д. с. каждого источника э. д. с. в отдельности и током, проходящим по этой же ветви от действия каждого источника тока. При этом надо иметь в виду, что когда ведется расчет токов, вызванных каким-либо одним источником э. д. с. или тока, то остальные источники э. д. с. в схеме заменяются короткозамкнутыми участками, а ветви с источниками тока остальных источников отключаются (ветви с источниками тока размыкаются).

Методы преобразования. Во всех случаях преобразования замена одних схем другими, им эквивалентными, не должна привести к изменению токов или напряжений на участках цепи, не подвергшихся преобразованию.

Замена последовательно соединенных сопротивлений одним эквивалентным. Сопротивления соединены последовательно, если они обтекаются одним и тем же током (например, сопротивления R_1, R_2 и R_9 соединены последовательно — см. рис. 1.2; также последовательны сопротивления R_7 и R_8).

Эквивалентное сопротивление цепи, состоящей из n последовательно соединенных сопротивлений, равно сумме этих сопротивлений:

$$R_{эк} = \sum_{k=1}^{n} R_k.$$

При последовательном соединении n сопротивлений напряжения на них распределяются прямо пропорционально этим сопротивлениям:

$$U_1 : U_2 : \ldots : U_n = R_1 : R_2 : \ldots : R_n.$$

В частном случае двух последовательно соединенных сопротивлений:

$$U_1/U_2 = R_1/R_2; \quad U_1 = UR_1/(R_1 + R_2); \quad U_2 = UR_2/(R_1 + R_2),$$

где U — общее напряжение, действующее на участке цепи, содержащем два сопротивления R_1 и R_2 (см. рис. 1.2).

Замена параллельно соединенных сопротивлений одним эквивалентным. Сопротивления соединены параллельно, если все они присоединены к одной паре узлов (например, сопротивления $R_{45} = R_4 + R_5$ и R_{10}; см. рис. 1.2).

Эквивалентное сопротивление цепи, состоящей из n параллельно соединенных сопротивлений, определяется из формулы

$$\frac{1}{R_{эк}} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{R_k}, \text{ или } G_{эк} = \sum_{k=1}^{n} G_k. \qquad (1.15)$$

В частном случае параллельного соединения двух сопротивлений R_1 и R_2 эквивалентное сопротивление

$$R_{эк} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}. \qquad (1.16)$$

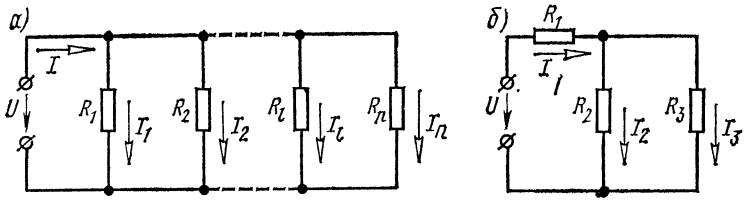


Рис. 1.3

При параллельном соединении n сопротивлений (рис. 1.3, *а*) токи в них распределяются обратно пропорционально их сопротивлениям или прямо пропорционально их проводимостям:

$$I_1 : I_2 : \ldots : I_n = \frac{1}{R_1} : \frac{1}{R_2} : \ldots : \frac{1}{R_n} = G_1 : G_2 : \ldots : G_n. \qquad (1.17)$$

Ток I_s в каждой из них вычисляется через ток I в неразветвленной части цепи:

$$I_s = I \frac{G_s}{\sum_{k=1}^{n} G_k}. \qquad (1.18)$$

В частном случае двух параллельных ветвей (рис. 1.3, *б*):

$$I_2 = I_1 \frac{R_3}{R_2 + R_3}; \quad I_3 = I_1 \frac{R_2}{R_2 + R_3}, \qquad (1.19)$$

или

$$I_2 = I_1 \frac{G_2}{G_2 + G_3}; \quad I_3 = I_1 \frac{G_3}{G_2 + G_3}.$$

Замена смешанного соединения сопротивлений одним эквивалентным. Смешанное соединение — это сочетание последовательного и параллельного соединений сопротивлений. Например, сопротивления R_1, R_2 и R_3 (рис. 1.3, *б*) соединены смешанно.
Их эквивалентное сопротивление

$$R_{эк} = R_1 + \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3} = \frac{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_1 R_3}{R_2 + R_3}. \qquad (1.20)$$

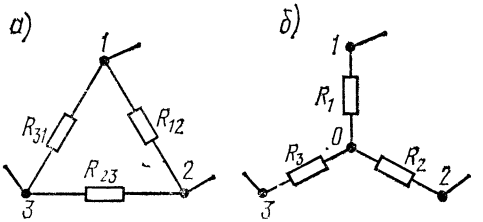


Рис. 1.4

Формулы преобразования треугольника сопротивлений (рис. 1.4, а) в эквивалентную звезду сопротивлений (рис. 1.4, б) и наоборот имеют вид

$$R_1 = \frac{R_{12} R_{31}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}};$$

$$R_2 = \frac{R_{23}R_{12}}{R_{12}+R_{23}+R_{31}}; \quad R_3 = \frac{R_{31}R_{23}}{R_{12}+R_{23}+R_{31}}; \tag{1.21}$$

$$G_{12} = \frac{G_1G_2}{G_1+G_2+G_3}; \quad G_{23} = \frac{G_2G_3}{G_1+G_2+G_3}; \quad G_{31} = \frac{G_3G_1}{G_1+G_2+G_3}, \tag{1.22}$$

где G — проводимость соответствующей ветви.

Формулы (1.22) можно записать через сопротивления

$$\left.\begin{aligned} R_{12} = R_1 + R_2 + \frac{R_1R_2}{R_3}; \quad R_{23} = R_2 + R_3 + \frac{R_2R_3}{R_1}; \\ R_{31} = R_3 + R_1 + \frac{R_3R_1}{R_2}. \end{aligned}\right\} \tag{1.23}$$

Пример приведен в задаче 1.41.

Метод эквивалентного источника (метод активного двухполюсника или метод холостого хода и короткого замыкания). Применение метода целесообразно для определения тока в какой-либо одной ветви сложной электрической цепи. Имеется два варианта метода: 1) метод эквивалентного источника э. д. с. и 2) метод эквивалентного источника тока.

Метод эквивалентного источника э. д. с. Для нахождения тока I в произвольной ветви ab, сопротивление которой R (рис. 1.5, *а*; буква A означает активный двухполюсник), надо эту ветвь разомкнуть (рис. 1.5, *б*), а часть цепи, подключенную к этой ветви, заменить эквивалентным источником с э. д. с. $E_{эк}$ и внутренним сопротивлением $R_{эк}$ (рис. 1.5, *в*).

Э.д.с. $E_{эк}$ этого источника равняется напряжению на зажимах разомкнутой ветви (напряжение холостого хода):

$$E_{эк} = U_{ab\,х} = (V_a - V_b)_х.$$

Расчет схем в режиме холостого хода (рис. 1.5, *б*) для определения $E_{эк}$ проводится любым известным способом.

Внутреннее сопротивление $R_{эк}$ эквивалентного источника э.д.с. равняется входному сопротивлению пассивной цепи относительно зажимов a и b исходной схемы, из которой исключены все источники (источники э. д. с. заменены короткозамкнутыми участками, а ветви с источниками тока отключены, рис. 1.5, *г*; буква $П$ указывает на пассивный характер цепи), при разомкнутой ветви ab. Сопротивление $R_{эк}$ можно вычислить непосредственно по схеме рис. 1.5, *г*.

Ток в искомой ветви схемы (рис. 1.5, *д*), имеющей сопротивление R, определяется по закону Ома [см. формулу (1.7)]:

$$I = \frac{U_{ab\,х}}{R+R_{эк}} = \frac{E_{эк}}{R+R_{эк}}. \tag{1.24}$$

Метод эквивалентного источника тока. Для расчета тока в ветви ab, сопротивление которой R, надо заменить часть схемы относительно зажимов a и b (при разомкнутой ab) эквивалентным источником тока, ток которого $J_{эк}$, а проводимость $G_{эк}$ (рис. 1.5, *е*).

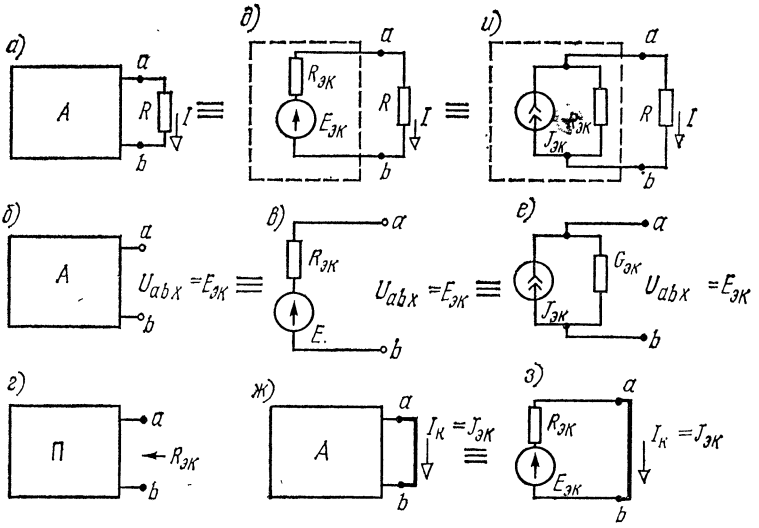


Рис. 1.5

Для нахождения тока $J_{эк}$ надо зажимы a и b закоротить и любым способом рассчитать ток короткого замыкания I_k, протекающий по закороченному участку (рис. 1.5, *ж*). При этом $J_{эк} = I_k$. Сопротивление $R_{эк}$ можно найти, как и при расчете по методу эквивалентного источника э. д. с. (см. рис. 1.5, *г*). Это же сопротивление может быть рассчитано, как это видно из схемы замещения заданной схемы в режиме короткого замыкания (рис. 1.5, *з*), по формуле

$$R_{эк} = E_{эк}/I_k = E_{эк}/J_{эк} = 1/G_{эк}. \qquad (1.25)$$

Ток в ветви R (рис. 1.5, *и*)

$$I = J_{эк}\frac{R_{эк}}{R + R_{эк}}. \qquad (1.26)$$

Примеры приведены в задачах 1.43; 1.44; 1.45; 1.50.

Метод замены нескольких соединенных параллельно источников э. д. с. одним эквивалентным. Если имеется несколько источников с э. д. с. E_1, E_2, ..., E_n и внутренними сопротивлениями R_1, R_2, ..., R_n, работающих параллельно на общее сопротивление нагрузки R (рис. 1.6, *а*), то они могут быть заменены одним эквивалентным источником, э. д. с. которого $E_{эк}$, а внутреннее сопротивление $R_{эк}$ (рис. 1.6, *б*). При этом

$$E_{эк} = \frac{\sum_{k=1}^{n} E_k G_k}{\sum_{k=1}^{n} G_k}; \quad G_k = \frac{1}{R_k}. \qquad (1.27)$$

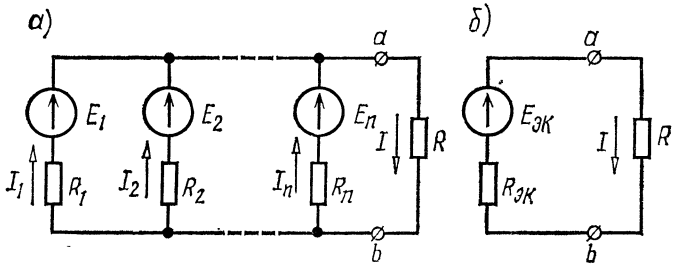


Рис. 1.6

Ток в сопротивлении R

$$I = \frac{E_{эк}}{R + R_{эк}}. \tag{1.28}$$

Ток в каждой из ветвей

$$I_k = \frac{E_k - U}{R_k}, \tag{1.29}$$

где $U = U_{ab} = IR$.

Метод замены параллельно соединенных источников тока одним эквивалентным. Если несколько источников тока с токами $J_1, J_2, \ldots, J_n$ и внутренними проводимостями $G_1, G_2, \ldots, G_n$ соединены параллельно (рис. 1.7, *а*), то их можно заменить одним эквивалентным источником тока (рис. 1.7, *б*), ток которого $J_{эк}$ равен алгебраической сумме токов, а его внутренняя проводимость $G_{эк}$ равна сумме внутренних проводимостей отдельных источников:

$$J = \sum_{k=1}^{n} J_k; \tag{1.30}$$

$$G_{эк} = \sum_{k=1}^{n} G_k. \tag{1 31}$$

5. Баланс мощностей. Для любой замкнутой электрической цепи сумма мощностей $P_и$, развиваемых источниками электрической энергии, равна сумме мощностей $P_п$, расходуемых в приемниках энергии:

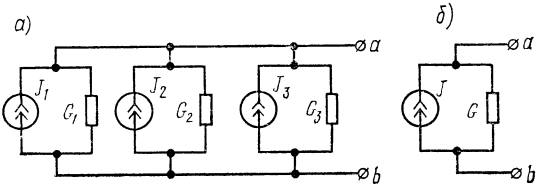


Рис. 1.7

$$\sum P_{и} = \sum P_{п}, \text{ или } \sum (E_k I_k + U_k J_k) = \sum I_k^2 R_k, \qquad (1.32)$$

где $\Sigma E_k I_k$ — алгебраическая сумма; здесь положительны те из слагаемых, для которых направления действия э. д. с. E_k и соответствующего тока I_k совпадают, в противном случае слагаемое отрицательно; $\Sigma U_k I_k$ — алгебраическая сумма; здесь положительны те из слагаемых, для которых напряжение на источнике тока (оно определяется расчетом цепи внешней по отношению к зажимам источника тока) и его ток J_k совпадают по направлению (как, например, на рис. 1.1, *г*), в противном случае слагаемое отрицательно; $\Sigma I_k^2 R_k$ — арифметическая сумма; здесь должны быть учтены как внешние сопротивления, так и сопротивления самих источников энергии.

УПРАЖНЕНИЯ И ЗАДАЧИ

А. Расчет эквивалентных сопротивлений

1.1. Для цепи схемы рис. 1.8 найти эквивалентные сопротивления между зажимами *a* и *b*, *c* и *d*, *d* и *f*, если $R_1 = 6$ Ом, $R_2 = 5$ Ом, $R_3 = 15$ Ом, $R_4 = 30$ Ом и $R_5 = 6$ Ом.

Р е ш е н и е. Расчет сопротивления R_{ab}. Эквивалентное сопротивление соединенных параллельно сопротивлений R_4 и R_5 найдем по формуле (1.16):

$$R_{45} = \frac{R_4 R_5}{R_4 + R_5} = \frac{30 \cdot 6}{30 + 6} = 5 \text{ Ом}.$$

Оно соединено последовательно с R_2. Их общее сопротивление $R' = R_2 + R_{45} = 5 + 5 = 10$ Ом.

Сопротивление цепи состоит из сопротивления R_1, последовательно с которым соединены два параллельных сопротивления R' и R_3:

$$R_{ab} = R_1 + \frac{R' R_3}{R' + R_3} = 6 + \frac{10 \cdot 15}{10 + 15} = 12 \text{ Ом}.$$

Расчет сопротивления R_{cd}. Сопротивления R_4 и R_5 соединены параллельно друг другу; сопротивление R_3 присоединено к ним последовательно:

$$R'' = R_3 + \frac{R_4 R_5}{R_4 + R_5} = 15 + 5 = 20 \text{ Ом}.$$

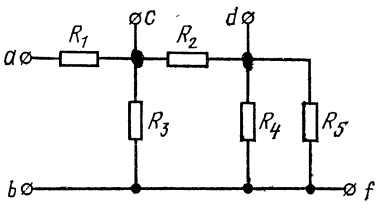


Рис. 1.8

Сопротивление R_{cd} состоит из двух параллельно соединенных сопротивлений R_2 и R'':

$$R_{cd} = \frac{R_2 R_2''}{R_2 + R''} = \frac{5 \cdot 20}{5 + 20} = 4 \text{ Ом}.$$

Расчет сопротивления R_{df}. По отношению к зажимам *d* и *f* цепь состоит из трех параллельно соединенных

сопротивлений R_5, R_4 и $R_2 + R_3$, и эквивалентное сопротивление может быть определено из формулы (1.15):

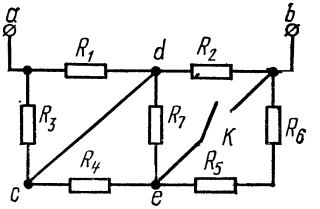


Рис. 1.9

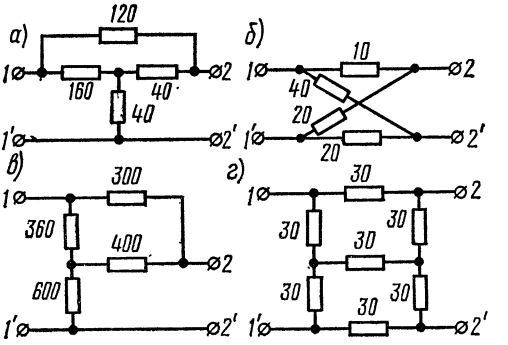


Рис. 1.10

$$1/R_{df} = 1/R_5 + 1/R_4 + 1/(R_2 + R_3) = \frac{1}{6} + \frac{1}{30} + \frac{1}{20} = \frac{1}{4},$$

откуда $R_{df} = 4$ Ом.

1.2. Определить эквивалентное сопротивление цепи между точками a и b при разомкнутом и замкнутом контакте K (рис. 1.9). Даны: $R_1 = R_2 = R_3 = R_4 = R_5 = R_6 = R_7 = 10$ Ом.

1.3. Определить сопротивление каждой из цепей (рис. 1.10, *а*, *б*, *в*, *г*) между зажимами *1—1'* при холостом ходе (точки *2* и *2'* разомкнуты) и при коротком замыкании (точки *2* и *2'* закорочены). Сопротивления в омах даны на схеме.

Б. Законы Ома и Кирхгофа. Баланс мощностей

1.4. Источник с э. д. с. $E = 100$ В, внутренним сопротивлением $r = 1$ Ом замкнут на внешнее сопротивление R, которое меняется от нуля до бесконечности (рис. 1.11). Определить в функции этого сопротивления: ток I; напряжение на зажимах источника U; мощность, отдаваемую источником во внешнюю цепь, $P_{вш}$; мощность, затрачиваемую в самом источнике, $P_{вт}$; общую мощность P; к. п. д. η. При каком внешнем сопротивлении мощность $P_{вш}$ будет максимальной? Чему оно равно?

Построить кривые: $I = F_1(R)$, $U = F_2(R)$, $P_{вш} = F_3(R)$, $P_{вт} = F_4(R)$, $P = F_5(R)$, $\eta = F_6(R)$.

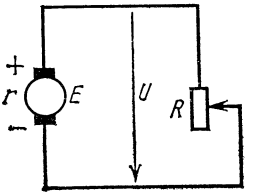


Рис. 1.11

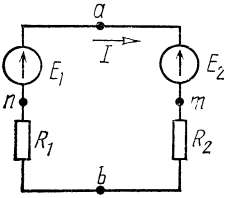


Рис. 1.12

Написать уравнения и построить кривые зависимостей U, $P_{вш}$, $P_{вт}$, P и η в функции тока I.

1.5. В неразветвленной цепи рис. 1.12 э. д. с., $E_1 = 120$ В, $E_2 = 40$ В, сопротивления $R_1 = 12$ Ом, $R_2 = 8$ Ом. Определить напряжение между точками a и b.

Р е ш е н и е. Задавшись положительным направлением тока по часовой стрелке, на основании закона Ома [см. формулу (1.7)] ток

$$I = \frac{E_1 - E_2}{R_1 + R_2} = \frac{120 - 40}{12 + 8} = 4 \text{ А}.$$

Так как результат оказался положительным, то истинное направление тока совпадает с выбранным. Напряжение между точками a и b можно найти по закону Ома [см. формулу (1.6)], примененному к участку amb:

$$I = \frac{U_{ab} - E_2}{R_2},$$

откуда

$$U_{ab} = E_2 + R_2 I = 40 + 4 \cdot 8 = 72 \text{ В}.$$

Такой же результат можно получить, если применить ту же формулу к участку bna:

$$I = \frac{U_{ba} + E_1}{R_1} \text{ или } U_{ba} = R_1 I - E_1 = 4 \cdot 12 - 120 = -72 \text{ В},$$

а следовательно, $U_{ab} = 72$ В.

Замечание. Если на участке цепи, содержащем э. д. с. и сопротивление, ток и э. д. с. совпадают по направлению, то напряжение на зажимах участка меньше э. д. с. на величину падения напряжения в сопротивлении участка, а если направление тока противоположно направлению э. д. с., то напряжение на зажимах участка больше э. д. с. на величину падения напряжения в рассматриваемом участке.

1.6. Определить показание вольтметра (рис. 1.13), сопротивление которого весьма велико по сравнению с R_1 и R_2.

1.7. Построить график изменения потенциала вдоль цепи, изображенной на рис. 1.14, при замкнутом и разомкнутом контакте, предполагая в обоих случаях, что точка a заземлена ($V_a = 0$). В схеме найти точку, равнопотенциальную точке a. Определить, потенциал какой точки следует принять равным нулю, чтобы потенциалы всех остальных точек были положительны (при замкнутом контакте).

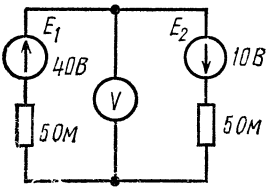


Рис. 1.13

Э. д. с. равны: $E_1 = 25$ В, $E_2 = 5$ В, $E_3 = 20$ В, $E_4 = 35$ В. Внешние сопротивления: $R_1 = 8$ Ом, $R_2 = 24$ Ом, $R_3 = 40$ Ом и $R_4 = 4$ Ом. Внутренние сопротивления источников электрической энергии: $r_1 = 2$ Ом, $r_2 = 6$ Ом, $r_3 = 2$ Ом и $r_4 = 4$ Ом.

1.8. Определить токи в ветвях цепи рис.

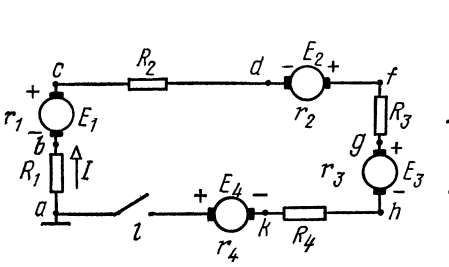


Рис. 1.14

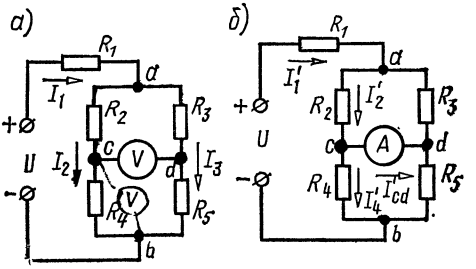


Рис. 1.15

1.15, *а* и показание вольтметра, включенного между точками *c* и *d*, считая, что его сопротивление во много раз превышает сопротивление каждого из элементов цепи.

Чему равно показание амперметра, включенного между точками *c* и *d*, сопротивление которого считать равным нулю?

Даны: $R_1 = 10$ Ом, $R_2 = R_3 = R_5 = 25$ Ом и $R_4 = 50$ Ом; $U = 120$ В.

Р е ш е н и е. Расчет показания вольтметра. Из условия вытекает, что его включение не оказывает влияния на распределение токов в цепи. Для расчета токов сначала определяем эквивалентное сопротивление всей цепи (рис. 1.15, *а*):

$$R_{эк} = R_1 + \frac{(R_2 + R_4)(R_3 + R_5)}{R_2 + R_4 + R_3 + R_5} = 10 + \frac{75 \cdot 50}{125} = 40 \text{ Ом}.$$

В неразветвленной части цепи протекает ток

$$I_1 = U/R_{эк} = 120/40 = 3 \text{ А}.$$

Токи, протекающие через сопротивления $R_2 + R_4$ и $R_3 + R_5$, можно найти различными способами.

1. В параллельных ветвях токи распределяются обратно пропорционально их сопротивлениям [см. формулу (1.19)]:

$$I_2 = I_1 \frac{R_3 + R_5}{R_2 + R_4 + R_3 + R_5} = 3 \frac{50}{125} = 1{,}2 \text{ А},$$

$$I_3 = I_1 \frac{R_2 + R_4}{R_2 + R_4 + R_3 + R_5} = 3 \frac{75}{125} = 1{,}8 \text{ А}.$$

2. Найдем напряжение на зажимах параллельных ветвей:

$$U_{ab} = I_1 \frac{(R_2 + R_4)(R_3 + R_5)}{R_2 + R_4 + R_3 + R_5} = 3 \frac{75 \cdot 50}{125} = 90 \text{ В}.$$

Токи в ветвях с сопротивлениями $R_2 + R_4$ и $R_3 + R_5$ равны:

$$I_2 = \frac{U_{ab}}{R_2 + R_4} = \frac{90}{75} = 1{,}2 \text{ А}; \quad I_3 = \frac{U_{ab}}{R_3 + R_5} = \frac{90}{50} = 1{,}8 \text{ А}.$$

Напряжение на зажимах параллельных ветвей может быть найдено как разность между приложенным напряжением и падением напряжения на сопротивлении R_1: $U_{ab} = U - R_1 I_1$.

Найдем показание вольтметра, равное напряжению между точками c и d:

$$U_V = U_{cd} = -I_2 R_2 + I_3 R_3 = -1{,}2 \cdot 25 + 1{,}8 \cdot 25 = 15 \text{ В}.$$

Наконец, вычислим ток, проходящий через амперметр; он равен току короткого замыкания I'_{cd} (рис. 1.15, *б*). Для его нахождения вычислим токи

$$I'_1 = \frac{U}{R_1 + \dfrac{R_2 R_3}{R_2 + R_3} + \dfrac{R_4 R_5}{R_4 + R_5}} = \frac{144}{47} \text{ А};$$

$$I'_2 = I'_1 \frac{R_3}{R_2 + R_3} = \frac{72}{47} \text{ А}; \quad I'_4 = I'_1 \frac{R_5}{R_4 + R_5} = \frac{48}{47} \text{ А}.$$

Искомый ток, проходящий через амперметр,

$$I_A = I'_{cd} = I'_2 - I'_4 = 24/47 = 0{,}51 \text{ А}.$$

1.9. Для измерения тока применены амперметры, пределы измерений которых равны 5 и 2,5 А, и шунт, сопротивление которого неизвестно. Первый амперметр, включенный с шунтом в некоторую цепь, показал ток 3,6 А, второй — с тем же шунтом показал в той же цепи ток 2 А. Сопротивления амперметров: $R_1 = 0{,}002$ Ом и $R_2 = 0{,}004$ Ом. Чему равен ток в цепи?

1.10. Для цепей рис. 1.16, *а* и *б* определить отношение напряжения на выходе U_2 (выходные зажимы цепи разомкнуты) к напряжению на входе цепи U_1. Сопротивления отдельных ветвей цепи в омах указаны на схеме.

1.11. На какое сопротивление надо замкнуть выходные зажимы схемы рис. 1.16, *а* (зашунтовать сопротивление 30 Ом), чтобы получить отношение $U_2 : U_1 = 1 : 24$?

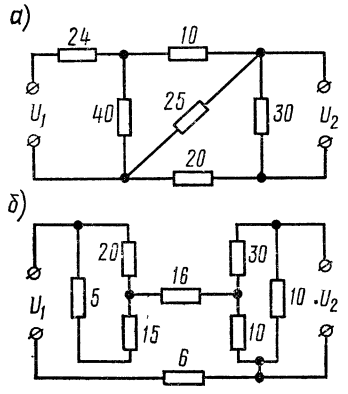


Рис. 1.16

1.12. В схеме рис. 1.17 найти сопротивление R_x, если $I_1 = 2{,}6$ А, $I_3 = 0{,}6$ А, $R_1 = 0{,}5$ Ом, $R_2 = 1{,}4$ Ом, $R_3 = 3$ Ом, $R_4 = 2{,}5$ Ом.

Найти э. д. с. батареи E, если ее внутреннее сопротивление $r = 0{,}1$ Ом.

1.13. В схеме моста (рис. 1.18) известны сопротивления резисторов $R_1 = 1300$ Ом; $R_2 = 800$ Ом; $R_3 = 400$ Ом. Сопротивление гальванометра $R_г = 600$ Ом. Через сопротивление R_1 протекает ток $I_1 = 1$ мА. К мосту приложено напряжение $U = 2{,}5$ В. Найти R_4.

1.14. В цепи рис. 1.19 найти E_1 и R_x, если $E_2 = 3$ В, $R_1 = R_2 = 1$ кОм,

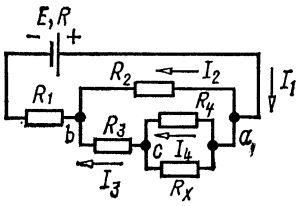


Рис. 1.17

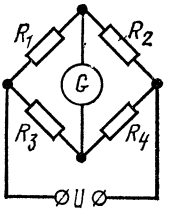


Рис. 1.18

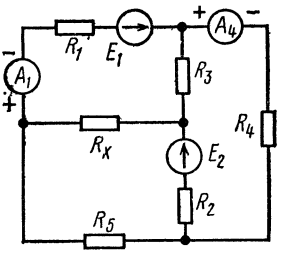


Рис. 1.19

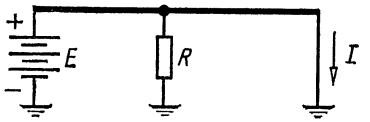
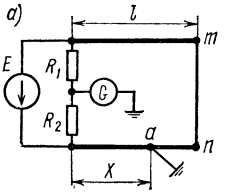


Рис. 1.20



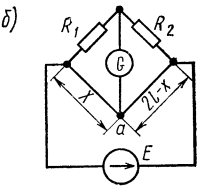


Рис. 1.21

$R_3 = 4$ кОм, $R_4 = 2$ кОм, $R_5 = 1$ кОм. Амперметр A_1 показывает 4 мА, а A_4 — 3 мА; полярности приборов показаны на схеме, а их сопротивлениями можно пренебречь.

1.15. Однопроводная линия с сопротивлением R_0 на единицу длины, питаемая батареей с э. д. с., равной E, закорочена на приемном конце (рис. 1.20). На каком месте линия должна иметь утечку с сопротивлением R, чтобы ток I на приемном конце был максимальным?

1.16. Для определения места повреждения изоляции линии применяется схема, изображенная на рис. 1.21, *а*; R_1 и R_2 — магазины сопротивлений. Правый зажим гальванометра заземлен. Свободные концы m и n линии соединены между собой накоротко. Подбором сопротивлений R_1 и R_2 добиваются отсутствия тока в гальванометре. Показать, что если сечения обоих проводов одинаковы, то расстояние от места повреждения изоляции до начала линии равно $\frac{2lR_2}{R_1+R_2}$.

Указание. Заданная схема может быть заменена схемой рис. 1.21, *б*.

1.17. При проверке постоянной C счетчика оказалось, что при токе 10 А и напряжении 120 В якорь его в продолжение 30 с сделал 370 оборотов. Определить ошибку в показаниях счетчика, если на счетчике указано, что 1 кВт·ч соответствует 400 оборотам счетчика.

Примечание. Постоянной счетчика называется число ватт-часов, приходящихся на один оборот счетчика.

1.18. Каково должно быть сечение медных проводов линии для передачи потребителю мощности $P = 16$ кВт при условии, что потеря мощности не превысит $p = 5\%$, если длина линии $l = 180$ м и напряжение в конце линии равно $U_2 = 220$ В?

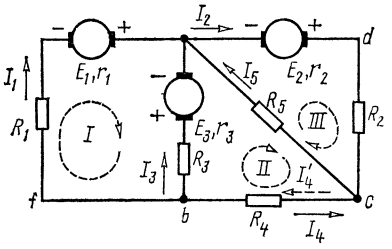


Рис. 1.22

1.19. Для цепи схемы рис. 1.22, пользуясь законами Кирхгофа, найти токи и проверить баланс мощностей, если $E_1 = 15$ В, $E_2 = 70$ В, $E_3 = 5$ В, $r_1 = r_2 = 1$ Ом, $r_3 = 2$ Ом, сопротивления элементов в цепи: $R_1 = 5$ Ом, $R_2 = 4$ Ом, $R_3 = 8$ Ом, $R_4 = 2{,}5$ Ом, $R_5 = 15$ Ом. Записать уравнения Кирхгофа в матричной форме.

Р е ш е н и е. Всего в схеме цепи пять ветвей ($N_в = 5$: bfa, adc, ba, bc, ca), число узлов $N_у = 3$(a, b и c), источников тока нет ($N_т = 0$), число неизвестных токов равно $N_в - N_т = 5$. Число независимых уравнений, составляемых по первому закону Кирхгофа, равно числу узлов минус единица, т. е. двум ($N_у - 1 = 3 - 1 = 2$). Число уравнений, составляемых по второму закону Кирхгофа, согласно (1.10) равно трем ($K = N_в - N_у + 1 - N_т = 5 - 3 + 1 - 0 = 3$). Таким образом, общее число независимых уравнений, составляемых по первому и второму закону Кирхгофа, равно числу неизвестных токов в пяти ветвях схемы.

Выберем и обозначим стрелками положительные направления токов и направление обхода трех независимых контуров: *I*, *II* и *III*. Составим систему уравнений Кирхгофа:

для узла a

$$-I_1 + I_2 - I_3 - I_5 = 0; \tag{1}$$

для узла b

$$I_1 + I_3 + I_4 = 0; \tag{2}$$

для контура *I*

$$(R_1 + r_1) I_1 - (R_3 + r_3) I_3 = E_1 + E_3; \tag{3}$$

для контура *II*

$$(R_3 + r_3) I_3 - R_4 I_4 - R_5 I_5 = -E_3; \tag{4}$$

для контура *III*

$$(R_2 + r_2) I_2 + R_5 I_5 = E_2. \tag{5}$$

Уравнения (1) — (5) после подстановки в них числовых значений будут иметь следующий вид:

$$-I_1 + I_2 - I_3 - I_5 = 0 \text{ (1 а)}; \quad I_1 + I_3 + I_4 = 0 \text{ (2 а)};$$

$$6I_1 - 10I_3 = 20 \text{ (3 а)}; \quad 10I_3 - 2{,}5I_4 - 15I_5 = -5 \text{ (4 а)};$$

$$5I_2 + 15I_5 = 70 \text{ (5 а)}.$$

Решая эту систему уравнений, получим: $I_1 = 5$ А; $I_2 = 8$ А; $I_3 = 1$ А; $I_4 = -6$ А; $I_5 = 2$ А.

Отрицательный знак для тока I_4 означает, что истинное направление тока в R_4 противоположно принятому. Оно обозначено I_4' и показано на схеме штриховой стрелкой.

При проверке баланса мощностей надо иметь в виду, что в тех ветвях цепи, где направление тока совпадает с направлением э. д. с., соответствующая э. д. с. является источником энергии, а в тех участках, где направления э.д. с. и тока противоположны, э. д. с. — потребитель энергии. Все сопротивления, как внешние, так и источников энергии, независимо от направления протекающего через них тока будут потребителями энергии.

Баланс мощностей для рассматриваемой схемы [см. формулы (1.32)]

$$E_1 I_1 + E_2 I_2 - E_3 I_3 = I_1^2 (R_1' + r_1) + I_2^2 (R_2 + r_2) + \\ + I_3^2 (R_3 + r_3) + I_4^2 R_4' + I_5^2 R_5$$

или

$15 \cdot 5 + 70 \cdot 8 - 5 \cdot 1 = 5^2 \cdot 6 + 8^2 \cdot 5 + 1^2 \cdot 10 + 6^2 \cdot 2{,}5 + + 2^2 \cdot 15$; получено тождество $630 = 630$.

Матричная форма записи уравнений Кирхгофа (1а) — (5а) имеет вид

$$[\mathbf{a}]\,[\mathbf{I}] = [\mathbf{F}],$$

где [I] — матрица-столбец токов ветвей,

[a] — матрица коэффициентов при токах,

[F] — матрица-столбец активных элементов,

$$[I] = \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \\ I_5 \end{bmatrix}; \quad [\mathbf{a}] = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 6 & 0 & -10 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 10 & -2{,}5 & -15 \\ 0 & 5 & 0 & 0 & 15 \end{bmatrix}; \quad [\mathbf{F}] = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 20 \\ -5 \\ 70 \end{bmatrix}.$$

1.20. В схеме рис. 1.23 найти все токи.

1.21. Для цепи, изображенной на рис. 1.24, рассчитать токи и определить показание вольтметра, если $E_1 = 40$ В, $E_2 = 5$ В, $E_3 = 25$ В, $R_1 = 5$ Ом, $R_2 = R_3 = 10$ Ом. Током, протекающим через вольтметр, можно пренебречь.

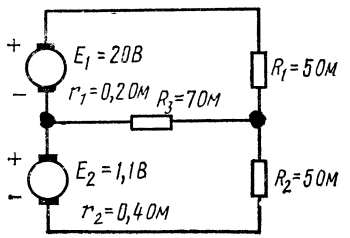


Рис. 1.23

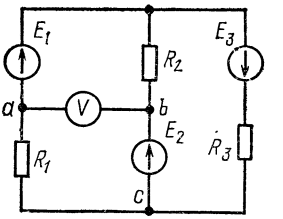


Рис. 1.24

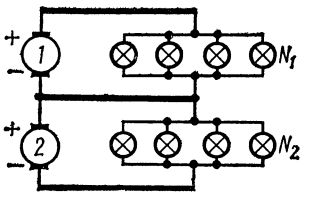


Рис. 1.25

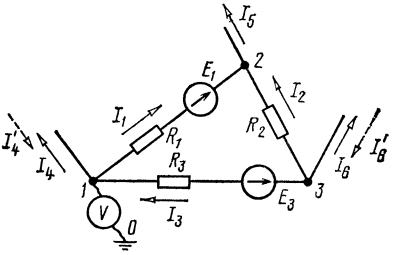


Рис. 1.26

1.22. Аккумуляторная батарея из 20 последовательно соединенных элементов работает параллельно с генератором на сеть, имеющую нагрузку 30 А. Каждый аккумулятор имеет э. д. с. 1,82 В и сопротивление 0,001 Ом. Э. д. с. генератора 36,4 В и его сопротивление 0,04 Ом. Определить нагрузку генератора и батареи (т. е. отдаваемые ими токи) и напряжение на их зажимах.

Какую э. д. с. должен развивать генератор, чтобы нагрузка распределилась поровну между генератором и батареей?

1.23. По трехпроводной линии длиной 0,5 км (рис. 1.25) от двух генераторов *1* и *2* питаются две группы ламп 50 Вт, 110 В. В первой группе $N_1 = 200$ ламп, во второй $N_2 = 600$ ламп. Сечение крайних проводов $q = 35$ мм^2, а сечение среднего (нулевого) провода $q_0 = 16$ мм^2. Каждый генератор имеет внутреннее сопротивление 0,01 Ом и развивает э. д. с. 120 В. Определить токи во всех проводах линии и напряжение на зажимах каждой группы ламп, сопротивления которых считать постоянными. Материал проводов линии — медь.

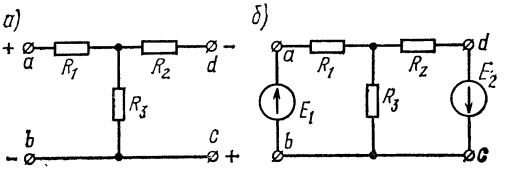


Рис. 1.27

1.24. Напряжения, измеренные электростатическим вольтметром, между узловыми точками схемы и землей равны $U_{10} = -15$ В, $U_{20} = 52$ В, $U_{30} = 64$ В (рис. 1.26). Определить токи в ветвях и отходящих проводах при $E_1 = 80$ В, $E_3 = 70$ В, $R_1 = 5$ Ом, $R_2 = 10$ Ом, $R_3 = 12$ Ом.

Указание. Сначала вычисляем напряжение между каждой парой узловых точек, например $U_{12} = U_{10} - U_{20}$ и, применяя к ветви *12* закон Ома, находим ток I_1. Найдя токи во всех ветвях, токи в ответвлениях от узловых точек находим по первому закону Кирхгофа.

1.25. Для схемы цепи рис. 1.27, *а* найти токи и проверить баланс мощностей, если $U_{ab} = 12$ В, $U_{cd} = 5{,}6$ В, $R_1 = 4$ Ом, $R_2 = 5$ Ом, $R_3 = 3$ Ом.

Указание. Данная схема может быть заменена эквивалентной, в которой между точками *a* и *b*, *c* и *d* включены идеальные источники э. д. с. с э. д. с., численное значение которых $E_1 = U_{ab}$ и $E_2 = U_{cd}$ (рис. 1.27, *б*). Обращаем внима-

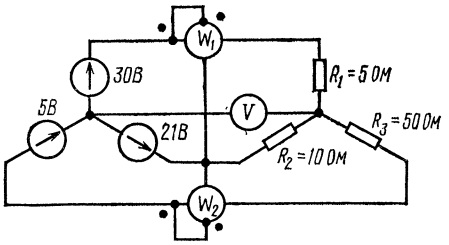


Рис. 1.28

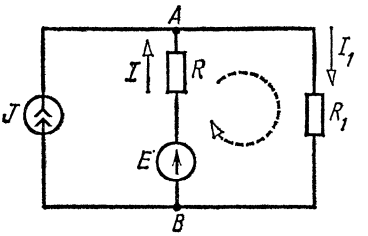


Рис. 1.29

ние на то, что при включении э. д. с. следует соблюдать заданные полярности напряжений.

1.26. Чему равно показание вольтметра на рис. 1.28, если током вольтметра можно пренебречь по сравнению с токами в нагрузках?

Определить показания ваттметров и убедиться в том, что их сумма равна сумме мощностей, расходуемых в сопротивлениях R_1, R_2, R_3. Потерями в катушках ваттметров пренебречь.

1.27. Для цепи рис. 1.29 определить токи. Даны: $E = 20$ В, $J = 2$ А, $R = 15$ Ом, $R_1 = 85$ Ом.

Проверить баланс мощностей.

Р е ш е н и е. Выберем положительные направления токов, как это указано на рис. 1.29, и составим уравнения по законам Кирхгофа. Цепь содержит три ветви ($N_в = 3$), два узла A и B ($N_у = 2$), один источник тока ($N_т = 1$). Число уравнений, составляемых по первому закону Кирхгофа, $У = N_у - 1 = 1$, а по второму закону Кирхгофа [см. формулу (1.10)]

$$K = N_в - N_у + 1 - N_т = 3 - 2 + 1 - 1 = 1.$$

Уравнение для узла A

$$I_1 - J - I = 0. \tag{1}$$

Независимый контур выбираем так, чтобы он не содержал источник тока (на рисунке он показан штриховой линией). Для него составляем уравнение второго закона Кирхгофа

$$IR + I_1R_1 = E. \tag{2}$$

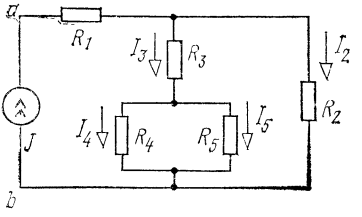


Рис. 1.30

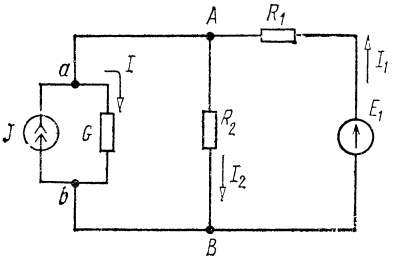


Рис. 1.31

Подставляя в уравнения (1) и (2) цифровые значения и решив их, получим $I = -1{,}5$ А; $I_1 = 0{,}5$ А.

Для расчета баланса мощностей необходимо знать напряжение на источнике тока. Его находим по ветвям внешним по отношению к зажимам источника тока. Напряжение на нем $U_{AB} = I_1R_1 = 42{,}5$ В. Составляем баланс мощностей

$$U_{AB}J + EI = I^2R + I_1^2R_1.$$

Подставляя числовые значения, получим:

$$42{,}5 \cdot 2 + 20\,(-1{,}5) = (-1{,}5)^2 \cdot 15 + 0{,}5^2 \cdot 85.$$

Получим тождество: $55 = 55$.

1.28. К источнику тока $J = 0{,}1$ А подключены резисторы, сопротивления которых (рис. 1.30): $R_1 = 12$ Ом, $R_2 = 10$ Ом, $R_3 = 16$ Ом, $R_4 = 40$ Ом, $R_5 = 60$ Ом.

Определить напряжение U_{ab} источника тока и все токи. Проверить баланс мощностей.

1.29. Цепь рис. 1.31 содержит источник тока, имеющий внутреннюю проводимость $G = 5 \cdot 10^{-5}$ См и ток $J = 80$ мА, и идеальный источник э. д. с. с э. д. с. $E_1 = 230$ В, сопротивления $R_1 = 1$ кОм, $R_2 = 2$ кОм. Определить все токи. Проверить баланс мощностей.

В. Методы контурных токов и узловых потенциалов

1.30. Методом контурных токов найти токи в цепи, схема которой изображена на рис. 1.32. Даны: $E_1 = 100$ В, $E_2 = 30$ В, $E_3 = 10$ В, $E_4 = 6$ В, $R_1 = 10$ Ом, $R_2 = 10$ Ом, $R_4 = 6$ Ом, $R_5 = 5$ Ом, $R_6 = 15$ Ом, $r_4 = 1$ Ом.

Р е ш е н и е. Выберем направления контурных токов, которые обозначим через I_{11}, I_{22}, I_{33}.

Составим систему уравнений для контуров:

$$(R_1 + R_2)\,I_{11} - R_2I_{22} = E_1 - E_2 - E_3;$$

$$(R_2 + R_5 + R_4 + r_4)\,I_{22} - (R_4 + r_4)\,I_{33} - R_2I_{11} = E_2 - E_4;$$

$$(R_6 + R_4 + r_4)\,I_{33} - (R_4 + r_4)\,I_{22} = E_3 + E_4.$$

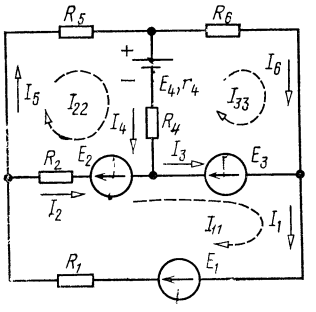


Рис. 1.32

После подстановки числовых значений имеем:

$$20I_{11} - 10I_{22} = 60;$$

$$-10I_{11} + 22I_{22} - 7I_{33} = 24;$$

$$-7I_{22} + 22I_{33} = 16.$$

Решив эту систему уравнений, найдем контурные токи: $I_{11} = 5$ А; $I_{22} = 4$ А; $I_{33} = 2$ А, а затем — истинные токи во всех ветвях.

В ветви, где действует э. д. с. E_1, ис-

тинный ток I_1 имеет направление контурного тока I_{11} и равен $I_1 = I_{11} = 5$ А.

В ветви с сопротивлением R_5 истинный ток I_5 имеет направление контурного тока I_{22} и равен $I_5 = I_{22} = 4$ А.

В ветви с сопротивлением R_6 истинный ток I_6 имеет направление контурного тока I_{33} и равен $I_6 = I_{33} = 2$ А.

В ветви с сопротивлением R_2 истинный ток I_2 получится от наложения контурных токов I_{11} и I_{22} и будет иметь направление большего контурного тока I_{11}:

$$I_2 = I_{11} - I_{22} = 5 - 4 = 1 \text{ А}.$$

В ветви с сопротивлением R_4 истинный ток I_4 получится от наложения контурных токов I_{22} и I_{33} и будет иметь направление контурного тока I_{22}:

$$I_4 = I_{22} - I_{33} = 4 - 2 = 2 \text{ А}.$$

В ветви, где действует э. д. с. E_3, истинный ток I_3 получится от наложения контурных токов I_{11} и I_{33} и будет иметь направление тока I_{11}:

$$I_3 = I_{11} - I_{33} = 5 - 2 = 3 \text{ А}.$$

В целях упражнения рекомендуем составить самостоятельно уравнения контурных токов в матричной форме.

1.31. Найти все токи и определить потенциалы точек a, b, c относительно земли O (рис. 1.33). Задачу решить методом контурных токов. Даны: $E_1 = 85$ В, $E_2 = 84$ В, $E_3 = 5$ В, $E_4 = 12$ В, $R_1 = 8$ Ом, $R_2 = 10$ Ом, $R_3 = 10$ Ом, $R_4 = 10$ Ом, $R_5 = 10$ Ом, $R_6 = 4$ Ом.

1.32. Цепь рис. 1.34 содержит источник тока $J = 50$ мА, источник э. д. с. $E = 60$ В и резисторы, сопротивления которых $R_1 = 5$ кОм, $R_2 = 4$ кОм, $R_3 = 16$ кОм, $R_4 = 2$ кОм, $R_5 = 8$ кОм.

Вычислить все токи методом контурных токов. Проверить баланс мощностей.

Р е ш е н и е. Схема содержит шесть ветвей ($N_в = 6$), четыре узла ($N_у = 4$), один источник тока ($N_т = 1$). Число независимых уравнений, составляемых по методу контурных токов, равно двум ($K = 6 -$

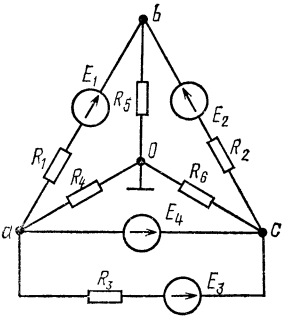


Рис. 1.33

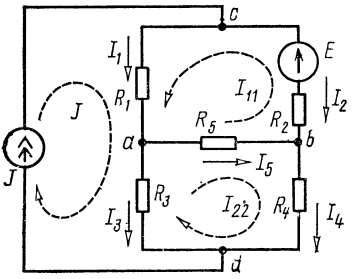


Рис. 1.34

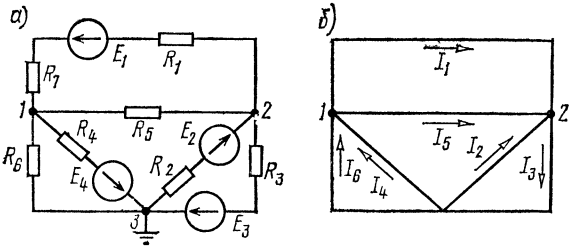


Рис. 1.35

$-4+1-1=2$). Зададимся направлениями контурных токов I_{11}, I_{22}, как показано на рис. 1.34. Там же нанесен известный контурный ток источника тока J. Составим систему уравнений для первого и второго контуров:

$$(R_1+R_2+R_5)\,I_{11}+R_5I_{22}+R_1J=E;$$

$$R_3I_{11}+(R_3+R_4+R_5)\,I_{22}-R_3J=0.$$

Подставляя цифровые значения и решая эти уравнения, найдем контурные токи: $I_{11}=-30$ мА и $I_{22}=40$ мА.

Искомые токи:

$$I_1=I_{11}+J=20\text{ мА};\quad I_2=-I_{11}=30\text{ мА};$$

$$I_3=-I_{22}+J=10\text{ мА};\quad I_4=I_{22}=40\text{ мА};\quad I_5=I_{11}+I_{22}=10\text{ мА}.$$

Баланс мощностей

$$-EI_2+U_{cd}J=-EI_2+(R_1I_1+R_3I_3)\,J=$$

$$=I_1^2R+I_2^2R_2+I_3^2R_3+I_4^2R_4+I_5^2R_5.$$

Подставляя числовые значения, получим тождество: 11,2 Вт = = 11,2 Вт.

1.33. Для схемы рис. 1.35, *а*, пользуясь методом узловых потенциалов, определить все токи. Дано: $E_1=30$ В, $E_2=10$ В, $E_3=200$ В, $E_4=56$ В, $R_1=20$ Ом, $R_2=30$ Ом, $R_3=6$ Ом, $R_4=8$ Ом, $R_5=15$ Ом, $R_6=40$ Ом и $R_7=10$ Ом.

Р е ш е н и е. Примем потенциал точки *3* равным нулю ($V_3=0$). Тогда на основании (1.13) запишем систему уравнений для определения потенциалов точек *1* и *2*:

$$V_1G_{11}-V_2G_{12}=\sum_1 EG=E_1\frac{1}{R_1+R_7}-E_4\frac{1}{R_4};\qquad(1)$$

$$-V_1G_{21}+V_2G_{22}=\sum_2 EG=-E_1\frac{1}{R_1+R_7}+E_2\frac{1}{R_2}-E_3\frac{1}{R_3}.\qquad(2)$$

Подсчитаем G_{11} — сумму проводимостей ветвей, присоединенных к узлу *1*:

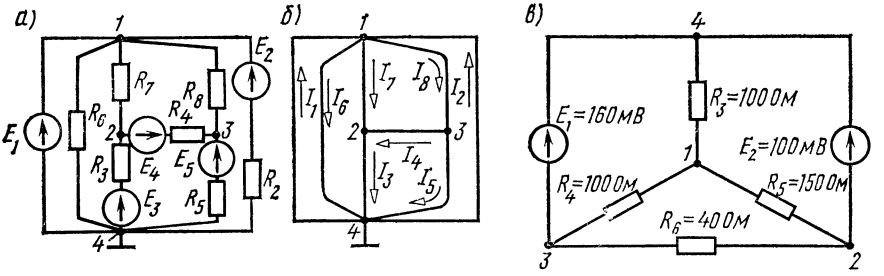


Рис. 1.36

$$G_{11} = 1/(R_1 + R_7) + 1/R_5 + 1/R_4 + 1/R_6 = \frac{1}{30} + \frac{1}{15} + \frac{1}{8} + \frac{1}{40} =$$

$$= 0{,}25 \text{ См}.$$

Аналогично G_{22} — сумма проводимостей ветвей, присоединенных к узлу *2*:

$$G_{22} = 1/(R_1 + R_7) + 1/R_5 + 1/R_2 + 1/R_3 = \frac{1}{30} + \frac{1}{15} + \frac{1}{30} +$$

$$+ \frac{1}{6} = 0{,}3 \text{ См}.$$

Сумма проводимостей, соединяющих первый и второй узлы:

$$G_{12} = G_{21} = 1/(R_1 + R_7) + 1/R_5 = \frac{1}{30} + \frac{1}{15} = 0{,}1 \text{ См}.$$

Подставляя числовые значения в уравнения (1) и (2), получим:

$$0{,}25V_1 - 0{,}1V_2 = 30\,\frac{1}{30} - 56\,\frac{1}{8} = -6;$$

$$0{,}1V_1 + 0{,}3V_2 = -30\,\frac{1}{30} + 10\,\frac{1}{30} - 200\,\frac{1}{6} = -34.$$

Решив последние два уравнения, найдем потенциалы точек *1* и *2*: $V_1 = -80$ В; $V_2 = -140$ В.

Применяя закон Ома для отдельных ветвей, определим искомые токи:

$$I_1 = \frac{V_1 - V_2 - E_1}{R_1} = \frac{-80 + 140 - 30}{30} = 1 \text{ А};$$

$$I_2 = \frac{V_3 - V_2 + E_2}{R_2} = \frac{140 + 10}{30} = 5 \text{ А};$$

$$I_3 = \frac{V_2 - V_3 + E_3}{R_3} = \frac{-140 + 200}{6} = 10 \text{ А};$$

$$I_4 = \frac{V_3 - V_1 - E_4}{R_4} = \frac{80 - 56}{8} = 3 \text{ А}.$$

$$I_5 = \frac{V_1 - V_2}{R_5} = \frac{-80 + 140}{15} = 4 \text{ А}; \quad I_6 = \frac{V_3 - V_1}{R_6} = \frac{80}{40} = 2 \text{ А}.$$

Направления найденных токов указаны на структурной схеме рис. 1.35, *б* цепи рис. 1.35, *а*.

В целях упражнения рекомендуем составить самостоятельно уравнения узловых потенциалов в матричной форме.

1.34. Методом узловых потенциалов определить токи во всех ветвях схемы, изображенной на рис. 1.36, *а*. Заданы: $E_1 = 20$ В, $E_2 = 30$ В, $E_3 = 2$ В, $E_4 = 1{,}2$ В, $E_5 = 5{,}6$ В, $R_2 = 50$ Ом, $R_3 = 10$ Ом, $R_4 = 20$ Ом, $R_5 = 10$ Ом, $R_6 = 100$ Ом, $R_7 = 50$ Ом, $R_8 = 20$ Ом.

Р е ш е н и е. В цепи имеется ветвь с источником напряжения, не содержащая сопротивления. Целесообразно принять равным нулю потенциал одной из узловых точек, к которой подходит указанная ветвь, например потенциал узла *4* ($V_4 = 0$). Тогда потенциал точки *1* имеет значение, равное E_1, т. е. $V_1 = 20$ В. Общее число уравнений, согласно формуле (1.13), равно двум ($N_у = 4$, $N_н = 1$, $У = N_у - N_н - 1 = 2$). Таким образом, в данной задаче достаточно составить по методу узловых потенциалов [см. формулу (1.12 б)] всего два уравнения для узлов *2* и *3*:

для узла *2*

$$-V_1G_{21} + V_2G_{22} - V_3G_{23} - V_4G_{24} = \sum_2 EG = E_3\frac{1}{R_3} - E_4\frac{1}{R_4};$$

для узла *3*

$$-V_1G_{31} - V_2G_{32} + V_3G_{33} - V_4G_{34} = \sum_3 EG = E_4\frac{1}{R_4} + E_5\frac{1}{R_5}.$$

Подставляя в эти уравнения числовые значения сопротивлений, э. д. с., а также значения $V_1 = 20$ В, $V_4 = 0$, после перегруппировки членов для двух неизвестных потенциалов V_2 и V_3 получим систему уравнений:

$$V_2\left(\frac{1}{50} + \frac{1}{10} + \frac{1}{20}\right) - V_3\frac{1}{20} = \frac{2}{10} - \frac{1{,}2}{20} + \frac{20}{50};$$

$$-V_2\frac{1}{20} + V_3\left(\frac{1}{20} + \frac{1}{20} + \frac{1}{10}\right) = \frac{1{,}2}{20} + \frac{5{,}6}{10} + \frac{20}{20},$$

или $0{,}17V_2 - 0{,}05\,V_3 = 0{,}54$; $-0{,}05V_2 + 0{,}2\,V_3 = 1{,}62$.

Решая эту систему уравнений, найдем

$$V_2 = 6 \text{ В}; \quad V_3 = 9{,}6 \text{ В}.$$

Применяя к отдельным ветвям формулы закона Ома, получим значения всех токов, которые нанесены на структурной схеме (рис. 1.36, *б*):

$$I_2 = 0{,}2 \text{ А}, \quad I_3 = 0{,}4 \text{ А}, \quad I_4 = 0{,}12 \text{ А}, \quad I_5 = 0{,}4 \text{ А},$$

$$I_6 = 0{,}2 \text{ А}, \quad I_7 = 0{,}28 \text{ А}, \quad I_8 = 0{,}52 \text{ А}.$$

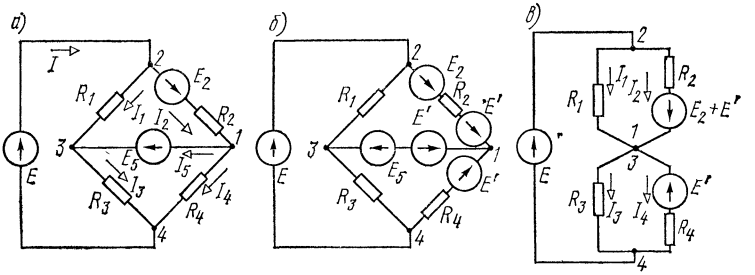


Рис. 1.37

Обращаем особое внимание на то, что в ветви без сопротивления ток I_1 не определяется законом Ома и вычисляется на основании первого закона Кирхгофа:

$$I_1 = I_3 + I_5 + I_6 - I_2 = 0{,}8 \text{ А}.$$

1.35. Методом узловых потенциалов рассчитать токи в цепи (рис. 1.36, *в*).

Указание. Если потенциал точки *4*, являющейся общей для э. д. с. E_1 и E_2, принять равным нулю ($V_4 = 0$), то $V_3 = -E_1$, $V_2 = -E_2$, и для решения задачи достаточно составить всего одно уравнение для узловой точки *1*.

1.36. Методом узловых потенциалов найти токи в схеме цепи рис. 1.37, *а*. Дано: $E = 100$ В, $E_2 = 10$ В, $E_5 = 40$ В, $R_1 = 20$ Ом, $R_2 = 30$ Ом, $R_3 = 20$ Ом, $R_4 = 10$ Ом.

Р е ш е н и е. Всего в схеме четыре узла ($N_у = 4$), две ветви, содержащие только источники напряжения: ветви с э. д. с. E и E_5 ($N_н = 2$). Согласно (1.12 б) число уравнений, составляемых по методу узловых потенциалов, равно одному:

$$У = N_у - N_и - 1 = 4 - 2 - 1 = 1.$$

Однако при составлении уравнений согласно формулам (1.13) для любого из узлов войдут слагаемые, имеющие бесконечно большую проводимость.

Покажем, как обойти указанное затруднение.

Известно, что если во все ветви, примыкающие к какому-либо узлу, ввести одинаковые э. д. с., направленные к узлу (или от него), то это не окажет влияния на распределение токов в схеме, так как в уравнениях второго закона Кирхгофа для любого контура эти э. д. с. взаимно компенсируются. Воспользовавшись этим свойством, введем во все ветви, примыкающие к узлу *1*, э. д. с. E', направленные к этому уз-

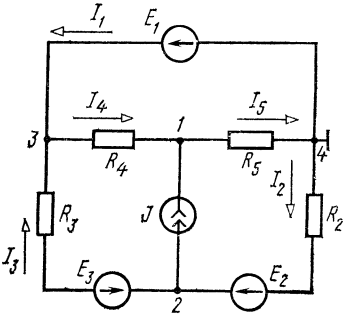


Рис. 1.38

лу и равные E_5 (рис. 1.37, *б*). Теперь окажется, что в ветви *1—3* действуют две одинаковые и противоположно направленные э. д. с., и их сумма равна нулю. Поэтому точки *1* и *3* равнопотенциальны и их можно закоротить (рис. 1.37, *в*). Эта схема имеет три узла и содержит одну ветвь, имеющую только э. д. с. $E(N_и = 1)$. Поэтому согласно (1.12б) по методу узловых потенциалов надо составить всего одно уравнение. Составим его для узла *1*, приняв $V_4 = 0$. Тогда $V_2 = E = 100$ В. Уравнение для узла *1* будет иметь вид

$$V_1 G_{11} - V_2 G_{12} - V_4 G_{14} = V_1 \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4}\right) -$$

$$- V_2 \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) - V_4 \left(\frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4}\right) = (E_2 + E') \frac{1}{R_2} + E' \frac{1}{R_4}.$$

Подставляя сюда числовые значения, получим $V_1 = 60$ В.

Найдем токи в ветвях исходной схемы по закону Ома:

$$I_1 = 2 \text{ А}; \quad I_2 = 3 \text{ А}; \quad I_3 = 3 \text{ А}; \quad I_4 = 2 \text{ А}.$$

Токи в ветвях с э. д. с. E и E_5 определяем по первому закону Кирхгофа:

$$I = I_1 + I_2 = 5 \text{ А}; \quad I_5 = I_2 - I_4 = 1 \text{ А}.$$

Для упражнения рекомендуется решить эту задачу, введя в каждую из ветвей, примыкающую к узлу *2*, э. д. с. $E'' = E$.

1.37. Даны: цепь (рис. 1 38), $E_1 = 100$ В, $E_2 = 150$ В, $E_3 = 28$ В, $J = 2$ мА, $R_2 = 2$ кОм, $R_3 = 4$ кОм, $R_4 = 6$ кОм, $R_5 = 8$ кОм. Простейшим способом рассчитать токи всех ветвей.

Г. Метод наложения. Преобразование треугольника в звезду и обратно

1. 38. Методом наложения рассчитать токи в схеме цепи рис. 1.39, если $E_1 = 10$ В, $E_2 = 40$ В, $E_3 = 5$ В, $r_1 = 5$ Ом, $r_2 = r_3 = 2$ Ом, $R_1 = 30$ Ом, $R_2 = 3$ Ом, $R_3 = 8$ Ом.

1. 39. Найти токи в ветвях цепи рис. 1.40. Задачу решить методом наложения, контурных токов и узловых потенциалов.

1.40. В схеме цепи рис. 1.41 методом наложения найти все токи.

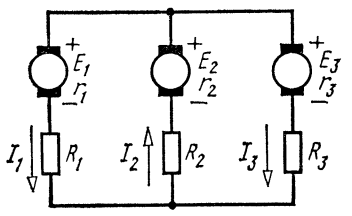


Рис. 1.39

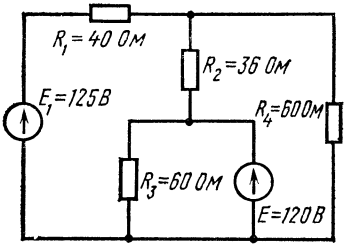


Рис. 1.40

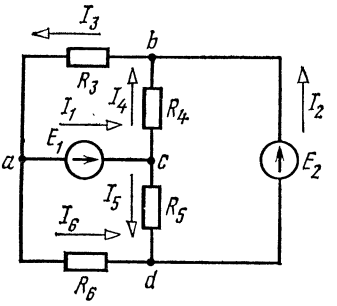


Рис. 1.41

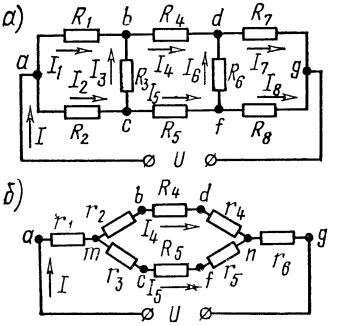


Рис. 1.42

Даны: $E_1 = 96$ В, $E_2 = 75$ В, $R_3 = 3$ Ом, $R_4 = 15$ Ом, $R_5 = 10$ Ом, $R_6 = 6$ Ом.

1.41. Найти эквивалентное сопротивление цепи (рис. 1.42, *а*) и все токи, если $U = 114$ В, $R_1 = 30$ Ом, $R_2 = R_3 = 10$ Ом, $R_4 = 26$ Ом, $R_5 = 11$ Ом, $R_6 = 10$ Ом, $R_7 = 40$ Ом, $R_8 = 50$ Ом. Задачу решить методом преобразования треугольника сопротивлений в эквивалентную звезду.

Р е ш е н и е. Заменим треугольники сопротивлений *abc* и *dfg* эквивалентными звездами (рис. 1.42, *б*). В преобразованной схеме появились новые узлы *m* и *n*. Обратим внимание на то, что в преобразованной схеме сохраняются значения токов I, I_4, I_5 в участках цепи, которые не подвергались преобразованию.

Подсчитаем сопротивления лучей звезды r_1, r_2, r_3 эквивалентной треугольнику *abc* сопротивлений R_1, R_2, R_3 [см. формулы (1.21)]:

$$r_1 = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2 + R_3} = 6 \text{ Ом}; \quad r_2 = \frac{R_1 R_3}{R_1 + R_2 + R_3} = 6 \text{ Ом};$$

$$r_3 = \frac{R_2 R_3}{R_1 + R_2 + R_3} = 2 \text{ Ом}.$$

Определим сопротивления лучей звезды r_4, r_5, r_6, эквивалентной треугольнику *dfg* сопротивлений R_6, R_7, R_8:

$$r_4 = \frac{R_6 R_7}{R_6 + R_7 + R_8} = 4 \text{ Ом}; \quad r_5 = \frac{R_6 R_8}{R_6 + R_7 + R_8} = 5 \text{ Ом};$$

$$r_6 = \frac{R_7 R_8}{R_6 + R_7 + R_8} = 20 \text{ Ом}.$$

Эквивалентное сопротивление всей цепи

$$R_{эк} = r_1 + \frac{R_I R_{II}}{R_I + R_{II}} + r_6 = 38 \text{ Ом},$$

где

$$R_I = r_2 + R_4 + r_4 = 36 \text{ Ом}; \quad R_{II} = r_3 + R_5 + r_5 = 18 \text{ Ом}.$$

Ток в неразветвленной части цепи

$$I = U/R_{эк} = 114/38 = 3 \text{ А}.$$

Токи в параллельных ветвях:

$$I_4 = I\,\frac{R_{II}}{R_I + R_{II}} = 3\,\frac{18}{36+18} = 1 \text{ А}; \quad I_5 = I - I_4 = 2 \text{ А}.$$

Теперь найдем токи в сопротивлениях заданной цепи. Для этого предварительно из схемы рис. 1.42, *б* определим напряжения между точками *a* и *b*, *a* и *c*, *c* и *b*, *d* и *g*, *f* и *g*, *f* и *d*:

$$U_{ab} = r_1 I + r_2 I_4 = 6 \cdot 3 + 6 \cdot 1 = 24 \text{ В};$$

$$U_{ac} = r_1 I + r_3 I_5 = 6 \cdot 3 + 2 \cdot 2 = 22 \text{ В};$$

$$U_{cb} = U_{ab} - U_{ac} = (V_a - V_b) - (V_a - V_c) = V_c - V_b =$$
$$= 24 - 22 = 2 \text{ В};$$

$$U_{dg} = r_4 I_4 + r_6 I = 4 \cdot 1 + 20 \cdot 3 = 64 \text{ В};$$

$$U_{fg} = r_5 I_5 + r_6 I = 5 \cdot 2 + 20 \cdot 3 = 70 \text{ В};$$

$$U_{fd} = U_{fg} - U_{dg} = (V_f - V_g) - (V_d - V_g) = V_f - V_d =$$
$$= 70 - 64 = 6 \text{ В}.$$

Искомые токи:

$$I_1 = U_{ab}/R_1 = 24/30 = 0{,}8 \text{ А}; \quad I_2 = U_{ac}/R_2 = 22/10 = 2{,}2 \text{ А};$$

$$I_3 = U_{cb}/R_3 = 2/10 = 0{,}2 \text{ А}; \quad I_4 = 1 \text{ А}; \quad I_5 = 2 \text{ А};$$

$$I_6 = U_{fd}/R_6 = 6/10 = 0{,}6 \text{ А}; \quad I_7 = U_{dg}/R_7 = 64/40 = 1{,}6 \text{ А};$$

$$I_8 = U_{fg}/R_8 = 70/50 = 1{,}4 \text{ А}.$$

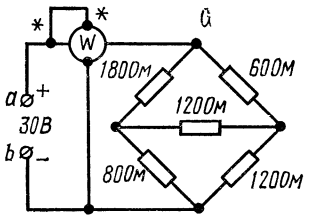


Рис. 1.43

1.42. В схеме цепи рис. 1.43 найти токи, применив преобразование треугольника в звезду. Определить эквивалентное сопротивление между точками *a* и *b*. Определить показание ваттметра и убедиться в том, что оно равно сумме мощностей, расходуемых во всех сопротивлениях.

Д. Метод эквивалентного источника. Преобразование источников. Принцип взаимности

1.43. Для схемы цепи рис. 1.44, *а* методом эквивалентного источника э. д. с. найти ток в ветви резистора, сопротивление которого R_1, если $E_1 = 18$ В, $E_2 = 21$ В, $r_1 = 1$ Ом, $R_1 = 2$ Ом, $r_2 = 2$ Ом, $R_2 = 7$ Ом, $R_3 = 6$ Ом.

Р е ш е н и е. Обозначим положительное направление искомого тока на исходной схеме (рис. 1.44, *а*). Рассмотрим часть схемы, под-

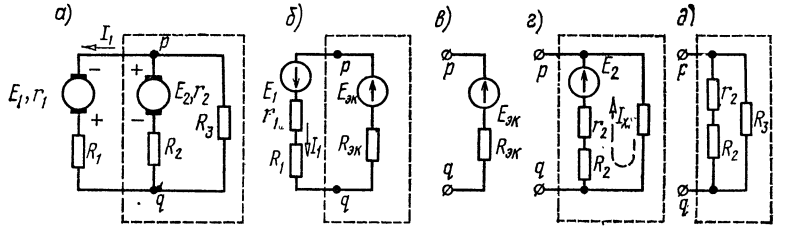


Рис. 1.44

ключенную к исследуемой первой ветви (обведенную штриховой линией), в качестве эквивалентного источника э. д. с. $E_{эк}$ и сопротивлением $R_{эк}$. Нарисуем эквивалентную электрическую схему с эквивалентным источником напряжения (рис. 1.44, *б*).

На схеме произвольно выбрано положительное направление э. д. с. эквивалентного источника $E_{эк}$ к точке p. Это позволяет записать для режима холостого хода эквивалентного источника с отключенной первой ветвью (рис. 1.44, *в*)

$$E_{эк} = U_{pq\,х} = (V_p - V_q)_х.$$

Развернутая схема эквивалентного источника в режиме холостого хода показана на рис. 1.44, *г*. Во внутренних ветвях источника ток

$$I_х = \frac{E_2}{R_3 + R_2 + r_2} = \frac{21}{15} = 1{,}4 \text{ А}.$$

Напряжение холостого хода определяет э. д. с. источника:

$$U_{pq\,х} = R_3 I_х = 6 \cdot 1{,}4 = 8{,}4 \text{ В} = E_{эк}.$$

Найдем сопротивление $R_{эк}$ эквивалентного источника.

Для подсчета сопротивления источника преобразуем его схему (см. рис. 1.44, *г*), заменив источник напряжения E_2 короткозамкнутым участком (рис. 1.44, *д*). Входное сопротивление последней схемы является сопротивлением эквивалентного источника

$$R_{эк} = \frac{(R_2 + r_2) R_3}{R_2 + r_2 + R_3} = \frac{9 \cdot 6}{15} = 3{,}6 \text{ Ом}.$$

Возвращаясь к схеме рис. 1.44, *б*, найдем искомый ток по закону Ома

$$I_1 = \frac{E_{эк} + E_1}{R_{эк} + r_1 + R_1} = \frac{8{,}4 + 18}{3{,}6 + 1 + 2} = 4 \text{ А}.$$

1.44. Методами эквивалентного источника э. д. с. и эквивалентного источника тока найти ток в ветви R_5, если $E_1 = E_2 = 20$ В, $R_1 = R_2 = 40$ Ом, $R_3 = 10$ Ом, $R_4 = 160$ Ом, $R_5 = 20$ Ом (рис. 1.45, *а*).

Р е ш е н и е. 1. Расчет методом эквивалентного источника э. д. с. Отключим ветвь с R_5 (рис. 1.45, *б*) и найдем его параметры с э. д. с.

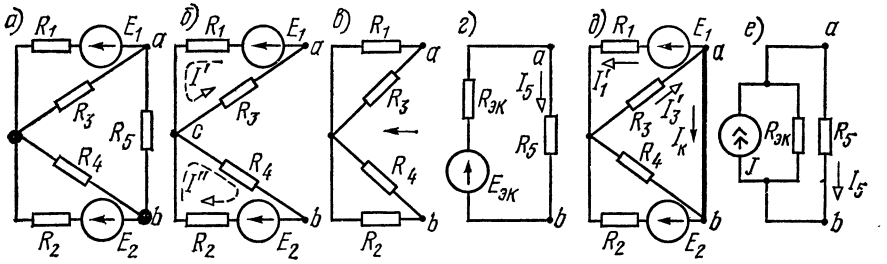


Рис. 1.45

$E_{эк}$ (т. е. напряжение $U_{ab\,х}$ холостого хода между точками a и b) и $R_{эк}$ — сопротивление схемы рис. 1.45, *в* между точками a и b в режиме холостого хода при закороченных э. д. с. E_1 и E_2. Схема эквивалентного источника э. д. с. приведена на рис. 1.45, *г*. Э. д. с. эквивалентного источника и его сопротивление равны:

$$U_{ab\,х} = E_{эк} = -I'R_3 + I''R_4 = -\frac{E_1}{R_1+R_3}R_3 + \frac{E_2}{R_2+R_4}R_4 = 12\text{ В},$$

$$R_{эк} = \frac{R_1R_3}{R_1+R_3} + \frac{R_2R_4}{R_2+R_4} = 40\text{ Ом}.$$

Искомый ток согласно формуле (1.24)

$$I_5 = \frac{E_{эк}}{R_{эк}+R_5} = \frac{12}{40+20} = 0{,}2\text{ А}.$$

2. При расчете методом эквивалентного источника тока ветвь R_5 закорачиваем (рис. 1.45, *д*). Ток I_k, проходящий по закороченной ветви ab, является током эквивалентного источника тока ($I_k = J$). Найдем его. Это можно сделать, рассчитав двухузловую схему рис. 1.45, *д* методом узловых потенциалов. Приняв потенциал точек a и b равным нулю ($V_a = V_b = 0$), найдем

$$V_c = \frac{E_1\frac{1}{R_1} + E_2\frac{1}{R_2}}{\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3}+\frac{1}{R_4}} = 6{,}4\text{ В}.$$

Для определения тока $I_k = J$ вычисляем I_1' и I_3' и по первому закону Кирхгофа вычисляем

$$I_k = J = I_3' - I_1' = \frac{V_c - V_a}{R_3} - \frac{V_a - V_c + E_1}{R_1} =$$

$$= \frac{6{,}4}{10} - \frac{13{,}6}{40} = 0{,}3\text{ А}.$$

Сопротивление эквивалентного источника тока $R_{эк}$ равно сопротивлению эквивалентного источника напряжения; однако его можно найти по (1.25):

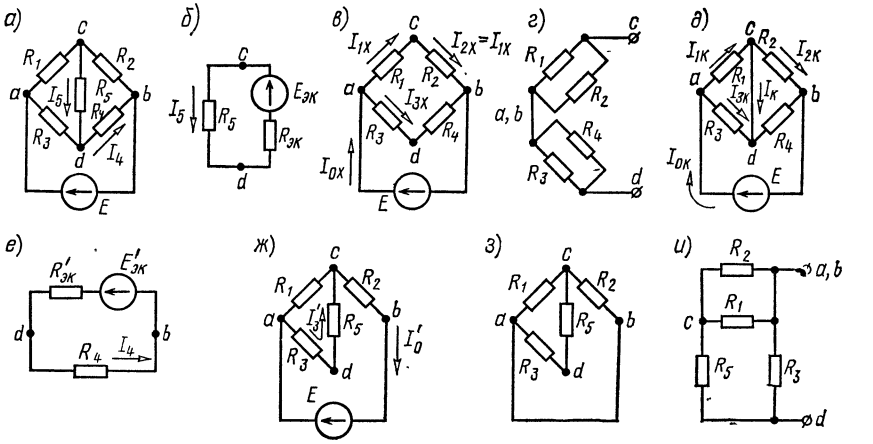


Рис. 1.46

$$R_{эк} = E_{эк}/I_k = 12/0{,}3 = 40 \text{ Ом}.$$

Из схемы эквивалентного источника тока (рис. 1.45, *е*) по формуле (1.26) находим искомый ток

$$I_5 = J\,\frac{R_{эк}}{R_{эк}+R_5} = 0{,}3\,\frac{40}{40+20} = 0{,}2 \text{ А}.$$

Получили тот же результат, что и по методу эквивалентного источника э. д. с.

В заключение рассмотрим вопрос о мощностях, доставляемых источниками при их преобразовании. Из теории известно, что при преобразованиях источников токи в ветвях, не подвергшихся преобразованию, остаются неизменными, а мощности, доставляемые источниками, изменяются. Так, для схем рис. 1.45, *г* и *е* ток в ветви R_5, не подвергшейся преобразованию, в обоих случаях одинаков $I_5 = 0{,}2$ А. Мощности же в цепях схем рис. 1.45, *г* и *е* различны:

$$P_1 = E_{эк}I_5 = 12 \cdot 0{,}2 = 2{,}4 \text{ Вт};$$

$$P_2 = U_иJ = I_5R_5J = 0{,}2 \cdot 20 \cdot 0{,}3 = 1{,}2 \text{ Вт}.$$

1.45. Методом эквивалентного источника э. д. с. найти ток I_5 (рис. 1.46, *а*), проходящий через резистор, сопротивление которого R_5, если $E = 120$ В, $R_1 = 60$ Ом, $R_2 = 15$ Ом, $R_3 = 90$ Ом, $R_4 = 60$ Ом, $R_5 = 12$ Ом. Тем же методом определить ток в сопротивлении R_4.

Р е ш е н и е. На схеме рис. 1.46, *а* обозначим произвольное положительное направление искомого тока I_5. Часть схемы (внешнюю к исследуемой ветви R_5) рассмотрим в виде некоторого источника э. д. с. $E_{эк}$, $R_{эк}$. Стрелку э. д. с. $E_{эк}$ произвольно направим к точке *с* (рис. 1.46, *б*). Таким образом, э. д. с. источника определится напряжением холостого хода:

$$E_{эк} = U_{cd\,х} = (V_c - V_d)_х.$$

На развернутой схеме источника в режиме холостого хода (рис. 1.46, *в*) обозначим токи в ветвях $I_{0х}$, $I_{1х}$, $I_{3х}$.

По закону Ома:

$$I_{1х} = E/(R_1 + R_2) = 120/75 = 1{,}6 \text{ А};$$

$$I_{3х} = E/(R_3 + R_4) = 120/150 = 0{,}8 \text{ А};$$

$$(V_a - V_c)_х = U_{ac\,х} = R_1 I_{1х} = 60 \cdot 1{,}6 = 96 \text{ В};$$

$$(V_a - V_d)_х = U_{ad\,х} = R_3 I_{3х} = 90 \cdot 0{,}8 = 72 \text{ В}.$$

Таким образом, э. д. с. эквивалентного источника напряжения

$$E_{эк} = (V_c - V_d)_х = (V_a - V_d)_х - (V_a - V_c)_х = 72 - 96 = -24 \text{ В}.$$

Найдем сопротивление эквивалентного источника э. д. с. двумя способами.

1. Путем непосредственного расчета по схеме. Для этого в схеме рис. 1.46, *в* источник напряжения заменим короткозамкнутым участком. После этого схему рис. 1.46, *в* нарисуем в виде рис. 1.46, *г*.

Сопротивление источника $R_{эк}$ равно сопротивлению цепи между точками *c* и *d*:

$$R_{эк} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} + \frac{R_3 R_4}{R_3 + R_4} = \frac{60 \cdot 15}{75} + \frac{90 \cdot 60}{150} = 48 \text{ Ом}.$$

2. Путем вычисления отношения э. д. с. эквивалентного источника к току короткого замыкания. Для этого в схеме рис. 1.46, *в* надо замкнуть точки *c* и *d* накоротко, вычислить ток I_k, протекающий через короткозамкнутый участок (рис. 1.46, *д*), и найти сопротивление короткого замыкания по формуле (1.25). Источник э.д.с. *E* в короткозамкнутой схеме рис. 1.46, *д* нагружаем на эквивалентное сопротивление

$$R_{эк} = \frac{R_1 R_3}{R_1 + R_3} + \frac{R_2 R_4}{R_2 + R_4} = \frac{60 \cdot 90}{150} + \frac{15 \cdot 60}{75} = 48 \text{ Ом}.$$

Ток источника напряжения

$$I_{0\,к} = E/R_{эк} = \frac{120}{48} = 2{,}5 \text{ А}.$$

Токи в ветвях

$$I_{1к} = I_{0\,к} \frac{R_3}{R_1 + R_3} = 2{,}5 \frac{90}{150} = 1{,}5 \text{ А};$$

$$I_{2к} = I_{0к} \frac{R_4}{R_2 + R_4} = 2{,}5 \frac{60}{75} = 2 \text{ А}.$$

Отсюда

$$I_к = I_{1к} - I_{2к} = -0{,}5 \text{ А}.$$

Сопротивление источника

$$R_{эк} = \frac{E_{эк}}{I_к} = \frac{-24}{-0{,}5} = 48 \text{ Ом}.$$

Значения сопротивления источника, полученные этими способами, одинаковы.

Возвращаясь к схеме рис. 1.46, *б*, находим искомый ток I_5 по закону Ома:

$$I_5 = \frac{E_{эк}}{R_5 + R_{эк}} = -\frac{24}{12 + 48} = -0{,}4 \text{ А}.$$

Таким образом, ток в сопротивлении R_5 направлен от точки *d* к точке *c* и равен 0,4 А.

Расчет тока резистора, сопротивление которого R_4, методом эквивалентного источника э. д. с. проводится аналогично. Заменяем часть схемы, подключенную к точкам *d* и *b* ветви с сопротивлением R_4, эквивалентным источником $E'_{эк}$, $R'_{эк}$ (рис. 1.46, *е*). Э. д. с. источника совпадает с напряжением в режиме холостого хода: $E'_{эк} = U'_{dbx}$.

Для определения этого напряжения рассчитываем вначале токи I'_3 и I'_0 в развернутой схеме источника в режиме холостого хода (рис. 1.46, *ж*):

$$I'_0 = \frac{E}{R_2 + \dfrac{R_1(R_3 + R_5)}{R_1 + R_3 + R_5}} = \frac{216}{95} \text{ А}; \quad I'_3 = I'_0 \frac{R_1}{R_1 + R_3 + R_5} = \frac{16}{19} \text{ А}.$$

Отсюда находим э. д. с. источника

$$E'_{эк} = U'_{dbx} = R_5 I'_3 + R_2 I'_0 = \frac{840}{19} \text{ В}.$$

Для определения сопротивления источника э. д. с. рассмотрим соответствующую пассивную схему (в схеме источник э. д. с. заменен короткозамкнутым отрезком), показанную на рис. 1.46, *з*. Для ясности эта схема показана в виде рис. 1.46, *и*.

Сопротивление источника, равное входному сопротивлению последней схемы относительно зажимов *d* и *b*:

$$R'_{эк} = \frac{R_3\left(R_5 + \dfrac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}\right)}{R_3 + R_5 + \dfrac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}} = \frac{360}{19} \text{ Ом}.$$

Наконец, находим искомый ток I_4 по схеме эквивалентного источника э. д. с. (рис. 1.46, *е*):

$$I_4 = \frac{E'_{эк}}{R_4 + E'_{эк}} = \frac{\dfrac{840}{19}}{\dfrac{360}{19} + 60} = 0{,}56 \text{ А}.$$

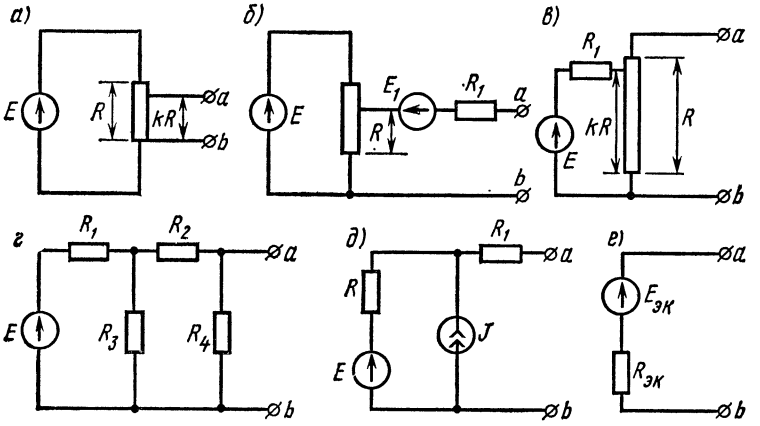


Рис. 1.47

1.46. По данным задачи 1.44 для схемы цепи рис. 1.45 методом эквивалентного источника э. д. с. или тока найти ток в ветви с сопротивлением R_3.

1.47. Считая зажимы a и b входными клеммами схем (рис. 1.47, $а$ — $д$), определить параметры $E_{эк}$ и $R_{эк}$ соответствующих эквивалентных источников (рис. 1.47, $е$).

1.48. Для экспериментального исследования двухполюсника собрана схема рис. 1.48. Требуется найти э. д. с. и сопротивление источников, эквивалентных исследовавшимся двухполюсникам, по данным двух опытов (для каждого двухполюсника): 1) $U_1 = 20$ В; $I_1 = 2$ А; $U_2 = 30$ В; $I_2 = 3$ А; 2) $U_1 = 20$ В; $I_1 = 12$ А; $U_2 = 30$ В; $I_2 = 14$ А; 3) $U_1 = 20$ В; $I_1 = 3$ А; $U_2 = 30$ В; $I_5 = 5$А.

1.49. Два источника тока соединены в цепь рис. 1.49. Ток первого $J_1 = 3$ мА, его внутренняя проводимость $G_1 = 0{,}05$ См, второго — $J_2 = 2$ мА, $G_2 = 0{,}01$ См. Сопротивления $R_3 = 5$ Ом, $R_4 = 30$ Ом. Определить ток, проходящий через сопротивление R_4.

1.50. Вычислить ток в ветви сопротивлением R_5 задачи 1.32 (см. рис. 1.34), пользуясь преобразованием схем с источниками тока в эквивалентные схемы с источниками э. д. с. и наоборот.

Р е ш е н и е. 1. Для ясности перерисуем схему рис. 1.34 в виде рис. 1.50, $а$. Эквивалентность исходной и новой схем очевидна: к соответствующим узлам обеих схем подходят одинаковые токи. В частности, результирующий ток, подводимый к узлу a, равен нулю. Пре-

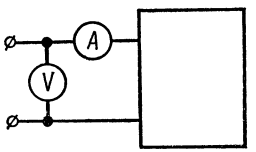


Рис. 1.48

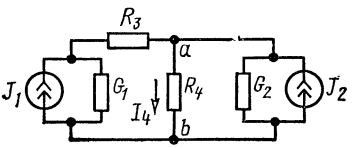


Рис. 1.49

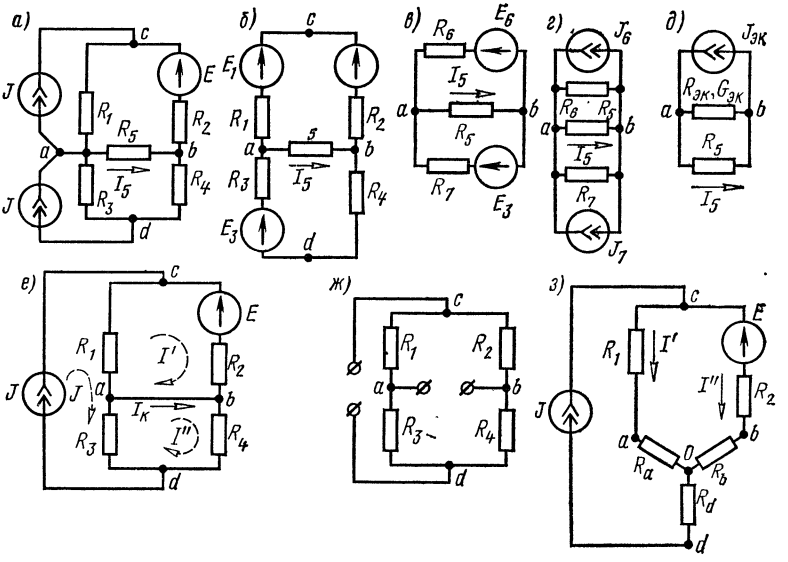


Рис. 1.50

образуем источники тока J последней схемы в источники с э. д. с. E_1 и E_3 (рис. 1.50, *б*):

$$E_1 = JR_1 = 50 \cdot 10^{-3} \cdot 5 \cdot 10^3 = 250 \text{ В};$$

$$E_3 = JR_3 = 50 \cdot 10^{-3} \cdot 16 \cdot 10^3 = 800 \text{ В}.$$

Складывая соответствующие элементы ветвей, приводим рис. 1.50, *б* к виду рис. 1.50, *в*, для которого

$$E_6 = E - E_1 = 60 - 250 = -190 \text{ В};$$

$$R_6 = R_1 + R_2 = 9 \text{ кОм}; \quad R_7 = R_3 + R_4 = 18 \text{ кОм}.$$

Преобразуем схему рис. 1.50, *в* в схему с источниками тока (рис. 1.50, *г*):

$$J_6 = \frac{E_6}{R_6} = -\frac{190}{9} = -21{,}1 \text{ мА}; \quad J_7 = \frac{E_7}{R_7} = \frac{800}{18} = 44{,}4 \text{ мА}.$$

Сложив параллельные элементы, преобразуем схему рис. 1.50,*г* к виду схемы рис. 1.50, *д*:

$$I_{эк} = I_6 + I_7 = -21{,}1 + 44{,}4 = 22{,}3 \text{ мА};$$

$$R_{эк} = \frac{R_6 R_7}{R_6 + R_7} = \frac{9 \cdot 18}{9 + 18} = 6 \text{ кОм}.$$

В ветвь R_5 ответвляется часть тока $I_{эк}$, равная

$$I_5 = I_{эк} \frac{R_{эк}}{R_{эк} + R_5} = 23{,}3 \cdot \frac{6}{14} = 10 \text{ мА}.$$

2. Определим ток $J_{эк}$ эквивалентного источника тока, который равен току I_k при замыкании накоротко сопротивления R_5 (рис. 1.50, *е*). Ток I_k можно вычислить различными способами, например методом контурных токов:

$$(R_1 + R_2) I'_{11} - R_1 J = -E; \quad (R_3 + R_4) I''_{22} - R_3 J = 0.$$

Подставляя числовые значения и решая эти уравнения, найдем:

$$I'_{11} = 21{,}1 \text{ мА}; \quad I''_{22} = 44{,}4 \text{ мА}; \quad I_{эк} = I_k = I''_{22} - I'_{11} = 23{,}3 \text{ мА}.$$

Затем рассчитаем внутреннюю проводимость $G_{эк}$ источника тока. Она равна проводимости пассивной цепи между зажимами *a* и *b* при разомкнутой ветви с R_5 (рис. 1.50, *ж*); ветвь, содержащая источник тока, показана разомкнутой, так как внутреннее сопротивление идеального источника тока бесконечно велико:

$$G_{эк} = \frac{1}{R_1 + R_2} + \frac{1}{R_3 + R_4} = \frac{1}{6 \cdot 10^3} \text{ См}; \quad R_{эк} = \frac{1}{G_{эк}} = 6 \cdot 10^3 \text{ Ом}.$$

На рис. 1.50, *д* приведена схема эквивалентного источника тока относительно зажимов *a* и *b*. Из нее находим искомый ток

$$I_5 = I_{эк} \frac{R_{эк}}{R_5 + R_{эк}} = 23{,}3 \cdot 10^{-3} \frac{6 \cdot 10^3}{14 \cdot 10^3} = 10 \cdot 10^{-3} \text{ А} = 10 \text{ мА}.$$

3. Преобразуем треугольник сопротивлений $R_3 R_4 R_5$ в эквивалентную звезду (рис. 1.50, *з*). Ее сопротивления [см. формулы (1.21)] равны:

$$R_a = \frac{R_3 R_5}{R_3 + R_4 + R_5} = \frac{64}{13} \text{ кОм}; \quad R_b = \frac{8}{13} \text{ кОм}; \quad R_d = \frac{16}{13} \text{ кОм}.$$

Полученная схема содержит всего два узла *O* и *c*. Приняв потенциал узловой точки *O* равным нулю ($V_0 = 0$), вычислим потенциал точки *c* [см. формулу (1.14)]:

$$V_c = \frac{E \dfrac{1}{R_2 + R_b} + J}{\dfrac{1}{R_1 + R_a} + \dfrac{1}{R_2 + R_b}} = 198 \text{ В}.$$

Обращаем внимание на то, что в знаменателе последнего выражения отсутствует слагаемое, учитывающее сопротивление R_d. Это связано с тем, что сопротивление источника тока бесконечно велико и прибавление к нему конечного сопротивления R_d не изменило бы бесконечно большое сопротивление ветви источника тока. По закону Ома найдем токи

$$I' = \frac{V_c - V_0}{R_1 + R_a} = 20 \text{ мА}; \quad I'' = \frac{V_c - V_0 - E}{R_2 + R_b} = 30 \text{ мА}$$

и напряжение между точками *a* и *b*

$$U_{ab} = I' R_a - I'' R_b = 80 \text{ В}.$$

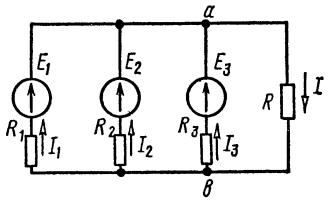


Рис. 1.51

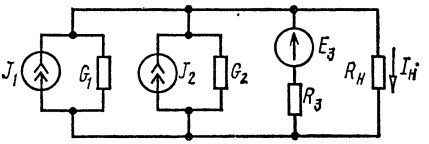


Рис. 1.52

Наконец, определяем искомый ток

$$I_5 = \frac{U_{ab}}{R_5} = 10 \text{ мА}.$$

1.51. Три источника, э. д. с. которых $E_1 = 48$ В, $E_2 = 45$ В, $E_3 = 45$ В, а внутренние сопротивления $R_1 = 1{,}2$ Ом, $R_2 = 1{,}0$ Ом, $R_3 = 1{,}5$ Ом, работают параллельно на общую нагрузку, сопротивление которой $R = 4{,}2$ Ом (рис. 1.51). Произвести замену заданных источников э. д. с. одним эквивалентным, определив его э. д. с. и внутреннее сопротивление. Чему равны токи, протекающие через каждый источник и нагрузку?

1.52. Цепь рис. 1.52, содержащая два источника тока ($J_1 = 30$ мА, $G_1 = 1 \cdot 10^{-3}$ См, $J_2 = 20$ мА, $G_2 = 1{,}5 \cdot 10^{-3}$ См) и источник э. д. с. ($E_3 = 45$ В, $r_3 = 100$ Ом), включена на нагрузочное сопротивление $R_н = 20$ Ом. Определить ток $I_н$.

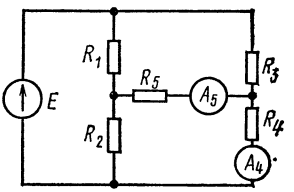


Рис. 1.53

1.53. По данным задачи 1.39 (см. рис. 1.40) методом эквивалентного источника определить ток в сопротивлении R_4.

1.54. Воспользовавшись принципом взаимности, найти показания амперметров A_4 и A_5 (рис. 1.53). Даны $E = 30$ В, $R_1 = 6$ кОм, $R_2 = 4$ кОм, $R_3 = 8$ кОм, $R_4 = R_5 = 2$ кОм.

Е. Условие выделения максимальной мощности в нагрузке

1.55. В схеме цепи рис. 1.54, *а* известны: $E = 100$ В, $R_1 = 10$ Ом, $R_2 = 40$ Ом, $R_3 = 12$ Ом. При каком значении нагрузочного сопротивления $R_н$ в нем выделится максимальная мощность и чему она равна?

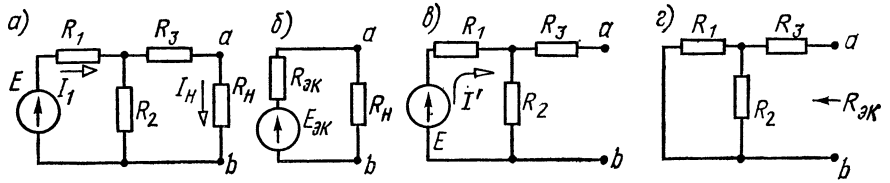


Рис. 1.54

Определить отношение мощности, расходуемой в $R_н$, к мощности, доставляемой источником. Вычислить коэффициент передачи, т. е. отношение напряжения на $R_н$ к э. д. с. E.

Р е ш е н и е. 1. Рассчитаем ток $I_н$, проходящий через сопротивление $R_н$, и расходуемую в нем мощность $P_н$:

$$I_н = I_1 \frac{R_2}{R_2 + R_3 + R_н} = \frac{E}{R_1 + \dfrac{R_2 (R_3 + R_н)}{R_2 + R_3 + R_н}} \cdot \frac{R_2}{R_2 + R_3 + R_н} =$$

$$= \frac{ER_н}{R_1 (R_2 + R_3 + R_н) + R_2 (R_3 + R_н)}; \qquad (1)$$

$$P_н = I_н^2 R_н = \frac{E^2 R_2^2 R_н}{[R_1 (R_2 + R_3 + R_н) + R_2 (R_3 + R_н)]^2}. \qquad (2)$$

Для расчета максимальной мощности, выделяемой в нагрузке, возьмем производную от $P_н$ по $R_н$ и приравняем ее нулю. В результате получим

$$R_н = \frac{R_1R_2 + R_1R_3 + R_2R_3}{R_1 + R_2} = \frac{10 \cdot 40 + 10 \cdot 12 + 40 \cdot 12}{50} = 20 \text{ Ом}.$$

Подставляя найденное значение $R_н$ в (2), получим искомую величину максимальной мощности

$$P_{н\,max} = \frac{100^2 \cdot 40^2 \cdot 20}{(10 \cdot 72 + 40 \cdot 32)^2} = 80 \text{ Вт}.$$

Вычислим мощность P, доставляемую источником э. д. с.:

$$P = EI_1 = \frac{E}{R_1 + \dfrac{R_2 (R_3 + R_н)}{R_2 + R_3 + R_н}} = 360 \text{ Вт}.$$

Искомое отношение мощностей

$$\eta = P_{н\,max}/P = 80/360 = 0{,}222.$$

Напряжение на нагрузочном сопротивлении

$$U_н = I_н R_н = 2 \cdot 20 = 40 \text{ В}.$$

Коэффициент передачи

$$T = U_н/E = 40/100 = 0{,}4.$$

2. Часть схемы левее зажимов ab заменим эквивалентным источником напряжения с э. д. с. $E_{эк}$ и сопротивлением $R_{эк}$ (рис. 1.54, *б*). Найдем $E_{эк}$ и $R_{эк}$. Для вычисления $E_{эк}$ отключим ветвь $R_н$ (рис. 1.54, *в*) и определим напряжение U_{abx} между точками a и b в режиме холостого хода, которая численно равна $E_{эк}$:

$$U_{abx} = E_{эк} = I'R_2 = \frac{ER_2}{R_1 + R_2} = \frac{100 \cdot 40}{50} = 80 \text{ В}.$$

Сопротивление $R_{эк}$ равно сопротивлению цепи между зажимами a и b при закороченном источнике э. д. с. E (рис. 1.54, *г*):

$$R_{эк} = R_3 + \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = 12 + \frac{10 \cdot 40}{50} = 20 \text{ Ом}.$$

Как известно, в схеме, эквивалентной заданной (см. рис. 1.54, *б*), максимальная мощность выделится, если сопротивление нагрузки $R_н$ будет равно внутреннему сопротивлению источника, т. е. при $R_н = R_{эк} = 20$ Ом. Следовательно, получено то же значение, которое было найдено. Максимальная мощность

$$P_{н\,max} = I_н^2 R_н = \left(\frac{E_{эк}}{R_{эк} + R_н}\right)^2 R_н = \left(\frac{80}{40}\right)^2 20 = 80 \text{ Вт}.$$

1.56. К зажимам *1—1'* цепей рис. 1.10, *а* и *б* подведено напряжение $U_1 = 72$ В. При какой величине сопротивления R_2, подключенном к зажимам *2—2'*, в нем выделится максимальная мощность и чему она равна? Определить отношение мощностей, расходуемых в сопротивлении R_2, к мощности, доставляемой источником. Вычислить коэффициент передачи, т. е. отношение напряжения на сопротивлении R_2 к подведенному.

Ж. Входные и взаимные проводимости ветвей

1.57. Определить входные и взаимные проводимости ветвей схемы цепи рис. 1.55, необходимые для вычисления токов, если $R_1 =$

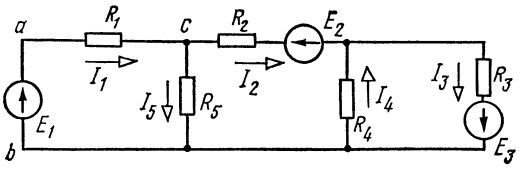


Рис. 1.55

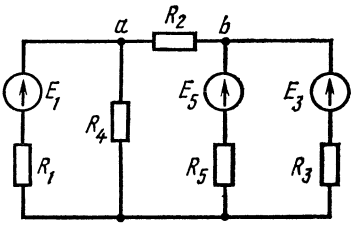


Рис. 1.56

$= 15$ Ом, $R_2 = 12$ Ом, $R_3 = 10$ Ом, $R_4 = 40$ Ом, $R_5 = 20$ Ом, $E_1 = 25$ В, $E_2 = 20$ В, $E_3 = 50$ В. Используя найденные значения проводимостей, вычислить все токи.

Вычислить входное (относительно зажимов ab) и взаимные (передаточные) сопротивления между первой и остальными ветвями.

1.58. В схеме рис. 1.56 известны $R_1 = 10$ Ом, $R_2 = 16$ Ом, $R_3 = 60$ Ом, $R_4 = R_5 = 40$ Ом, $E_1 = 120$ В, $E_3 = 150$ В, $E_5 = 80$ В. Рассчитать входные и взаимные проводимости и все токи.

ГЛАВА ВТОРАЯ

ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ЦЕПИ СИНУСОИДАЛЬНОГО ТОКА

ОСНОВНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ И СООТНОШЕНИЯ

1. **Мгновенное значение величины, синусоидально изменящейся с течением времени.**

$$a = A_m \sin(\omega t + \psi) = A_m \sin\left[\omega\left(t + \frac{\psi}{\omega}\right)\right], \qquad (2.1)$$

где A_m — максимальное значение, или амплитуда; $\omega t + \psi$ — фаза (фазовый угол); ψ — начальная фаза (начальный фазовый угол); ψ/ω — начальный фазовый сдвиг; ω — угловая частота.

Период T, угловая частота ω и частота f связаны соотношением

$$\omega = 2\pi f = 2\pi/T; \quad f = 1/T. \qquad (2.2)$$

По уравнению (2.1) на рис. 2.1, *а* построена синусоида, а на рис. 2.1, *б* соответствующая векторная диаграмма.

2. **Действующие значения синусоидально изменяющихся э. д. с., напряжения и тока**

$$E = E_m/\sqrt{2} = 0{,}707E_m, \quad U = U_m/\sqrt{2}, \quad I = I_m/\sqrt{2}. \qquad (2.3)$$

3. **Средние значения синусоидально изменяющихся э. д. с., напряжения и тока за положительную полуволну**

$$E_{ср} = \frac{2}{\pi}E = 0{,}637E_m, \quad U_{ср} = \frac{2}{\pi}U_m, \quad I_{ср} = \frac{2}{\pi}I_m. \qquad (2.4)$$

Среднее значение синусоидально изменяющейся величины $a = A_m \sin(\omega t + \psi)$ за целый период равно нулю.

4. **Изображение синусоидальной функции вращающимся вектором.** Проекция вращающегося против часовой стрелки с постоянной угловой скоростью ω вектора $\vec{A}_m$ (рис. 2.1, *б*) на вертикальную ось изменяется во времени по синусоидальному закону:

$$a = A_m \sin(\omega t + \psi).$$

Поэтому любая синусоидальная функция (ток, напряжение, э. д. с.) может быть изображена вектором.

5. **Изображение синусоидальной функции комплексным числом.** Если оси координат векторной диаграммы (рис. 2.1, *б*) считать осями комплексной плоскости, вектор $\vec{A}_m$ можно рассматривать как комплексную амплитуду $\underline{A}_m$ (рис. 2.1, *в*).

В курсе ТЛЭЦ используются следующие формы записи комплексного числа:

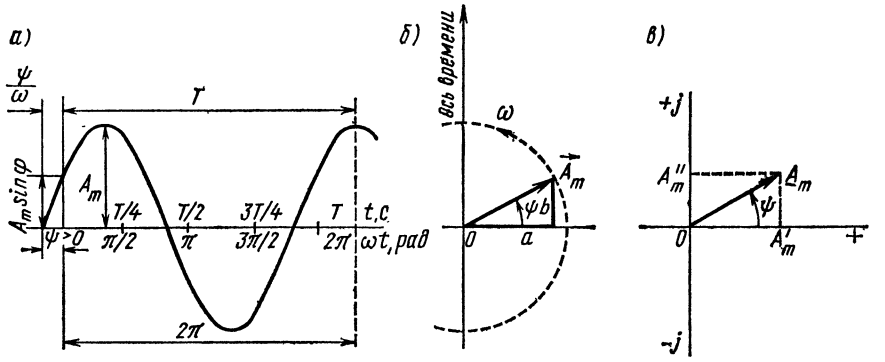


Рис. 2.1

алгебраическая $\underline{A}_m = A'_m + jA''_m$; (2.5а)

показательная $\underline{A}_m = A_m e^{j\psi}$; (2.5б)

тригонометрическая $\underline{A}_m = A_m \cos\psi + jA_m \sin\psi$. (2.5в)

Здесь $A'_m = A_m \cos\psi = \mathrm{Re}[\underline{A}_m]$* — действительная часть комплексного числа $\underline{A}_m$; $A''_m = A_m \sin\psi = \mathrm{Im}[\underline{A}_m]$* — мнимая часть комплексного числа; A_m — модуль комплексного числа; ψ — аргумент комплексного числа; $j = \sqrt{-1} = e^{j\frac{\pi}{2}}$ — мнимая единица или оператор поворота на угол $\pi/2 = 90°$ (умножение на j сводится к повороту вектора против часовой стрелки на прямой угол, а умножение на $-j = e^{-j\frac{\pi}{2}}$ — к повороту вектора на прямой угол по часовой стрелке).

Алгебраическая форма удобна при сложении и вычитании комплексных чисел, а показательная — при умножении, делении, возведении в степень, извлечении корня.

Переход от алгебраической формы к показательной производится по формулам

$$A_m = \sqrt{(A'_m)^2 + (A''_m)^2}; \quad \psi = \mathrm{arctg}\, A''_m / A'_m. \tag{2.6а}$$

Для обратного перехода используются формулы

$$A'_m = A_m \cos\psi; \quad A''_m = A_m \sin\psi. \tag{2.6б}$$

Формула Эйлера

$$e^{\pm j\alpha} = \cos\alpha \pm j \sin\alpha. \tag{2.7}$$

---

* Re и Im — сокращенные записи английских терминов real (реальный, действительный) и imaginary (мнимый) или соответствующих французских терминов reel (reelle) и imaginaire, а также немецких — real — imaginär.

Комплексное число $\underline{A}^* = A' - jA'' = Ae^{-j\psi}$ называется комплексно-сопряженным числу $\underline{A} = A' + jA'' = Ae^{j\psi}$. Произведение комплексно-сопряженных чисел — действительное число, равное квадрату их модуля:

$$\underline{A}\,\underline{A}^* = A^2. \tag{2.8}$$

Мгновенное значение синусоидальной функции равно мнимой части, изображающей ее комплексной амплитуды, умноженной на $e^{j\omega t}$:

$$a = \mathrm{Im}\,[\underline{A}_m e^{j\omega t}] = \mathrm{Im}\,[A_m e^{j(\omega t+\psi)}].$$

Символ мнимой части Im иногда опускают и последнее выражение записывают в форме $a \doteqdot \underline{A}_m e^{j\omega t}$, где $\doteqdot$ — знак соответствия.

Комплексное действующее значение связано с комплексной амплитудой равенством

$$\underline{A} = \underline{A}_m/\sqrt{2}. \tag{2.9}$$

6. Комплексные выражения синусоидальной функции времени, ее производной и интеграла см. в табл. 2.1.

Таблица 2.1

Временная и комплексная записи	Функция	Производная функции	Интеграл от функции
Запись во временной области	$a = A_m \sin(\omega t+\psi)$	$\frac{da}{dt} = \omega A_m \cos(\omega t+\psi)$	$\int_0^t a\,dt = -\frac{1}{\omega} \times$ $\times A_m \cos(\omega t+\psi)$
Комплексная функция времени*	$A_m e^{j(\omega t+\psi)}$	$\omega A_m e^{j\left(\omega t+\psi+\frac{\pi}{2}\right)}$	$\frac{1}{\omega} A_m e^{j\left(\omega t+\psi-\frac{\pi}{2}\right)}$
Комплексная амплитуда	$\underline{A}_m = A_m e^{j\psi}$	$j\omega\underline{A}_m$	$\frac{1}{j\omega}\underline{A}_m$
Комплексное действующее значение	$\underline{A} = Ae^{j\psi}$	$j\omega\underline{A}$	$\frac{1}{j\omega}\underline{A}$

* Значение ее мнимой части (без j) равно соответствующей гармонически изменяющейся величине.

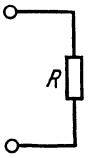
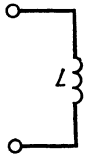
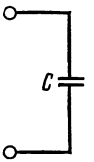
Например, для тока i, падения напряжения на активном сопротивлении u_R, индуктивности u_L и емкости u_C соответствующие комплексные амплитуды запишем так:

$$
\left.
\begin{aligned}
&i = I_m \sin(\omega t + \psi) \rightarrow I_m = I_m e^{j\psi};\\
&u_R = iR = RI_m \sin(\omega t + \psi) \rightarrow \underline{U}_R = RI_m;\\
&u_L = L\frac{di}{dt} = \omega L I_m \cos(\omega t + \psi) \rightarrow \underline{U}_L = j\omega L I_m;\\
&u_C = \frac{1}{C}\int_0^t i\,dt = -\frac{1}{\omega C}\cos(\omega t + \psi) \rightarrow \underline{U}_C = -j\frac{1}{\omega C} I_m.
\end{aligned}
\right\} \quad (2.10)
$$

Здесь стрелка → означает знак соответствия.

7. **Элементы электрической цепи переменного тока: пассивные и активные.** В табл. 2.2 приведены пассивные элементы, их изображения и обозначения, формы записи сопротивления и проводимости.

Таблица 2.2

Наименование элемента	Свойство элемента	Изображение и буквенное обозначение элемента	Сопротивление при синусоидальном токе	Запись сопротивления в комплексной форме	Проводимость при синусоидальном токе	Запись проводимости в комплексной форме
Резистор	Электрическое сопротивление		R	R	$G = 1/R$	$G = 1/R$
Индуктивная катушка	Индуктивность		$X_L = \omega L$	$\underline{Z}_L = j\omega L$	$B_L = 1/\omega L$	$\underline{Y}_L = \frac{1}{\underline{Z}_L} = -jB_L$
Конденсатор	Емкость		$X_C = 1/\omega C$	$\underline{Z}_C = \frac{1}{j\omega C} = -j\frac{1}{\omega C}$	$B_C = \omega C$	$\underline{Y}_C = \frac{1}{\underline{Z}_C} = jB_C$

Пассивный элемент электрической цепи (рис. 2.2, *а*) определяется своим комплексным сопротивлением $\underline{Z} = Ze^{j\varphi}$ — комплексным числом, равным отношению комплексного напряжения на зажимах данного элемента к комплексному току этого элемента:

$$\underline{Z} = \underline{U}/\underline{I} = R + jX = Ze^{j\varphi}, \quad (2.11)$$

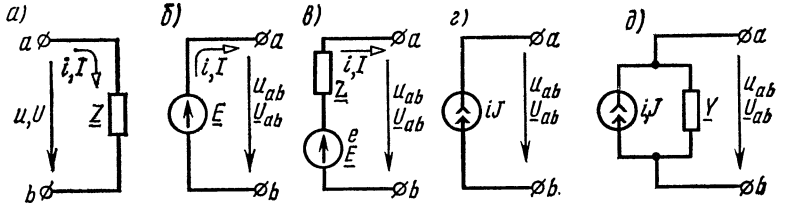


Рис. 2.2

где $\underline{U}$ и $\underline{I}$ — комплексные действующие значения напряжения и тока; R — вещественная часть комплексного сопротивления $\underline{Z}$, равная активному сопротивлению цепи; X — мнимая часть $\underline{Z}$, равная реактивному сопротивлению цепи; Z — модуль комплексного сопротивления цепи, равный полному сопротивлению цепи; φ — аргумент $\underline{Z}$, равный углу сдвига фаз между током и напряжением.

Отношение комплексного тока в данной цепи к комплексному напряжению на ее зажимах называется комплексной проводимостью электрической цепи:

$$\underline{Y} = \underline{I}/\underline{U} = G - jB = Ye^{-j\varphi}, \qquad (2.12)$$

где G — вещественная часть $\underline{Y}$, равная активной проводимости цепи; B — мнимая часть $\underline{Y}$, равная реактивной проводимости цепи; Y — модуль комплексной проводимости цепи, равный полной проводимости цепи; φ — аргумент $\underline{Y}$, равный углу сдвига фаз между напряжением и током, взятому с обратным знаком.

Комплексная проводимость обратна комплексному сопротивлению цепи:

$$\underline{Y} = 1/\underline{Z}. \qquad (2.13)$$

Активные элементы цепи синусоидального тока. Идеальный источник синусоидальной электродвижущей силы с э. д. с. $e = E_m \sin(\omega t + \psi)$ (его амплитуда E_m и начальная фаза ψ) можно полностью охарактеризовать, задав комплексную э. д. с. $\underline{E} = Ee^{j\psi}$ ($E = E_m/\sqrt{2}$) (рис. 2.2, *б*).

Источник синусоидальной э. д. с. (реальный, с внутренним сопротивлением) может быть изображен в виде схемы, содержащей последовательно соединенные э. д. с. $\underline{E}$ и внутреннее сопротивление $\underline{Z}$ (рис. 2.2, *в*).

Идеальный источник синусоидального тока $i = J_m \sin(\omega t + \psi)$ полностью определяется комплексной амплитудой тока J_m и начальной фазой ψ, его комплексный ток $\underline{J} = Je^{j\psi}$ ($J = J_m/\sqrt{2}$). Внутренняя проводимость идеального источника тока равна нулю, внутреннее сопротивление бесконечно велико (рис. 2.2, *г*).

Источник синусоидального тока (реальный, с внутренней проводимостью $\underline{Y}$) может быть изображен в виде схемы, содержащей параллельно соединенные источник тока $\underline{J}$ и внутреннюю проводимость $\underline{Y}$ (рис. 2.2, *д*). На рис. 2.2, *а* — *д* указаны положительные направления тока, э. д. с., напряжения.

Переход от схемы источника э. д. с. (рис. 2.2, *в*) к эквивалентному источнику тока (рис. 2.2, *д*) и обратно осуществляется по формулам

$$\underline{J} = \underline{E}/\underline{Z}, \quad \underline{Y} = 1/\underline{Z}. \tag{2.14}$$

8. Закон Ома. Для не содержащего э. д. с. участка цепи, сопротивление которого $\underline{Z}$ (рис. 2.2, *а*), закон Ома имеет вид

$$\underline{U} = \underline{U}_{ab} = -\underline{U}_{ba} = \underline{V}_a - \underline{V}_b = \underline{I}\,\underline{Z}. \tag{2.15 а}$$

Для ветви, содержащей э. д. с. и элементы сопротивлений (например, для ветви рис. 2.2, *в*),

$$\underline{I} = \frac{\underline{V}_b - \underline{V}_a + \underline{E}}{\underline{Z}_{ba}} = \frac{\underline{U}_{ba} + \underline{E}}{\underline{Z}} = \frac{\underline{E} - \underline{U}_{ab}}{\underline{Z}}. \tag{2.15 б}$$

Примеры приведены в задачах 2.24; 2.26; 2.29.

9. Законы Кирхгофа. Для записи уравнений по законам Кирхгофа надо выбрать положительные направления всех токов и обозначить их на схеме.

Первый закон Кирхгофа в применении к узлу электрической цепи для мгновенных и соответственно для комплексных токов имеет вид

$$\sum_{k=1}^{n} i_k = 0, \quad \sum_{k=1}^{n} \underline{I}_k = 0. \tag{2.16}$$

При записи этого уравнения токи, направленные от узла, следует писать со знаком плюс, а направленные к узлу — со знаком минус.

Второй закон Кирхгофа применяется к замкнутому контуру цепи и для мгновенных и соответственно комплексных падений напряжения и э. д. с. имеет вид

$$\sum_{k=1}^{n} (R_k i_k + u_{Lk} + u_{Ck}) = \sum_{k=1}^{n} e_k, \quad \sum_{k=1}^{n} \underline{I}_k \underline{Z}_k = \sum_{k=1}^{n} \underline{E}_k, \tag{2.17}$$

где $\sum_{k=1}^{n} \underline{I}_k \underline{Z}_k$ — падение напряжения на комплексных сопротивлениях $\underline{Z}_k$ отдельных участков. Со знаком плюс берутся те, для которых направление тока совпадает с направлением обхода, а со знаком минус — те, для которых направление тока противоположно направлению обхода контура; $\sum_{k=1}^{n} \underline{E}_k$ — алгебраическая сумма комплексных э. д. с. источников э. д. с. Со знаком плюс записываются те, положительные направления которых совпадают с выбранным направлением обхода

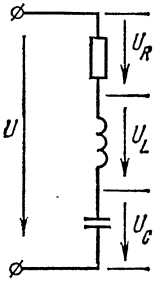


Рис. 2.3

контура; э. д. с., имеющие направления, противоположные обходу контура, записываются со знаком минус.

При составлении уравнений по второму закону Кирхгофа следует выбирать контуры, не содержащие источников тока.

Так, например, уравнение второго закона Кирхгофа для мгновенных значений напряжений и тока, проходящего в одноконтурной цепи, состоящей из последовательно соединенных R, L и C (рис. 2.3), имеет вид

$$u = u_R + u_L + u_C, \tag{2.18}$$

где $u_R = iR$ (2.19 а) — падение напряжения на резисторе;

$u_L = L\frac{di}{dt}$ (2.19 б) — падение напряжения на индуктивной катушке, причем $u_L = -e_L$, где э. д. с. самоиндукции $e_L = -L\frac{di}{dt}$, $i = \frac{1}{L}\int_0^t u_L dt + i(0)$, u_C — падение напряжения на конденсаторе, причем

$$i = C\frac{du_C}{dt}, \quad u_C = \frac{1}{C}\int_0^t i dt + u_C(0). \tag{2.19в}$$

Запись, соответствующая уравнению (2.18) в комплексной форме для действующих значений, будет иметь вид

$$\underline{U} = \left(R + j\omega L - j\frac{1}{\omega C}\right)\underline{I} = \underline{Z}\,\underline{I}.$$

Здесь

$$\left.\begin{aligned} \underline{Z} = R + j\omega L - j\frac{1}{\omega C} = R + j(X_L - X_C) = R + jX = \\ = \sqrt{R^2 + X^2}\, e^{j\varphi} = Ze^{j\varphi}, \end{aligned}\right\} \tag{2.20}$$

где $Z = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}$ — модуль комплексного сопротивления; $\varphi = \operatorname{arctg}\frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}$ — аргумент комплексного сопротивления.

Обращаем внимание на то, что X_L и X_C — положительные величины, а реактивное сопротивление $X = X_L - X_C$ может быть как положительным (при индуктивном характере ветви, когда $X_L > X_C$), так и отрицательным (при емкостном характере ветви, т. е. при $X_L < X_C$.)

Примеры приведены в задачах 2.31; 2.34.

10. Последовательное и параллельное соединение сопротивлений. При последовательном соединении участков цепи комплексное экви-

валентное сопротивление равно сумме комплексных сопротивлений отдельных участков:

$$\underline{Z} = \sum_{k=1}^{n} \underline{Z}_k. \qquad (2.21)$$

При параллельном соединении ветвей цепи комплексная эквивалентная проводимость равна сумме комплексных проводимостей ветвей:

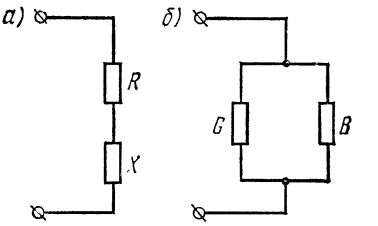


Рис. 2.4

$$\underline{Y} = \sum_{k=1}^{n} \underline{Y}_k. \qquad (2.22)$$

В частном случае двух параллельно соединенных сопротивлений $\underline{Z}_1$ и $\underline{Z}_2$ эквивалентное комплексное сопротивление

$$\underline{Z} = \frac{\underline{Z}_1 \underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2}. \qquad (2.23)$$

Комплексные токи в каждой из двух параллельных ветвей могут быть рассчитаны через комплексный ток в неразветвленной части цепи, а комплексные сопротивления ветвей по формулам

$$\underline{I}_1 = \underline{I}\,\frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2}, \quad \underline{I}_2 = \underline{I}\,\frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2}. \qquad (2.24)$$

11. Расчет цепей переменного тока посредством комплексных чисел. Эти расчеты остаются справедливыми для всех методов расчета, применяемых для расчета цепей постоянного тока (см. основные положения и соотношения, гл. 1, п. 4). При этом во всех уравнениях, приведенных в гл. 1, э. д. с., напряжения, потенциалы, токи, сопротивления и проводимости должны быть записаны в комплексной форме.

Примеры приведены в задачах 2.51; 2.54.

12. Комплексная мощность

$$\tilde{S} = \underline{U}\,\underline{I}^* = UI\cos\varphi + jUI\sin\varphi = P + jQ = Se^{j\varphi}, \qquad (2.25\,а)$$

где $S = UI$ — полная мощность;

$P = \mathrm{Re}[\tilde{S}] = \mathrm{Re}[\underline{U}\underline{I}^*] = UI\cos\varphi$ — активная мощность;

$Q = \mathrm{Im}[\underline{U}\underline{I}^*] = UI\sin\varphi$ — реактивная мощность;

$\underline{I}^*$ — сопряженный комплекс тока.

Баланс мощностей

$$\sum_{k=1}^{n} \left(\underline{E}_k \underline{I}_k^* + \underline{U}_k \underline{J}_k^*\right) = \sum_{k=1}^{n} \left[I_k^2 R_k + jI_k^2 (X_{Lk} - X_{Ck}). \right. \qquad (2.25\,б)$$

Здесь $\underline{U}_k$ — напряжение на источнике тока (оно определяется расчетом цепи внешней по отношению к зажимам источника тока); $\underline{J}_k^*$ — комплекс тока, сопряженный току источника тока $\underline{J}_k$;

$\sum_{k=1}^{n}(\underline{E}_k\underline{I}_k^*)$ — алгебраическая сумма; здесь положительны те же из слагаемых, для которых направления действия э. д. с. $\underline{E}_k$ и соответствующего тока $\underline{I}_k$ совпадают, в противном случае слагаемое отрицательно; $\sum_{k=1}^{n}(\underline{U}_k\underline{J}_k^*)$ — алгебраическая сумма; здесь положительны те из слагаемых, для которых напряжение на источнике тока $\underline{U}_k$ и его ток $\underline{J}_k$ совпадают по направлению (как, например, на рис. 2.2, *б*), в противном случае слагаемое отрицательно;

$\sum_{k=1}^{n}(I_k^2R_k)$ — арифметическая сумма; здесь должны быть учтены как внешние сопротивления, так и сопротивления самих источников энергии.

Примеры приведены в задачах 2.26; 2.51.

13. Переход от последовательной схемы (рис. 2.4, *а*) **к эквивалентной параллельной схеме** (рис. 2.4, *б*). Этот переход осуществляется по формулам

$$\left.\begin{aligned} G = \frac{R}{R^2+X^2} = \frac{R}{Z^2}, \quad B = \frac{X}{R^2+X^2} = \frac{X}{Z^2}; \\ Y = \sqrt{G^2+B^2} = \frac{1}{\sqrt{R^2+X^2}} = \frac{1}{Z}. \end{aligned}\right\} \qquad (2.26а)$$

При переходе от параллельной схемы (рис. 2.4, *б*) к эквивалентной последовательной (рис. 2.4, *а*) ее параметры определяются по формулам

$$\left.\begin{aligned} R = \frac{G}{G^2+B^2} = \frac{G}{Y^2}; \quad X = \frac{B}{G^2+B^2} = \frac{B}{Y^2}; \\ Z = \sqrt{R^2+X^2} = \frac{1}{\sqrt{G^2+B^2}} = \frac{1}{Y}. \end{aligned}\right\} \qquad (2.26б)$$

14. Частотные характеристики. Единицы измерения частотного интервала. Отношение двух комплексных величин $\underline{A}(j\omega)$ и $\underline{B}(j\omega)$, зависящих от частоты, может быть представлено в одной из следующих двух форм.

а. При небольших изменениях амплитуд — непосредственно отношением соответствующих комплексных величин:

$$\underline{T}(j\omega) = \underline{A}(j\omega)/\underline{B}(j\omega) = A(\omega)\,e^{j\alpha(\omega)}/B(\omega)\,e^{j\beta(\omega)} = T(\omega)\,e^{j\theta(\omega)}, \qquad (2.27)$$

где $T(\omega) = A(\omega)/B(\omega)$ — отношение модулей комплексных величин, которое выражает амплитудно-частотную характеристику (АЧХ);

$\theta(\omega) = \alpha(\omega) - \beta(\omega)$ — аргумент $\underline{T}(j\omega)$, выражающий его фазочастотную характеристику (ФЧХ).

Наряду с фазочастотной характеристикой используется и «характеристика запаздывания». Запаздывание характеризует наклон ФЧХ в какой-либо точке и определяется как первая производная ФЧХ:

$$\tau_з(\omega) = d\theta(\omega)/d\omega. \qquad (2.28)$$

б. При изменениях амплитуд в широких пределах пользуются логарифмическим масштабом, для чего вводятся логарифмические единицы измерения — децибел и непер:

$$D(\omega) = 20 \lg A(\omega)/B(\omega), \text{ дБ}; \qquad (2.29\text{а})$$

или

$$N(\omega) = \ln A(\omega)/B(\omega), \text{ Нп}. \qquad (2.29\text{б})$$

Для перевода децибелов в неперы и обратно служат соотношения

$$1\text{дБ} = 0{,}115 \text{ Нп или } 1 \text{ Нп} = 8{,}69 \text{ дБ}. \qquad (2.30)$$

В технике электрической связи для расчета модулей двух комплексов одной и той же величины при двух разных частотах используют еще и следующие понятия: октава и декада — единицы измерения частотного интервала.

О к т а в а равна интервалу между двумя частотами, логарифм отношения которых при основании 2 равен единице, что соответствует отношению частот, равному двум.

Д е к а д а равна интервалу между двумя частотами, десятичный логарифм отношения которых равен единице, что соответствует отношению частот, равному десяти.

Число децибел на октаву — это величина, равная двадцати десятичных логарифма отношения модулей одной и той же величины при изменении частоты в 2 раза:

$$D(\omega)_{\text{окт}} = 20 \lg A(2\omega)/A(\omega), \text{ дБ/окт}$$

или

$$N(\omega)_{\text{окт}} = \ln A(2\omega)/A(\omega), \text{ Нп/окт}. \qquad (2.31)$$

Если задан интервал частот ω/ω_0, то согласно определению число октав D может быть найдено из формулы $\omega_1/\omega_0 = 2^D$, откуда $D = \log_2\omega_1/\omega_0 = 3{,}32 \lg\omega_1/\omega_0$ октав.

Число децибел на декаду — это величина, равная двадцати десятичных логарифма отношения модулей одной и той же величины при изменении частоты в 10 раз:

$$D(\omega)_{\text{дек}} = 20 \lg A(10\omega)/A(\omega), \text{ дБ/дек}$$

или

$$N(\omega)_{\text{дек}} = \ln A(10\omega)/A(\omega), \text{ Нп/дек}. \qquad (2.32)$$

Из приведенных формул следует, что 1 декада = 3,32 октавы, а 1 октава = 0,301 декады.

Пример приведен в задаче 2.62.

15. Трехфазные цепи. Мгновенные значения и комплексы трехфазной симметричной системы напряжений имеют вид

$$u_A = U_m \sin \omega t; \quad \underline{U}_A = U;$$

$$u_B = U_m \sin(\omega t - 2\pi/3); \quad \underline{U}_B = U e^{-j\frac{2\pi}{3}}; \tag{2.33}$$

$$u_C = U_m \sin(\omega t - 4\pi/3); \quad \underline{U}_C = U e^{-j\frac{4\pi}{3}}.$$

Соотношения в симметричной трехфазной цепи. В симметричной трехфазной цепи комплексные сопротивления составляющих ее фаз одинаковы.

Для симметричной трехфазной системы при соединении звездой существуют следующие зависимости между линейными и фазными напряжениями и токами:

$$U_л = \sqrt{3}\, U_ф; \quad I_л = I_ф. \tag{2.34 а}$$

Для симметричной трехфазной системы при соединении треугольником линейные и фазные напряжения и токи связаны соотношениями

$$U_л = U_ф; \quad I_л = \sqrt{3}\, I_ф. \tag{2.34 б}$$

Мощность в симметричной трехфазной системе

$$P = \sqrt{3} U_л I_л \cos \varphi_ф = 3 U_ф I_ф \cos \varphi_ф. \tag{2.35}$$

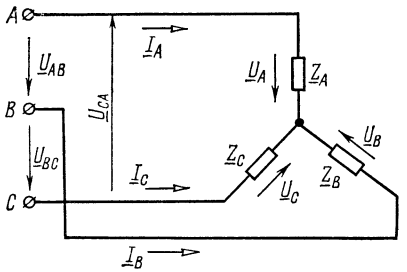


Рис. 2.5

Расчеты несимметричных трехфазных цепей могут быть проведены с помощью законов Кирхгофа или любого метода расчета электрических цепей.

Если к трехфазному генератору, соединенному звездой, подключен приемник энергии, также соединенный звездой, то смещение нейтрали — напряжение $\underline{U}_N$ между нейтральными (нулевыми) точками приемника и генератора — определяется по формуле

$$\underline{U}_N = \frac{\underline{U}_A \underline{Y}_A + \underline{U}_B \underline{Y}_B + \underline{U}_C \underline{Y}_C}{\underline{Y}_A + \underline{Y}_B + \underline{Y}_C + \underline{Y}_N}, \tag{2.36}$$

где $\underline{U}_A$, $\underline{U}_B$, $\underline{U}_C$ — фазные напряжения генератора; $\underline{Y}_A$, $\underline{Y}_B$, $\underline{Y}_C$, $\underline{Y}_N$ — проводимости отдельных фаз и нейтрального (нулевого) провода.

Токи в фазах и нейтральном проводе:

$$\left.\begin{aligned} \underline{I}_A &= (\underline{U}_A - \underline{U}_N)\underline{Y}_A; \quad \underline{I}_B = (\underline{U}_B - \underline{U}_N)\underline{Y}_B; \\ \underline{I}_C &= (\underline{U}_C - \underline{U}_N)\underline{Y}_C; \quad \underline{I}_N = \underline{U}_N\underline{Y}_N = \underline{I}_A + \underline{I}_B + \underline{I}_C. \end{aligned}\right\} \quad (2.37)$$

Если нагрузка соединена звездой без нейтрального (нулевого) провода и известны линейные напряжения $\underline{U}_{AB}$, $\underline{U}_{BC}$, $\underline{U}_{CA}$, то фазные напряжения $\underline{U}_A$, $\underline{U}_B$, $\underline{U}_C$ (рис. 2.5) нагрузки находят по формулам

$$\left.\begin{aligned} \underline{U}_A &= \frac{\underline{U}_{AB}\underline{Y}_B - \underline{U}_{CA}\underline{Y}_C}{\underline{Y}_A + \underline{Y}_B + \underline{Y}_C}; \\ \underline{U}_B &= \frac{\underline{U}_{BC}\underline{Y}_C - \underline{U}_{AB}\underline{Y}_A}{\underline{Y}_A + \underline{Y}_B + \underline{Y}_C}; \\ \underline{U}_C &= \frac{\underline{U}_{CA}\underline{Y}_A - \underline{U}_{BC}\underline{Y}_B}{\underline{Y}_A + \underline{Y}_B + \underline{Y}_C}, \end{aligned}\right\} \quad (2.38)$$

где $\underline{Y}_A$, $\underline{Y}_B$, $\underline{Y}_C$ — проводимости фаз.

Для любой трехфазной системы сумма комплексных линейных напряжений равна нулю: $\underline{U}_{AB} + \underline{U}_{BC} + \underline{U}_{CA} = 0$.

Пример приведен в задаче 2.74.

УПРАЖНЕНИЯ И ЗАДАЧИ

А. Мгновенные значения синусоидального тока, напряжения, мощности. Последовательное и параллельное соединение элементов

2.1. Построить кривые изменения напряжения и тока во времени и начертить векторы, изображающие заданные синусоидальные функции:

$$u = 100 \sin\left(157t + \frac{\pi}{10}\right) \text{ В}; \quad i = 5 \sin\left(157t - \frac{\pi}{8}\right) \text{ А}.$$

Чему равен сдвиг фаз между напряжением и током? Определить период, частоту, моменты начала положительных полуволн напряжения и тока. Какой вид примут уравнения для заданных напряжения и тока, если фазу, равную нулю, принять для тока? Для этого случая построить синусоиды напряжения и тока, векторную диаграмму.

Р е ш е н и е. Синусоиды u и i и соответствующие им векторы изображены на рис. 2.6, *а*.

Период

$$T = 2\pi/\omega = 2 \cdot 3{,}14/157 = 0{,}04 \text{ с}$$

и частота

$$f = 1/T = 1/0{,}04 = 25 \text{ Гц}.$$

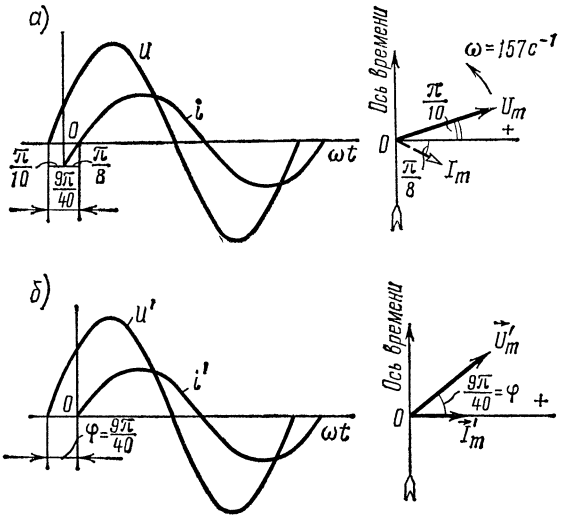


Рис. 2.6

Ток по фазе отстает от напряжения на угол

$$\varphi = \pi/10 - (-\pi/8) = 9\pi/40 \text{ рад } (40°30').$$

Моменты начала положительной полуволны напряжения и тока:

$$t' = \frac{-\frac{\pi}{10}}{\omega} = -\frac{1}{20} \cdot \frac{2\pi}{\omega} = -\frac{T}{20} = -0{,}002 \text{ с} = -2 \text{ мс};$$

$$t'' = \frac{\frac{\pi}{8}}{\omega} = \frac{1}{16} \cdot \frac{2\pi}{\omega} = \frac{T}{16} = 0{,}0025 \text{ с} = 2{,}5 \text{ мс}.$$

При начальной фазе тока, равной нулю, уравнения для напряжения и тока примут вид

$$u' = 100 \sin\left(157t + \frac{9\pi}{40}\right) \text{ В}; \quad i' = 5 \sin(157t) \text{ А}.$$

Кривые u', i' и соответствующие им векторы $\vec{U}'_m$ и $\vec{I}'_m$ изображены на рис. 2.6, *б*.

2.2 Напряжения и токи изменяются во времени по следующим законам:

а) $u_1 = 300 \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{4}\right)$ В, $i_1 = 10 \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{6}\right)$ А, $\omega = 314$ с$^{-1}$,

б) $i_2 = 5 \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{3}\right)$ мА, $i_3 = 3 \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{3}\right)$ мА, $\omega = 6{,}28 \times 10^5$ с$^{-1}$.

Построить векторные диаграммы и графики изменения напряжений и токов. Для каждого из случаев найти сдвиг фаз между соответствующей парой синусоидальных функций.

Принимая фазу, равную нулю, для u_1 (см. п. а), i_3 (см. п.б) написать уравнения и построить графики напряжений и токов. Для каждого из указанных случаев построить векторы, изображающие соответствующие синусоиды. Найти период, частоту и моменты начала положительных полуволн напряжения и тока.

2.3. Катушка с активным сопротивлением $R = 10$ Ом, индуктивностью $L = 0{,}05$ Гн подключена к источнику синусоидального напряжения, действующее значение которого $U = 120$ В, а частота $f = 50$ Гц.

Определить полное сопротивление катушки, ток и сдвиг фаз между напряжением и током. Чему равны активная, реактивная и полная мощности?

Вычислить активную и реактивную составляющие напряжения на зажимах катушки. Чему равна э. д. с. самоиндукции, наводимая в катушке? Построить векторную диаграмму напряжений и тока.

Р е ш е н и е. $X_L = \omega L = 2\pi \cdot 50 \cdot 0{,}05 = 15{,}7$ Ом;

$$Z = \sqrt{R^2 + (\omega L)^2} = \sqrt{10^2 + 15{,}7^2} = 18{,}6 \text{ Ом};$$

$$\operatorname{tg}\varphi = \omega L/R = 1{,}57, \quad \varphi = 57^\circ 30';$$

$$I = U/Z = 120/18{,}6 = 6{,}45 \text{ А};$$

$$P = I^2R = 6{,}45^2 \cdot 10 = 416 \text{ Вт};$$

$$Q = I^2X_L = 6{,}45^2 \cdot 15{,}7 = 653 \text{ вар};$$

$$S = I^2Z = 6{,}45^2 \cdot 18{,}6 = 773 \text{ В} \cdot \text{А};$$

$$U_R = IR = 6{,}45 \cdot 10 = 64{,}5 \text{ В};$$

$$U_L = IX_L = 6{,}45 \cdot 15{,}7 = 103 \text{ В}; \quad E_L = -U_L = -103 \text{ В}.$$

Векторная диаграмма приведена на рис. 2.7.

2.4. Для определения активного сопротивления R и индуктивности L катушки в цепь переменного тока с частотою $f = 50$ Гц были присоединены вольтметр, амперметр и ваттметр (рис. 2.8). Приборы дали следующие показания: $U = 65$ В, $I = 5$ А, $P = 128$ Вт. Определить активное сопротивление и индуктивность катушки.

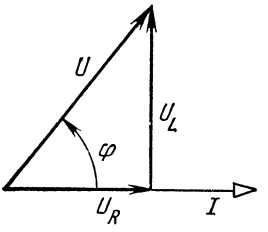


Рис. 2.7

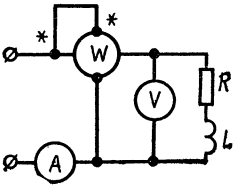


Рис. 2.8

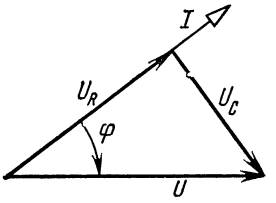


Рис. 2.9

2.5. При включении индуктивной катушки в цепь постоянного тока амперметр показал 2,5 А, а вольтметр — 30 В. Затем ту же катушку включили в цепь переменного тока частотой $f = 5$ кГц. При этом вольтметр показал 120 В, а амперметр — 6 А. Чему равны активное сопротивление R и индуктивность L катушки?

2.6. К последовательно соединенным реостату сопротивлением $R = 120$ Ом и конденсатору емкостью $C = 30$ мкФ подведено напряжение $u = 311\sin 314t$ В.

Вычислить полное сопротивление цепи, действующие значения напряжения и тока, мощность, расходуемую в цепи, реактивную мощность и разность фаз напряжения и тока. Построить векторную диаграмму напряжений и тока.

Р е ш е н и е.

$$X_C = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{314 \cdot 30 \cdot 10^{-6}} = 106 \text{ Ом};$$

$$Z = \sqrt{R^2 + X_C^2} = \sqrt{120^2 + 106^2} = 160 \text{ Ом};$$

$$U = 311/\sqrt{2} = 220 \text{ В}; \quad I = U/Z = 220/160 = 1{,}37 \text{ А};$$

$$U_R = IR = 165 \text{ В}; \quad U_C = IX_C = 145 \text{ В};$$

$$P = I^2R = 1{,}37^2 \cdot 120 = 226 \text{ Вт};$$

$$Q = -I^2X_C = -1{,}37^2 \cdot 106 = -210 \text{ вар};$$

$$\operatorname{tg}\varphi = -X_C/R = -106/120 = -0{,}885; \quad \varphi = -41^\circ 30'.$$

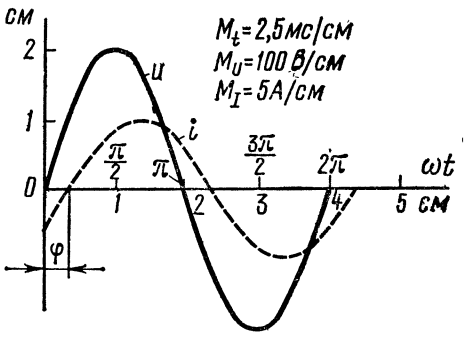


Рис. 2.10

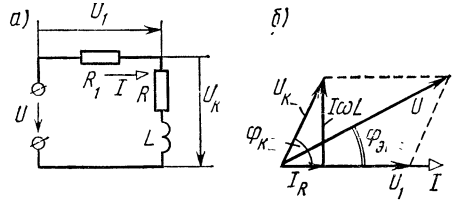


Рис. 2.11

Векторная диаграмма приведена на рис. 2.9.

2.7. С помощью осциллографа были сняты кривые напряжения u и тока i на входе пассивного двухполюсника (рис. 2.10). Чему равна частота переменного тока, если масштаб времени $M_t = 2{,}5$ мс/см? Определить, из каких эквивалентных элементов состоит двухполюсник и чему равны его параметры. Масштабы для напряжения и тока соответственно равны: $M_U = 100$ В/см; $M_I = 5$ А/см.

2.8.* Последовательно с реостатом, имеющим сопротивление $R_1 = 20$ Ом, включена катушка, параметры которой $R = 6{,}7$ Ом

* Задачи 2.8 — 2.20 могут быть также решены с помощью комплексных чисел.

и $L = 42{,}7$ мГн (рис. 2.11, *а*). Определить ток в цепи, разность фаз между напряжением и током, напряжения на реостате и катушке, а также сдвиг фаз между напряжением источника и напряжением на катушке, если $U = 220$ В. Частота переменного тока $f = 50$ Гц. Вычислить активную, реактивную и полную мощности катушки. Построить векторную диаграмму.

Р е ш е н и е.

$$\omega L = 2\pi \cdot 50 \cdot 42{,}7 \cdot 10^{-3} = 13{,}4 \text{ Ом};$$

$$Z_к = \sqrt{R^2 + (\omega L)^2} = \sqrt{6{,}7^2 + 13{,}4^2} = 15 \text{ Ом};$$

$$Z_{эк} = \sqrt{(R_1 + R)^2 + (\omega L)^2} = \sqrt{26{,}7^2 + 13{,}4^2} = 29{,}9 \text{ Ом}.$$

Ток в цепи

$$I = U/Z_{эк} = 220/29{,}9 = 7{,}35 \text{ А}.$$

Разность фаз между напряжением и током определяют из соотношения

$$\operatorname{tg} \varphi_{эк} = \omega L/(R + R_1) = 13{,}4/26{,}7 = 0{,}5, \quad \varphi_{эк} = 26^\circ 30'.$$

Напряжения на реостате и катушке

$$U_1 = IR_1 = 7{,}35 \cdot 20 = 147 \text{ В},$$

$$U_к = IZ_к = 7{,}35 \cdot 15 = 110 \text{ В}.$$

Сдвиг фаз между напряжением источника и напряжением на катушке φ найдется как разность фазовых углов $\varphi_к$ и $\varphi_{эк}$ (см. векторную диаграмму рис. 2.11, *б*):

$$\operatorname{tg} \varphi_к = \omega L/R = 13{,}4/6{,}7 = 2; \quad \varphi_к = 63^\circ 30';$$

$$\varphi = \varphi_к - \varphi_{эк} = 63^\circ 30' - 26^\circ 30' = 37^\circ.$$

Активная, реактивная и полная мощности катушки

$$P_к = I^2R = 7{,}35^2 \cdot 6{,}7 = 362 \text{ Вт}; \quad Q_к = I^2\omega L =$$

$$= 7{,}35^2 \cdot 13{,}4 = 724 \text{ вар}; \quad S_к = U_к I = 110 \cdot 7{,}35 = 808 \text{ В·А}.$$

2.9. По показаниям трех вольтметров, включенных в цепь (рис. 2.12), определить мощность, расходуемую в индуктивной катушке R, L, если $R_1 = 20$ Ом, а показания приборов равны $U = 120$ В, $U_1 = 80$ В, $U_2 = 60$ В.

Указание. Задачу проще всего решить, если вначале построить векторную диаграмму.

2.10. К цепи, состоящей из последовательно соединенных резистора сопротивлением $R = 3$ Ом, катушки, индуктивность которой $L = 8$ мГн, и конденсатора $C = 15$ мкФ (рис. 2.13, *а*), подключено напряжение $U = 20$ В с частотой $f = 500$ Гц. Найти ток, напряжение на каждом элементе цепи и мощность, расходуемую в ней. Построить векторную диаграмму.

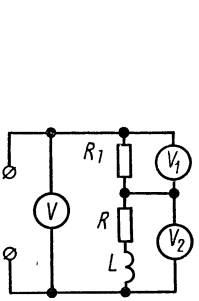


Рис. 2.12

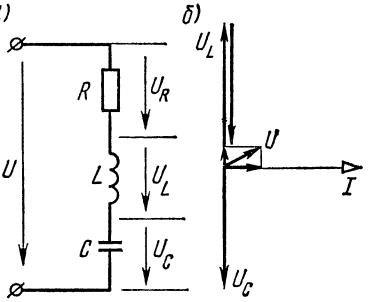


Рис. 2.13

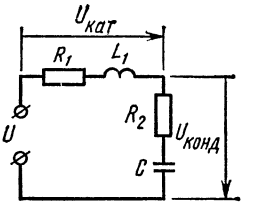


Рис. 2.14

Р е ш е н и е. Сопротивления элементов цепи

$$X_L = \omega L = 2\pi \cdot 500 \cdot 8 \cdot 10^{-3} = 25{,}2 \text{ Ом};$$

$$X_C = 1/\omega C = 1/(2\pi \cdot 500 \cdot 15 \cdot 10^{-6}) = 21{,}2 \text{ Ом};$$

$$Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} = \sqrt{3^2 + (25{,}2 - 21{,}2)^2} = 5 \text{ Ом}.$$

В цепи проходит ток

$$I = U/Z = 20/5 = 4 \text{ А},$$

который по фазе отстает от напряжения на угол φ, определяемый из соотношения

$$\operatorname{tg}\varphi = (X_L - X_C)/R = 4/3 = 1{,}333; \quad \varphi = 53^\circ 10'.$$

Вычислим напряжения на резисторе, катушке и конденсаторе:

$$U_R = IR = 4 \cdot 3 = 12 \text{ В}; \quad U_L = IX_L = 4 \cdot 25{,}2 \approx 101 \text{ В};$$

$$U_C = IX_C = 4 \cdot 21{,}2 \approx 85 \text{ В}.$$

В цепи расходуется мощность

$$P = UI \cos\varphi = 20 \cdot 4 \cos 53^\circ 10' = 48 \text{ Вт}.$$

На рис. 2.13, *б* приведена векторная диаграмма.

2.11. Индуктивная катушка, параметры которой $R_1 = 10{,}5$ Ом, $L = 382$ мкГн, и конденсатор (с потерями), эквивалентные параметры которого $R_2 = 3{,}5$ Ом, $C = 0{,}533$ мкФ, соединены последовательно (рис. 2.14). Какое напряжение U приложено к цепи, если амперметр показал ток $I = 2{,}4$ А? Частота переменного тока $f = 5$ кГц. Определить напряжение на катушке $U_{кат}$ и конденсаторе с потерями $U_{конд}$, а также мощность, расходуемую в каждом из этих элементов. Построить векторную диаграмму напряжений и тока.

Чему равны добротность катушки и добротность конденсатора? Определить угол потерь конденсатора.

Замечание. Напомним, что добротностью катушки называется величина, равная отношению $Q_L = \omega L/R_1$, а добротностью конденсатора — $Q_C = \dfrac{1}{\omega C R_2}$.

Углом потерь называют угол $\delta = \pi/2 - |\varphi|$, где φ — разность фаз тока и напряжения на конденсаторе с потерями.

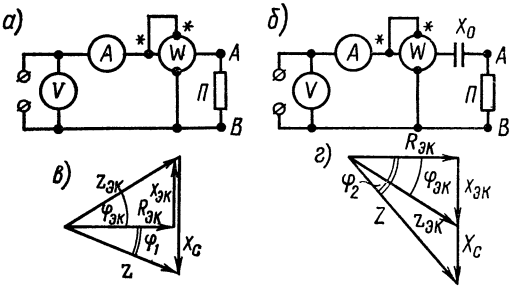


Рис. 2.15

2.12. Для определения параметров эквивалентной схемы пассивного двухполюсника AB (рис. 2.15, *а*) были измерены напряжение $U_1 = 26$ В, ток $I_1 = 4$ А и мощность $P = 40$ Вт. Для определения характера эквивалентного реактивного сопротивления этого двухполюсника последовательно с ним включили конденсатор (рис. 2.15, *б*); в этом случае при том же приложенном напряжении приборы показали $I_2 = 5{,}53$ А и $P = 76{,}5$ Вт. Частота переменного тока $f = 50$ Гц. Определить параметры эквивалентной схемы двухполюсника.

Р е ш е н и е. Параметры эквивалентной схемы двухполюсника

$$R_{эк} = P/I_1^2 = 40/4^2 = 2{,}5 \text{ Ом}; \quad Z_{эк} = U_1/I_1 = 26/4 = 6{,}5 \text{ Ом};$$

$$|X_{эк}| = \sqrt{Z_{эк}^2 - R_{эк}} = \sqrt{6{,}5^2 - 2{,}5^2} = 6 \text{ Ом}.$$

Из данных второго опыта найдем

$$Z = U_1/I_2 = 26/5{,}53 = 4{,}7 \text{ Ом},$$

$$|X| = \sqrt{Z^2 - R_{эк}^2} = \sqrt{4{,}7^2 - 2{,}5^2} = 4 \text{ Ом}.$$

При неизменном напряжении, подключенном к цепи, и постоянном активном сопротивлении ток I_2 оказался больше тока I_1. Введенное дополнительное емкостное сопротивление уменьшает общее реактивное сопротивление цепи. Это значит, что $X_{эк}$ имеет индуктивный характер. Величина $L_{эк} = X_{эк}/\omega = 6/314 = 19{,}1$ мГн.

Неизвестную величину дополнительно введенного емкостного сопротивления X_C можно определить следующим путем. Было установлено, что $X_{эк} = \pm 6$ Ом, а так как характер полного реактивного сопротивления заранее не известен, то $X = +4$ Ом либо $X = -4$ Ом. Из данных второго опыта следует, что $-X_C + X_{эк} = X$, отсюда получаем, что $X_C = 2$ Ом или $X_C = 10$ Ом.

Укажем, что для определения характера эквивалентного реактивного сопротивления двухполюсника $X_{эк}$ неизвестная величина дополнительно вводимого емкостного сопротивления X_C должна быть меньше $2X_{эк}$. Это можно видеть из рис. 2.15, *в* и *г*, на которых начерчены векторные диаграммы сопротивлений, соответствующие второму опыту. Для $X_{эк} > 0$ и при $|X_C| < |2X_{эк}|$ $|\varphi_1| < |\varphi_{эк}|$ (рис. 2.15, *в*), а при $X_{эк} < 0$ $|\varphi_2| > |\varphi_{эк}|$ (рис. 2.15, *г*). Если взять $|X_C| > |2X_{эк}|$, то каждый из углов $|\varphi_1|$ и $|\varphi_2|$ будет больше $|\varphi_{эк}|$.

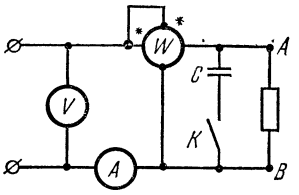


Рис. 2.16

Если величина дополнительно вводимого сопротивления X_C заранее известна, то она может быть взята и более $2X_{эк}$.

2.13. Решить предыдущую задачу по данным опытов в двух случаях:

1) первый опыт: $U_1 = 120$ В, $I_1 = 4{,}3$ А, $P_1 = 370$ Вт;
второй опыт: $U_2 = 120$ В, $I_2 = 1{,}31$ А, $P_2 = 34{,}4$ Вт;

2) первый опыт: $U_1 = 120$ В, $I_1 = 4{,}3$ А, $P_1 = 370$ Вт;
второй опыт: $U_2 = 120$ В, $I_2 = 2{,}21$ А, $P_2 = 97,8$ Вт.

При проведении вторых опытов каждый раз вводилось емкостное сопротивление, равное 70 Ом.

2.14. Приборы, подключенные к пассивному двухполюснику AB (на рис. 2.16 контакт K разомкнут), показали $U_1 = 100$ В, $I_1 = 2$ А, $P_1 = 160$ Вт. Для определения характера реактивного сопротивления двухполюсника параллельно ему был подключен конденсатор (контакт K замкнут), емкостное сопротивление которого $1/\omega C = 100$ Ом, при этом приборы показали: $U_2 = 100$ В, $I_2 = 2{,}73$ А, $P_2 = 160$ Вт. Определить эквивалентные параметры двухполюсника.

Р е ш е н и е. Сопротивления последовательной схемы двухполюсника:

$$R = P/I^2 = 160/2^2 = 40 \text{ Ом}, \quad Z = U/I = 100/2 = 50 \text{ Ом},$$

$$|X| = \sqrt{Z^2 - R^2} = \sqrt{50^2 - 40^2} = 30 \text{ Ом}.$$

Параметры его параллельной схемы по (2.26 а) равны:

$$G = \frac{40}{40^2 + 30^2} = 0{,}016 \text{ См}; \quad |B| = \frac{30}{40^2 + 30^2} = 0{,}012 \text{ См}.$$

Проводимость конденсатора $B_C = \omega C = 0{,}010$ См.

Параметры эквивалентной схемы, состоящей из двухполюсника и конденсатора:

$$R_{эк} = 160/2{,}73^2 = 21{,}6 \text{ Ом}; \quad Z_{эк} = 100/2{,}73 = 36{,}7 \text{ Ом};$$

$$X_{эк} = \sqrt{36{,}7^2 - 21{,}6^2} = 29{,}7 \text{ Ом}; \quad G_{эк} = \frac{21{,}6}{21{,}6^2 + 29{,}7^2} = 0{,}016 \text{ См};$$

$$|B_{эк}| = \frac{29{,}7}{21{,}6^2 + 29{,}7^2} = 0{,}22 \text{ См}.$$

Так как $|B_{эк}| = |B| + B_C$, то реактивное сопротивление исследуемого двухполюсника имеет емкостный характер. Тот же результат вытекает и из следующих соображений. Так как при том же напряжении U ток после подключения конденсатора стал больше, чем до подключения, то общая проводимость цепи увели-

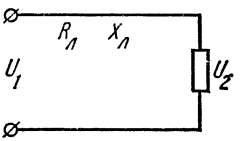


Рис. 2.17

чилась. Это может быть в том случае, когда реактивная проводимость подключаемой ветви B_C имеет тот же характер, что и заданная реактивная проводимость B двухполюсника, при условии, что $|B_C| < |2B|$.

2.15. Линия передачи электрической энергии (рис. 2.17) обладает активным сопротивлением $R_л = 15$ Ом и индуктивностью $L = 0{,}191$ Гн. В конце этой линии присоединен приемник энергии, потребляющий мощность $P = 84$ кВт при напряжении $U_2 = 5{,}1$ кВ и $\cos\varphi_2 = 0{,}8$ ($\varphi_2 > 0$). Частота тока $f = 50$ Гц. Определить напряжение источника U_1, подключенного к началу линии, а также падение напряжения и потерю напряжения в линии. Чему равен к. п. д. линии передачи электрической энергии?

2.16. Генератор, питающий линию передачи электрической энергии, отдает мощность $P_1 = 27$ кВт. Напряжение генератора $U_1 = 3$ кВ. Параметры линии передачи: $R_л = 20$ Ом, $X_л = 60$ Ом. Мощность, потребляемая приемником, подключенным в конце линии, $P_2 = 22{,}5$ кВт. Определить параметры приемника.

2.17. Линия передачи имеет активное сопротивление $R_л = 2$ Ом, индуктивное $X_л = 4{,}8$ Ом. Напряжение в начале линии $U_1 = 1{,}1$ кВ.

Определить, при каком сопротивлении приемника, для которого отношение $X_{пр}/R_{пр} = 3$, в нем будет расходоваться максимальная мощность, и вычислить ее величину.

К той же линии подключен приемник с постоянным активным сопротивлением $R_{пр} = 20$ Ом и изменяющимся реактивным сопротивлением $X_{пр}$. При какой величине $X_{пр}$ приемник поглотит максимальную мощность и какова ее величина?

Определить наибольшую мощность, которую вообще можно получить при передаче по заданной линии, т. е. полагать, что могут изменяться $R_{пр}$ и $X_{пр}$.

Указание. Если $\varphi_{пр} = \text{const}$, то мощность максимальна при $Z_{пр} = Z_л$:

$$P'_{пр\,max} = \frac{U_1^2 \cos\varphi_{пр}}{2Z_л[1 + \cos(\varphi_л - \varphi_{пр})]}.$$

При изменении только реактивного сопротивления приемника в нем выделяется максимальная мощность при условии $X_{пр} = -X_л$, а ее величина

$$P''_{пр} = \frac{U_1^2 R_{пр}}{(R_л + R_{пр})^2}.$$

Наибольшая мощность, которую можно получить в приемнике, будет, если сопротивление приемника сопряжено с сопротивлением линии, т. е. $R_{пр} = R_л$ и $X_{пр} = -X_л$. Величина этой мощности

$$P_{пр\,max} = U_1^2/4R_л.$$

Укажем, что те же условия сохраняются при передаче мощности во внешнюю цепь генератора с постоянной э. д. с. и постоянным внутренним сопротивлением $Z_{вт}$.

2.18. По показаниям трех амперметров, включенных в цепь (рис. 2.18), определить мощность, расходуемую в ветви, состоящей

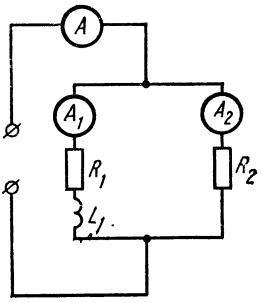


Рис. 2.18

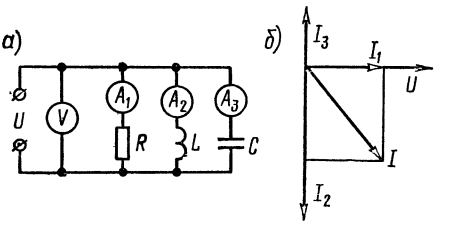


Рис. 2.19

из последовательно соединенных R_1 и L_1. Показания приборов: A — 6,5 А; A_1 — 3,5 А, A_2 — 4 А. Активное сопротивление $R_2 = 30$ Ом.

Указание. Задачу проще всего решить, если сначала построить векторную диаграмму.

2.19. По показаниям приборов, включенных в цепь (рис. 2.19, *а*), определить ток, проходящий в неразветвленном участке цепи, сопротивление каждой ветви и полное сопротивление цепи. Заменить данную цепь эквивалентной последовательной цепью $R_{эк}$, $X_{эк}$. Построить векторную диаграмму.

Даны: $U = 120$ В, $I_1 = 3$ А, $I_2 = 6$ А, $I_3 = 2$ А.

Указание. Решение целесообразно начать с построения векторной диаграммы (рис. 2.19, *б*).

2.20. Для определения параметров конденсатора с потерями его подключили к источнику синусоидального напряжения $U = 19{,}5$ В ($f = 50$ кГц). При этом амперметр показал ток $I = 0{,}3$ А, а ваттметр — мощность $P = 153$ мВт. Определить R_1, C_1 и R_2, C_2 двух схем (рис. 2.20, *а* и *б*), эквивалентных конденсатору с потерями. Чему равны тангенс угла потерь указанного конденсатора и его добротность?

Р е ш е н и е. Определим сдвиг фаз между напряжением U и током I:

$$\cos\varphi = \frac{P}{UI} = \frac{153 \cdot 10^{-3}}{19{,}5 \cdot 0{,}3} = 0{,}0262; \quad \varphi = -88^\circ 30'.$$

Знак φ отрицателен, так как цепь состоит из активного сопротивления и емкости.

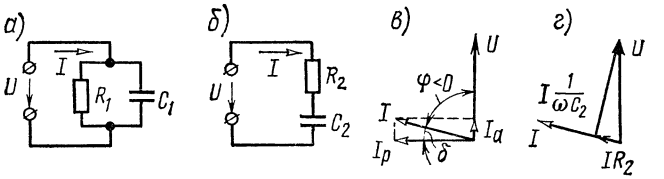


Рис. 2.20

Из схемы рис. 2.20, *а* видно, что $P = UI\cos\varphi = UI_a$. Найдем активную составляющую тока

$$I_a = P/(UI) = 0{,}153/19{,}5 = 7{,}85 \cdot 10^{-3}\ \text{А} = 7{,}85\ \text{мА}.$$

Так как

$$I_a = UG = U/R_1 = 7{,}85 \cdot 10^{-3}\ \text{А},$$

то

$$R_1 = U/I_a = (19{,}5 \cdot 10^3)/7{,}85 = 2 \cdot 48 \cdot 10^3\ \text{Ом} = 2{,}48\ \text{кОм}.$$

Если реактивный ток

$$I_p = I\sin\varphi = 0{,}3 \cdot 0{,}99966 \approx 0{,}3\ \text{А},$$

а

$$I_p = UB_C = U\omega C_1 = 0{,}3\ \text{А},$$

то

$$C = \frac{0{,}3}{19{,}5 \cdot 6{,}28 \cdot 50 \cdot 10^3} = 49 \cdot 10^{-9}\ \Phi = 49\ \text{нФ}.$$

Для схемы рис. 2.20, *б*:

$$R_2 = P/I^2 = (15{,}3 \cdot 10^{-3})/0{,}3^2 = 1{,}7\ \text{Ом}; \qquad Z = U/I = 19{,}5/0{,}3 = 65\ \text{Ом};$$

$$|X_2| = \sqrt{Z^2 - R_2^2} = \sqrt{65^2 - 1{,}7^2} \approx 65\ \text{Ом}.$$

Отсюда

$$X_2 = 1/\omega C_2 = 65\ \text{Ом}; \quad C = 1/(65 \cdot 2\pi \cdot 50 \cdot 10)^3 = 49 \cdot 10^{-9} = 49\ \text{нФ}.$$

Угол потерь δ и его тангенс соответственно равны:

$$\delta = 90^\circ - |\varphi| = 90^\circ - 88^\circ\,30' = 1^\circ\,30',$$

$$\operatorname{tg}\delta = \frac{1}{\omega C_2 R_2} = 1^\circ\,30' = 0{,}0262.$$

Для схем рис. 2.20, *а* и *б* даны соответствующие векторные диаграммы на рис. 2.20, *в* и *г*.

Добротность конденсатора

$$Q_C = |X_2| / R_2 = 65/1{,}7 = 38\ (\text{или } Q_C = B_C/Q).$$

Б. Различные формы записи комплексных величин. Активная и реактивная составляющие напряжения и тока. Соединение сопротивлений. Мощности. Векторные диаграммы

2.21. Записать в показательной, тригонометрической, алгебраической формах выражения комплексных действующих значений тока и напряжения, мгновенные значения которых

$$u = 100\sqrt{2}\sin(\omega t + 15^\circ)\ \text{В}; \quad i = 5\sqrt{2}\sin(\omega t - 20^\circ)\ \text{А}.$$

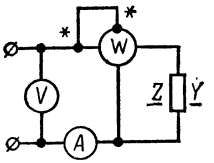


Рис. 2.21

2.22. Пользуясь счетной линейкой, представить в показательной форме следующие комплексные числа:

1) $3{,}2 \pm j\,1{,}25$; 2) $1{,}25 \pm j\,3{,}2$; 3) $-3{,}2 \pm j\,1{,}25$; 4) $-1{,}25 \pm j\,3{,}2$; 5) $3{,}2 + j\,12{,}5$; 6) $3{,}2 - j\,0{,}125$; 7) $0{,}125 + j\,3{,}2$; 8) $-0{,}125 + j\,3{,}2$; 9) $0{,}32 - j\,1{,}25$; 10) $23 + j\,0{,}06$.

Пользуясь счетной линейкой, записать в алгебраической форме следующие комплексные числа:

11) $32e^{\pm j19°}$; 12) $32e^{\pm j71°}$; 13) $32e^{\pm j161°}$; 14) $-32e^{\pm j2°35'}$;

15) $32e^{\pm j87°25'}$; 16) $32e^{j0°43'}$; 17) $32e^{-j0°12'}$; 18) $32e^{j92°35'}$;

19) $32e^{-j177°25'}$; 20) $7{,}3e^{-j86°40'}$; 21) $150e^{j191°}$; 22) $28e^{-j97°30'}$;

23) e^{j}; 24) $10e^{-j0{,}5}$.

Указание. См. приложение П1.

2.23. Приборы, подключенные к цепи (рис. 2.21), дали следующие показания: $U = 65$ В; $I = 5$ А; $P = 300$ Вт.

Вычислить комплексные сопротивления $\underline{Z}$ и проводимости $\underline{Y}$ цепи для случаев: а) $\varphi > 0$; б) $\varphi < 0$.

Р е ш е н и е. Модуль сопротивления и его аргумент определяются по формулам

$$Z = U/I = 65/5 = 13 \text{ Ом}; \quad \cos\varphi = \frac{P}{UI} = \frac{300}{65 \cdot 5} = 0{,}923;$$

$$\varphi = \pm 22°40'.$$

Искомые комплексные сопротивления и проводимости цепи:

а) $\varphi > 0$:

$$\underline{Z} = Ze^{j\varphi} = 13e^{j22°40'} = 13\cos 22°\,40' + j\,13\sin 22°\,40' =$$

$$= 13 \cdot 0{,}923 + j13 \cdot 0{,}385 = (12 + j5) \text{ Ом};$$

$$\underline{Y} = 1/\underline{Z} = 1/13e^{j22°40'} = 0{,}077e^{-j22°40'} = (7{,}1 - j2{,}96)\,10^{-2} \text{ См};$$

б) $\varphi < 0$:

$$\underline{Z} = 13e^{-j22°40'} = (12 - j5) \text{ Ом}; \quad \underline{Y} = (7{,}1 + j2{,}96)\,10^{-2} \text{ См}.$$

2.24. Комплексное напряжение и ток пассивного двухполюсника равны:

$$\underline{U} = (80 + j60) \text{ В} \text{ и } \underline{I} = (24 - j7) \text{ А}.$$

Вычислить комплексные сопротивление $\underline{Z}$, проводимость $\underline{Y}$ и указать, каковы эквивалентные параметры двухполюсника. Чему равен сдвиг фаз между напряжением и током? Определить активную и ре-

активную составляющие напряжения и тока, активную, реактивную и полную мощности. Построить векторную диаграмму напряжений и токов.

Р е ш е н и е. Запишем комплексные напряжение и ток в показательной форме и изобразим их на векторной диаграмме (рис. 2.22):

$$\underline{U} = \sqrt{80^2 + 60^2}\, e^{j \operatorname{arctg} 60/80} = 100e^{j36°50'} \text{ В } (\varphi_U = 36° 50');$$

$$\underline{I} = \sqrt{24^2 + 7^2}\, e^{-j \operatorname{arctg} 7/24} = 25e^{-j16°15'} \text{ А } (\varphi_I = -16° 15').$$

Комплексное сопротивление определяем по формуле (2.11):

$$\underline{Z} = \frac{\underline{U}}{\underline{I}} = \frac{100e^{j36° 50'}}{25e^{-j16°15'}} = 4e^{j53°5'} = (2{,}4 + j3{,}2) \text{ Ом}.$$

Следовательно, эквивалентными параметрами цепи являются активное сопротивление $R = 2{,}4$ Ом и индуктивное сопротивление $X_L = 3{,}2$ Ом, соединенные последовательно.

Комплексная проводимость цепи определяется по формуле (2.13):

$$\underline{Y} = 1/\underline{Z} = 1/(2{,}4 + j3{,}2) = (0{,}15 - j0{,}2) \text{ См}.$$

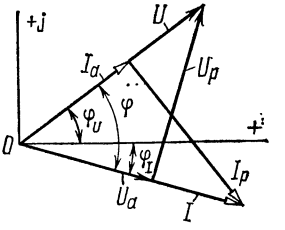


Рис. 2.22

Эквивалентные параметры цепи: активная $G = 0{,}15$ См и реактивная (индуктивная) $B = 0{,}2$ См проводимости, соединенные параллельно.

Угол сдвига фаз между напряжением и током (он же аргумент $\underline{Z}$)

$$\varphi = \varphi_U - \varphi_I = 36°50' - (-16°15') = 53°5'.$$

Активные и реактивные составляющие напряжения и тока

$$U_a = U \cos\varphi = 100 \cos 53°5' \approx 60 \text{ В};$$

$$U_p = U \sin\varphi = 100 \sin 53°5' \approx 80 \text{ В};$$

$$I_a = I \cos\varphi = 25 \cos 53°5' \approx 15 \text{ А};$$

$$I_p = I \sin\varphi = 25 \sin 53°5' \approx 20 \text{ А}.$$

Необходимо обратить внимание на то, что вещественные и мнимые составляющие комплексных напряжения и тока в общем случае отличаются от их активных и реактивных составляющих.

Активная, реактивная и полная мощности:

$$P = I^2R = 25^2 \cdot 2{,}4 = 1500 \text{ Вт} = 1{,}5 \text{ кВт};$$

$$Q = I^2X = 25^2 \cdot 3{,}2 = 2000 \text{ вар} = 2 \text{ квар};$$

$$S = UI = 100 \cdot 25 = 2500 \text{ В·А} = 2{,}5 \text{ кВ·А}.$$

Те же мощности можно определить по формуле (2.25а):

$$\tilde{S} = P + jQ = \underline{U}\,\underline{I}^* = (80 + j60)(24 + j7) = 1500 + j2000.$$

2.25. Дать ответы на вопросы предыдущей задачи при:

а) $\underline{U} = (-40 + j40)$ В, $\underline{I} = (2 + j4)$ А;

б) $\underline{U} = -100e^{-j\frac{\pi}{6}}$ В, $\underline{I} = (7 + j24)$ А.

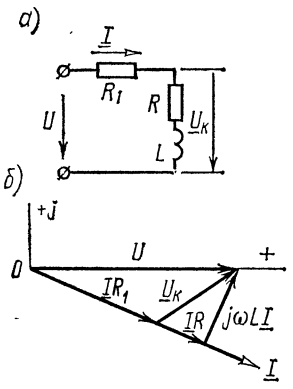


Рис. 2.23

2.26. Последовательно с катушкой, параметры которой $R = 3$ Ом, $L = 25$ мГн, включен реостат сопротивлением $R_1 = 10$ Ом (рис. 2.23, *а*). Определить напряжение на катушке $U_к$, его сдвиг фазы по отношению к приложенному напряжению, а также мощность, расходуемую в катушке. К цепи подведено напряжение $U = 120$ В, $f = 50$ Гц. Построить векторную диаграмму напряжений и тока.

Р е ш е н и е. Комплексное сопротивление всей цепи

$$\underline{Z} = R + R_1 + j\omega L = 13 + j7{,}85 = 15{,}2e^{j31°5'}\ \text{Ом}.$$

Направим вектор U по оси вещественных чисел, т. е. $\underline{U} = U = 120$ В.

Из формулы (2.15а) комплексный ток

$$\underline{I} = \underline{U}/\underline{Z} = 120/15{,}2e^{j31°5'} = 7{,}9e^{-j31°5'}\ \text{А}.$$

Напряжение на катушке

$$\underline{U}_к = \underline{I}\,\underline{Z}_к = 7{,}9e^{-j31°5'}(3 + j7{,}85) = 7{,}9e^{-j31°5'} \cdot 8{,}4e^{j69°5'} =$$

$$= 66{,}4e^{j38°}\ \text{В}.$$

Оно сдвинуто по фазе по отношению к приложенному напряжению на угол $\varphi = 38°$. Векторная диаграмма приведена на рис. 2.23, *б*.

Мощность, расходуемая в катушке,

$$P_к = \mathrm{Re}\left[\underline{U}_к \underline{I}^*\right] = 66{,}4^{j38°} \cdot 7{,}9e^{j31°5'} = \mathrm{Re}\left[525e^{j69°5'}\right] =$$

$$= 525\cos 69°5' = 187\ \text{Вт}.$$

Та же мощность может быть подсчитана и другим путем:

$$P_к = I^2R = 7{,}9^2 \cdot 3 = 187\ \text{Вт}.$$

2.27. Последовательно с реостатом, сопротивление которого $R_1 = 40$ Ом, соединена индуктивная катушка с активным сопротивлением $R_2 = 20$ Ом. Через катушку проходит ток $I = 2$А, а общее напряжение, приложенное к цепи, $U = 122$ В. Частота тока $f = 50$ кГц.

Определить индуктивность катушки.

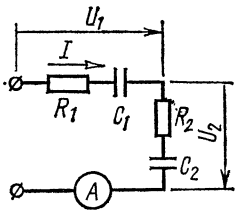


Рис. 2.24

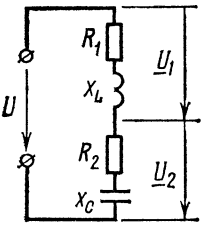


Рис. 2.25

2.28. Какое напряжение приложено к цепи (рис. 2.24), если амперметр показывает ток $I = 0{,}8$ А, а сопротивления ее элементов $R_1 = 12$ Ом; $1/\omega C_1 = 5$ Ом; $R_2 = 132$ Ом; $1/\omega C_2 = 12$ Ом?

2.29. В цепи рис. 2.24 напряжение U_1 на участке R_1, C_1 равно 24 В. Даны: $R_1 = 30$ Ом, $R_2 = 40$ Ом, $C_1 = 5$ мкФ, $C_2 = 1$ мкФ. Угловая частота $\omega = 5000$ с$^{-1}$. Чему равно напряжение, приложенное к цепи?

Р е ш е н и е. Реактивные сопротивления и комплексные сопротивления первого участка и всей цепи

$$X_{C1} = 1/\omega C_1 = 1/(5000 \cdot 5 \cdot 10^{-6}) = 40 \text{ Ом}; \qquad X_{C2} = 1/\omega C_2 = 200 \text{ Ом};$$

$$\underline{Z}_1 = R - jX_{C1} = 30 - j40 = 50e^{-j53°10'} \text{ Ом};$$

$$\underline{Z} = R_1 + R_2 - j(X_{C1} + X_{C2}) = 70 - j240 = 250e^{-j73°45'} \text{ Ом}.$$

Примем аргумент комплексного напряжения на первом участке равным нулю: $\underline{U}_1 = U_1 = 24$ В. Тогда комплексный ток в цепи

$$\underline{I} = \underline{U}_1/\underline{Z} = 24/50e^{-j53°10'} = 0{,}48e^{j53°10'} \text{ А}.$$

Приложенное напряжение

$$\underline{U} = \underline{I}\,\underline{Z} = 0{,}48e^{j53°10'} \cdot 250e^{-j73°45'} = 120e^{-j20°35'} \text{ В}.$$

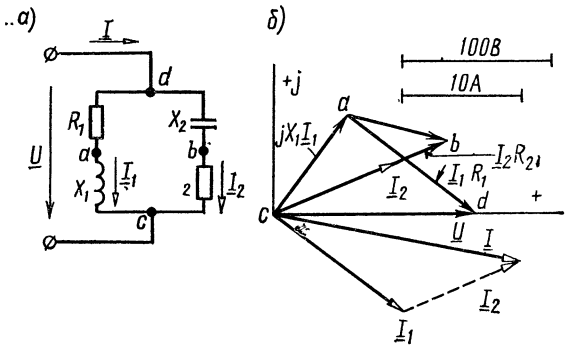


Рис. 2.26

2.30. К напряжению $U = 127$ В подключены последовательно соединенные катушка индуктивности ($R_1 = 10$ Ом, $X_L = 50$ Ом) и конденсатор с потерями ($R_2 = 1$ Ом, $X_C = 30$ Ом). Определить комплексные напряжения на катушке $\underline{U}_1$ и конденсаторе $\underline{U}_2$ и сдвиг фаз между ними (рис. 2.25).

2.31. Параметры цепи, изображенной на рис. 2.26, *а*, имеют следующие значения: $R_1 = 8$ Ом, $X_1 = 6$ Ом, $R_2 = 12$ Ом, $X_{C2} = 5$ Ом.

Вычислить комплексные токи $\underline{I}$, $\underline{I}_1$, $\underline{I}_2$ и мощность, потребляемую цепью, если $U = 130$ В. Найти напряжение между точками a и b. Построить векторную диаграмму.

Р е ш е н и е. Примем $\underline{U} = U = 130$ В, тогда

$$\underline{I}_1 = \frac{\underline{U}}{\underline{Z}_1} = \frac{130}{8 + j6} = 10{,}4 - j7{,}8 = 13e^{-j36°50'} \text{ А};$$

$$\underline{I}_2 = \frac{\underline{U}}{\underline{Z}_2} = \frac{130}{12 - j5} = 9{,}23 + j3{,}84 = 10e^{j22°40'} \text{ А};$$

$$\underline{I} = \underline{I}_1 + \underline{I}_2 = 19{,}6 - j3{,}96 = 20e^{-j11°25'} \text{ А}.$$

Мощность, потребляемая цепью,

$$P = \operatorname{Re}[\underline{U}\underline{I}^*] = \operatorname{Re}\left[130 \cdot 20e^{j11°20'}\right] = 130 \cdot 20 \cos 11°20' = 2550 \text{ Вт}.$$

Проверка показывает, что

$$P = I_1^2 R_1 + I_2^2 R_2 = 13^2 \cdot 8 + 10^2 \cdot 12 = 1352 + 1200 \approx 2550 \text{ Вт}.$$

Найдем напряжение между точками a и b:

$$\underline{V}_d - \underline{V}_a = \underline{U}_{da} = \underline{I}_1 R_1; \quad \underline{V}_d - \underline{V}_b = \underline{U}_{db} = \underline{I}_2(-jX_{C2}).$$

Вычитая первое выражение из второго, найдем

$$\underline{U}_{ab} = (\underline{V}_d - \underline{V}_b) - (\underline{V}_d - \underline{V}_a) = \underline{I}_2(-jX_{C2}) - \underline{I}_1 R_1 =$$
$$= -j5(9{,}23 + j3{,}84) - 8(10{,}4 - j7{,}8) = -64 +$$
$$+ j16{,}2 = 66e^{j165°50'} \text{ В}.$$

Для построения векторной диаграммы поступаем так: на основании проведенного расчета откладываем векторы токов $\underline{I}_1$, $\underline{I}_2$ и $\underline{I}$; векторы составляющих напряжения на отдельных участках цепи отложены на диаграмме в том же порядке, в каком следуют на схеме соответствующие элементы цепи (рис. 2.26, *б*).

2.32. Определить токи во всех ветвях цепи, показанной на рис. 2.27, при $U = 100$ В, $R_1 = 12$ Ом, $X_1 = -16$ Ом, $R_2 = 7$ Ом, $X_2 = -24$ Ом. Построить векторную диаграмму.

а. Определить показание вольтметра при условии, что током, проходящим через вольтметр, можно пренебречь по сравнению с то-

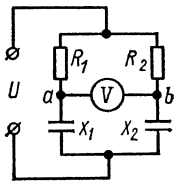


Рис. 2.27

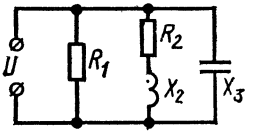


Рис. 2.28

ками ветвей. Чему будет равно показание амперметра, включенного вместо вольтметра между точками a и b?

б. Что покажет вольтметр, если сопротивления R_2 и X_2 поменять местами?

2.33. Найти токи в ветвях и неразветвленной части цепи (рис. 2.28), если приложенное напряжение $U = 220$ В, а сопротивле-

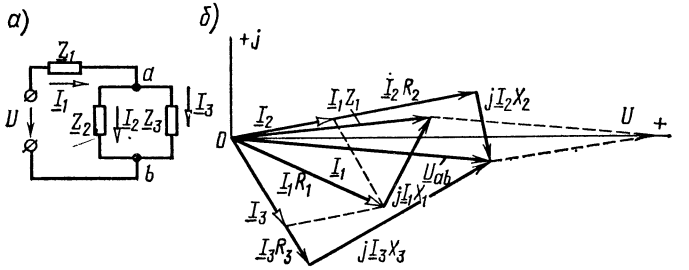


Рис. 2.29

ния $R_1 = 55$ Ом, $R_2 = 7$ Ом, $X_2 = 24$ Ом, $X_3 = -44$ Ом. Построить векторную диаграмму.

2.34. В цепи (рис. 2.29, *а*) даны: $U = 120$ В, $\underline{Z}_1 = R_1 + jX_1 = (10 + j\,6)$ Ом; $\underline{Z}_2 = R_2 + jX_2 = (24 - j\,7)$ Ом; $\underline{Z}_3 = R_3 + jX_3 = (15 + j\,20)$ Ом.

Определить токи $\underline{I}_1$, $\underline{I}_2$, $\underline{I}_3$, активные и реактивные мощности всей цепи и отдельных ветвей. Построить векторную диаграмму.

Р е ш е н и е. Полное сопротивление цепи

$$\underline{Z} = \underline{Z}_1 + \frac{\underline{Z}_2\underline{Z}_3}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3} = 10 + j6 + \frac{(24 - j7)(15 + j20)}{39 + j13} = 24{,}4 + j\,10{,}8 =$$

$$= 26{,}7e^{j23°55'} \text{ Ом}.$$

В неразветвленной части цепи проходит ток

$$\underline{I}_1 = \frac{U}{\underline{Z}} = \frac{120}{26{,}7e^{j23°55'}} = 4{,}5e^{-j23°55'} \text{ А}.$$

Токи в параллельных ветвях могут быть выражены через ток в неразветвленной части цепи [см. формулы (2.24)]:

$$\underline{I}_2 = \underline{I}_1 = \frac{\underline{Z}_3}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3} = 4{,}5e^{-j23°55'} \cdot \frac{15 + j20}{39 + j13} = 2{,}74e^{j10°45'} \text{ А};$$

$$\underline{I}_3 = \underline{I}_1 \frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3} = 4{,}5e^{-j23°55'} \cdot \frac{24 - j7}{39 + j13} = 2{,}74e^{-j58°35'} \text{ А}.$$

Токи $\underline{I}_2$ и $\underline{I}_3$ можно было бы найти и другим путем:

$$\underline{U}_{ab} = \underline{I}_1 \underline{Z}_{ab} = \underline{I}_1 \frac{\underline{Z}_2 \underline{Z}_3}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3} = 4{,}5e^{-j23°55'} \cdot \frac{(24 - j7)(15 + j20)}{39 + j13} =$$

$$= 68{,}4e^{-j5°30'} \text{ В};$$

$$\underline{I}_2 = \frac{\underline{U}_{ab}}{\underline{Z}_2} = \frac{68{,}4e^{-j5°30'}}{24 - j7} = 2{,}74e^{j10°45'} \text{ А};$$

$$\underline{I}_3 = \frac{\underline{U}_{ab}}{\underline{Z}_3} = \frac{68{,}4e^{-j5°30'}}{15 + j20} = 2{,}74e^{-j58°35'} \text{ А}.$$

Найдем активные мощности всей цепи и отдельных ее ветвей:

$$P = \mathrm{Re}\left[\underline{U}\underline{I}_1^*\right] = \mathrm{Re}\left[120 \cdot 4{,}5e^{j23°55'}\right] = 120 \cdot 4{,}5 \cos 23°55' = 494 \text{ Вт};$$

$$P_1 = I_1^2 R_1 = 4{,}5^2 \cdot 10 = 202 \text{ Вт}; \quad P_2 = I_2^2 R_2 = 180 \text{ Вт};$$

$$P_3 = I_3^2 R_3 = 112 \text{ Вт}.$$

Проверка показывает, что $P = P_1 + P_2 + P_3$.

Наконец, определим реактивные мощности всей цепи и отдельных ее ветвей:

$$Q = \mathrm{Im}\left[\underline{U}\,\underline{I}^*\right] = \mathrm{Im}\left[120 \cdot 4{,}5e^{j23°55'}\right] = 120 \cdot 4{,}5 \sin 23°55' = 218 \text{ вар};$$

$$Q_1 = I_1^2 X_1 = 4{,}5^2 \cdot 6 = 122 \text{ вар}; \quad Q_2 = I_2^2 X_1 = -52{,}5 \text{ вар};$$

$$Q_3 = I_3^2 X_3 = 150 \text{ вар}.$$

Учитывая, что Q_1 и Q_3 положительны (реактивные мощности катушек), а Q_2 отрицательно (реактивная мощность конденсатора), получим: $Q = 122 - 52{,}5 + 150 \approx 218$ вар.

На рис. 2.29, *б* приведена векторная диаграмма. Порядок ее построения следующий: по результатам расчетов отложены векторы токов $\underline{I}_1$, $\underline{I}_2$ и $\underline{I}_3$; затем по направлению $\underline{I}_1$ отложен вектор $\underline{I}_1 R_1$ и перпендикулярно ему в сторону опережения — вектор $jX_1\underline{I}_1$. Их сумма дает вектор $\underline{I}_1 \underline{Z}_1$. Далее в фазе с $\underline{I}_2$ построен вектор $\underline{I}_2 R_2$ и перпендикулярно ему в сторону отставания (так как X_2 отрицательно) — вектор $jX_2\underline{I}_2$, а их сумма дает вектор напряжения на параллельном участке $\underline{U}_{ab}$. Тот же вектор может быть получен, если в фазе с $\underline{I}_3$ отложить

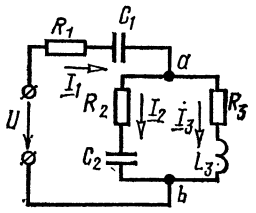


Рис. 2.30

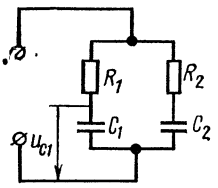


Рис. 2.31

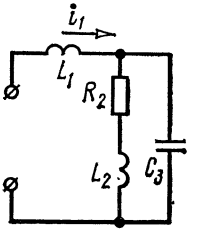


Рис. 2.32

$\underline{I}_3R_3$ и к нему прибавить вектор $jX_3\underline{I}_3$, опережающий I_3 на $\pi/2$. Сумма векторов $\underline{I}_1\underline{Z}_1$ и $\underline{U}_{ab}$ дает вектор приложенного напряжения.

2.35. Чему равно напряжение $\underline{U}$, подключенное к цепи (рис. 2.30), если известно, что $I_3 = 2$ А? Чему равен сдвиг фаз между приложенным напряжением и напряжением между точками a и b. Сопротивления $R_1 = 27$ Ом, $X_1 = -25$ Ом, $R_2 = 30$ Ом, $X_2 = -18$ Ом, $R_3 = 20$ Ом, $X_3 = 30$ Ом. Вычислить активную и реактивную мощности. Построить векторную диаграмму.

Указание. Решение удобно начинать с вычисления напряжения между точками a и b ($\underline{U}_{ab} = \underline{I}_3\underline{Z}_3$), а затем токов $\underline{I}_2$ и $\underline{I}_1$ и напряжения U.

2.36. Напряжение на конденсаторе изменяется по закону $u_{c1} = 35\sqrt{2}\sin\omega t$ В. Написать уравнения мгновенных значений токов i_1, i_2 и i, приложенного к цепи напряжения u (рис. 2.31), и построить векторную диаграмму. Параметры схемы: $R_1 = 48$ Ом, $X_1 = -14$ Ом, $R_2 = 15$ Ом, $X_2 = -20$ Ом.

2.37. В цепи рис. 2.32 источник тока создает ток $i_1 = 12\sqrt{2}\sin\omega t$А. Сопротивления элементов цепи: $\omega L_1 = 22{,}5$ Ом, $R_2 = 40$ Ом, $\omega L_2 = 100$ Ом, $1/\omega C_3 = 20$ Ом.

Вычислить действующие значения всех токов и приложенного к цепи напряжения; написать для них уравнения мгновенных значений. Построить векторную диаграмму напряжений и токов.

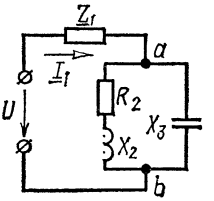


Рис. 2.33

2.38. Параметры цепи (рис. 2.33): $R_2 = 40$ Ом, $X_2 = 100$ Ом, $X_3 = -20$ Ом. Определить величину и характер сопротивления $\underline{Z}_1$, если известно, что оно чисто реактивно и через него проходит ток $I_1 = 12$ А, а напряжение, приложенное к цепи, $U = 30$ В.

Р е ш е н и е. Сопротивление разветвленной части цепи

$$\underline{Z}_{ab} = \frac{(40 + j100)(-j20)}{40 + j80} = (2 - j24)\ \text{Ом}.$$

Общее сопротивление цепи

$$Z = U/I_1 = 30/12 = 2{,}5\ \text{Ом}.$$

Оно может быть выражено и так:

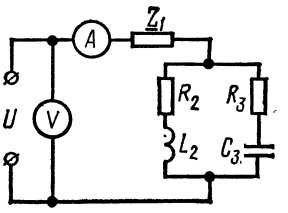


Рис. 2.34

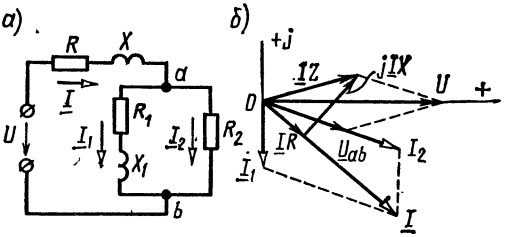


Рис. 2.35

$$Z = \sqrt{2^2 + (X_1 - 24)^2} = 2{,}5 \text{ Ом}.$$

Отсюда $(X_1 - 24)^2 = 2{,}25$, или $X_1 - 24 = \pm 1{,}5$.

Возможны два решения задачи: искомое сопротивление имеет индуктивный характер и равно либо $X_1' = 25{,}5$ Ом, либо $X_1'' = 22{,}5$ Ом.

2.39. Цепь рис. 2.34 имеет параметры: $\underline{Z}_1 = (6 + j8)$ Ом, $\underline{Z}_2 = (20 - j8)$ Ом, $\underline{Z}_3 = (10 + j8)$ Ом. Через сопротивление $\underline{Z}_1$ проходит ток $I_1 = 6$ А. Вычислить остальные токи и напряжение, приложенное к цепи.

2.40. Амперметр, включенный в неразветвленную часть цепи (рис. 2.34), показал 2,4 А, а вольтметр — 120 В. Известно, что сопротивление Z_1 представляет собой индуктивную катушку с активным сопротивлением $R_1 = 7$ Ом. Определить величину индуктивного сопротивления этой катушки, если известны: $R_2 = 20$ Ом, $\omega L_2 = 30$ Ом, $R_3 = 10$ Ом, $1/\omega C_3 = 20$ Ом.

2.41. Каким активным сопротивлением R_2 следует зашунтировать сопротивление $\underline{Z}_1 = R_1 + jX_1$, чтобы ток, проходящий через $\underline{Z}_1$, отставал от приложенного напряжения U на 90° (рис. 2.35, *а*)?

Сопротивления: $R = 5$ Ом, $X = 11$ Ом, $R_1 = 10$ Ом, $X_1 = 25$ Ом. Построить векторную диаграмму.

Р е ш е н и е. Обозначим:

$$\underline{Z} = R + jX; \quad \underline{Z}_1 = R_1 + jX_1; \quad Z_3 = R_2.$$

Ток в неразветвленной части цепи

$$\underline{I} = \frac{U}{\underline{Z}_{\text{вх}}} = \frac{U(\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2)}{\underline{Z}\,\underline{Z}_1 + \underline{Z}_1\underline{Z}_2 + \underline{Z}\,\underline{Z}_2}.$$

Через сопротивление $\underline{Z}_1$ протекает ток

$$\underline{I}_1 = \underline{I}\,\frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} = \frac{U}{\underline{Z} + \underline{Z}_1 + \dfrac{\underline{Z}\,\underline{Z}_1}{\underline{Z}_2}}.$$

Для того чтобы ток $\underline{I}_1$ отставал по фазе от напряжения U на 90°,

знаменатель последнего выражения должен быть чисто мнимой (по знаку положительной) величиной.

Выпишем этот знаменатель и выделим в нем вещественную и мнимую составляющие:

$$\underline{Z}+\underline{Z}_1+\frac{\underline{Z}\,\underline{Z}_1}{\underline{Z}_2}=R+R_1+j(X+X_1)+\frac{(R+jX)(R_1+jX_1)}{R_2}=$$

$$=\left(R+R_1+\frac{RR_1-XX_1}{R_2}\right)+j\left(X+X_1+\frac{RX_1+R_1X}{R_2}\right).$$

Вещественную часть полученного выражения приравняем нулю:

$$R+R_1+\frac{RR_1-XX_1}{R_2}=0,$$

отсюда

$$R_2=\frac{XX_1-RR_1}{R+R_1}=\frac{25\cdot 11-5\cdot 10}{5+10}=15\text{ Ом}.$$

Векторная диаграмма представлена на рис. 2.35, *б*.

2.42. К напряжению $U = 40$ В подключены два последовательно соединенных комплексных сопротивления $\underline{Z}_1 = (3 + j13)$ Ом и $\underline{Z}_2 = (10 + j40)$ Ом. Определить, каким чисто емкостным сопротивлением следует шунтировать сопротивление $\underline{Z}_2$, для того чтобы ток в неразветвленной части цепи (т. е. в сопротивлении $\underline{Z}_1$) совпал по фазе с приложенным напряжением. Вычислить при этом все токи.

Указание. Комплекс полного сопротивления цепи должен быть вещественной величиной, иными словами, мнимую составляющую комплекса полного сопротивления необходимо приравнять нулю.

2.43. В цепи (рис. 2.35, *а*) известны: $R = 3$ Ом, $X = 9$ Ом, $R_1 = 20$ Ом, $X_1 = 10$ Ом. Найти, при каком сопротивлении R_2 ток в неразветвленной части цепи будет сдвинут по отношению к приложенному напряжению на угол, равный 45°.

Указание. Следует вычислить комплекс полного сопротивления схемы $\underline{Z}_{эк} = R_{эк} + jX_{эк}$, в котором надо принять отношение

$$X_{эк}/R_{эк}=1\ (\text{т. е. } \operatorname{tg}\varphi_{эк}=\operatorname{tg}45^\circ=X_{эк}/R_{эк}).$$

2.44. Показать, что при угловой частоте $\omega = 1/\sqrt{2LC}$ ток I в неразветвленной части цепи (рис. 2.36) при любых значениях активного сопротивления R является величиной постоянной и равняется $U/\omega L$, а фаза тока (при изменении R от 0 до ∞) изменяется в пределах от $+\pi/2$ до $-\pi/2$.

Какую емкость C следует включить в цепь для регулирования фазы при $f = 50$ Гц, если индуктивность цепи равна 5 Гн? Начертить кривую изменения фазы в зависимости от R при его изменении от 0 до 1000 Ом.

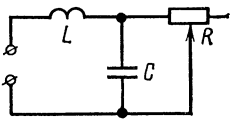


Рис. 2.36

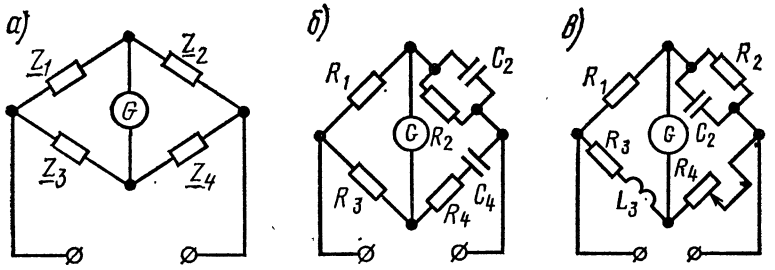


Рис. 2.37

2.45. Из теории известно, что мост (рис. 2.37, *а*) будет уравновешен, если $\underline{Z}_1\underline{Z}_4 = \underline{Z}_2\underline{Z}_3$. Пользуясь этим условием, определить величину емкости C_4, при которой ток в гальванометре отсутствует. Известно, что $\underline{Z}_1 = 200$ Ом, $\underline{Z}_2 = 100$ Ом и $\underline{Z}_3 = -j120$ Ом. Частота переменного тока $f = 50$ Гц.

2.46. Для определения параметров эквивалентной схемы конденсатора с потерями (C_2 и R_2) собран мост по схеме рис. 2.37, *б*, который уравновешен ($\underline{Z}_1\underline{Z}_4 = \underline{Z}_2\underline{Z}_3$). Чему равны C_2 и R_2, если известно, что $R_1 = 2500$ Ом, $R_3 = 10$ Ом, $L_3 = 1$ Гн; $R_4 = 800$ Ом?

2.47. На рис. 2.37, *в* изображена схема моста, используемого для измерения частоты. Показать, что при равновесии моста $\omega = 1/\sqrt{R_2R_4C_2C_4}$.

2.48. Параметры цепи (рис. 2.38) равны:

$$\underline{Z}_1 = R_1 + jX_1 = (10 + j80) \text{ Ом}, \quad \underline{Z} = R + jX = (50 + j60) \text{ Ом},$$

$$\underline{Z}_2 = R_2 = 40 \text{ Ом}.$$

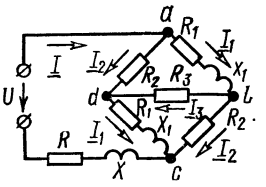


Рис. 2.38

При каком активном сопротивлении R_3, включенном в диагональ моста, ток $\underline{I}_1$, проходящий через каждое из сопротивлений $\underline{Z}_1$, будет сдвинут по отношению к вектору приложенного напряжения $U = 154$ В на угол $\varphi = 90°$? Для этого случая найти все токи.

Указание. Составить систему уравнений Кирхгофа, решив ее, найти комплексный ток $\underline{I}_1$. При решении учесть, что токи в противоположных ветвях (*ad* и *bc*, а также *ab* и *dc*) равны друг другу. Чтобы ток $\underline{I}_1$ был сдвинут по фазе по отношению к U на 90°, надо приравнять нулю вещественную составляющую в выражении для тока $\underline{I}_1$.

В результате решения должно быть получено

$$R_3 = \frac{XX_1 - RR_2 - RR_1 - 2R_1R_2}{2R + R_1 + R_2} = 10 \text{ Ом}.$$

2.49. Для цепи (рис. 2.39, *а*) вычислить комплексный коэффициент передачи — отношение напряжения $\underline{U}_2$ на ее выходе к напряжению

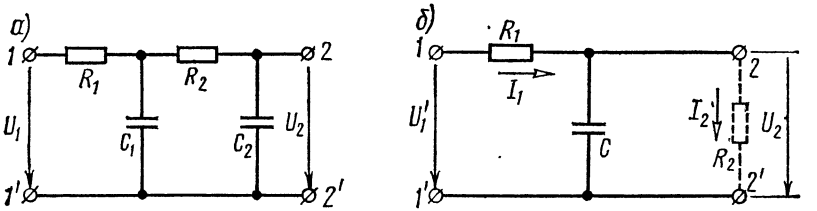


Рис. 2.39

$\underline{U}_1$ на входе цепи. Даны: $R_1 = 50$ Ом, $R_2 = 150$ Ом, $X_{C1} = 80$ Ом, $X_{C2} = 100$ Ом. Зажимы $2—2'$ разомкнуты.

Каким будет коэффициент передачи, если к зажимам $2—2'$ подключить активное сопротивление: а) 125 Ом; б) 1250 Ом?

2.50. Вычислить величину активного сопротивления R_2, которое надо подключить к зажимам $2—2'$ цепи (рис. 2.39, *б*), чтобы отношение напряжения U_2 на нем к напряжению U_1 на входе цепи равнялось k. Числовой расчет проделать при $R_1 = 100$ Ом, $X_C = 50$ Ом, $k = U_2/U_1 = 0{,}2$.

Р е ш е н и е. Входное сопротивление всей цепи

$$\underline{Z} = \underline{Z}_1 + \frac{\underline{Z}_2\underline{Z}_3}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3} = \frac{\underline{Z}_1\underline{Z}_2 + \underline{Z}_2\underline{Z}_3 + \underline{Z}_3\underline{Z}_1}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3},$$

где

$$\underline{Z}_1 = R_1, \quad \underline{Z}_2 = R_2, \quad \underline{Z}_3 = -jX_C.$$

Вычислим напряжение $\underline{U}_2$, для чего сначала найдем токи

$$\underline{I}_1 = \frac{\underline{U}_1}{\underline{Z}} = \frac{\underline{U}_1(\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3)}{\underline{Z}_1\underline{Z}_2 + \underline{Z}_2\underline{Z}_3 + \underline{Z}_3\underline{Z}_1};$$

$$\underline{I}_2 = \underline{I}_1 \frac{\underline{Z}_3}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3} = \frac{\underline{U}_1\underline{Z}_3}{\underline{Z}_1\underline{Z}_2 + \underline{Z}_2\underline{Z}_3 + \underline{Z}_3\underline{Z}_1};$$

$$\underline{U}_2 = \underline{I}_2\underline{Z}_2 = \frac{\underline{U}_1\underline{Z}_2\underline{Z}_3}{\underline{Z}_1\underline{Z}_2 + \underline{Z}_2\underline{Z}_3 + \underline{Z}_3\underline{Z}_1} = \frac{\underline{U}_1\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \dfrac{\underline{Z}_1\underline{Z}_2}{\underline{Z}_3}}.$$

Отсюда найдем отношение комплексных напряжений:

$$\frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_1} = \frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \dfrac{\underline{Z}_1\underline{Z}_2}{\underline{Z}_3}} = \frac{R_2}{R_1 + R_2 + j\dfrac{R_1R_2}{X_C}}$$

и отношение модулей напряжений:

$$\frac{U_2}{U_1} = \frac{R_2}{\sqrt{(R_1 + R_2)^2 + \left(\frac{R_1 R_2}{X_C}\right)^2}} = k.$$

Подставляя числовые значения, после простых преобразований получим квадратное уравнение относительно R_2 : $R_2^2 - 10R_2 - 500 = 0$.

Решение этого уравнения дает величину искомого сопротивления $R_2 \approx 28$ Ом.

В. Применение различных методов к расчету цепей синусоидального тока

2.51. В цепи рис. 2.40, *а* даны: $\underline{Z}_1 = \underline{Z}_2 = (50 + j30)$ Ом, $\underline{Z}_3 = 100$ Ом, $\underline{E}_1 = 100$ В, $\underline{E}_2 = 100e^{-j30^\circ}$ В. Положительные направления э. д. с. показаны на схеме стрелками. Определить все токи методами: а) контурных токов; б) узловых потенциалов; в) методом эквивалентного источника э. д. с. определить ток ветви $\underline{Z}_2$. Проверить баланс активных мощностей.

Р е ш е н и е. а. Выберем направления контурных токов согласно рис. 2.40, *а*. Система уравнений по методу контурных токов

$$\underline{I}_{11}(\underline{Z}_1 + \underline{Z}_3) + \underline{I}_{22}\underline{Z}_3 = \underline{E}_1; \quad \underline{I}_{11}\underline{Z}_3 + \underline{I}_{22}(\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3) = \underline{E}_2.$$

Решая эти уравнения, получим

$$\underline{I}_{11} = \frac{\underline{E}_1(\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3) - \underline{E}_2\underline{Z}_3}{\underline{Z}_1\underline{Z}_2 + \underline{Z}_2\underline{Z}_3 + \underline{Z}_1\underline{Z}_3} = \frac{100(150 + j30) - 100e^{-j30^\circ} \cdot 100}{(50 + j30)^2 + 2(50 + j30) \cdot 100} =$$

$$= 0{,}693e^{j13^\circ50'} \text{ А}.$$

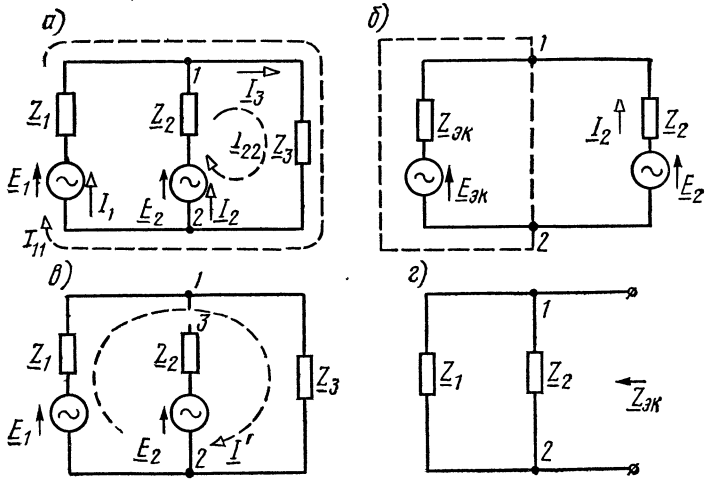


Рис. 2.40

$$\underline{I}_{22} = \frac{\underline{E}_2(\underline{Z}_1 + \underline{Z}_3) - \underline{E}_1\underline{Z}_3}{\underline{Z}_1\underline{Z}_2 + \underline{Z}_2\underline{Z}_3 + \underline{Z}_1\underline{Z}_3} = 0{,}452e^{-j85°20'} \text{ А}.$$

Токи в ветвях:

$$\underline{I}_1 = \underline{I}_{11} = 0{,}693e^{j13°50'} \text{ А}; \quad \underline{I}_2 = \underline{I}_{22} = 0{,}452e^{-j85°20'} \text{ А};$$

$$\underline{I}_3 = \underline{I}_{11} + \underline{I}_{22} = 0{,}693e^{j13°50'} + 0{,}452e^{-j85°20'} = 0{,}77e^{-j21°50'} \text{ А}.$$

Уравнение баланса мощностей

$$\mathrm{Re}[\underline{E}_1\,\underline{I}_1^*] + \mathrm{Re}[\underline{E}_2\,\underline{I}_2^*] = I_1^2R_1 + I_2^2R_2 + I_3^2R_3$$

или

$$\mathrm{Re}[100 \cdot 0{,}693e^{-j13°50'}] + \mathrm{Re}[100e^{-j30°} \cdot 0{,}452e^{j85°20'}] =$$

$$= 69{,}3\cos 13°50' + 45{,}2\cos 55°20' = 0{,}693^2 \cdot 50 +$$

$$+ 0{,}452^2 \cdot 50 + 0{,}77^2 \cdot 100,$$

или $66{,}4 + 25{,}8 = 24 + 10{,}2 + 59$, т. е. получено тождество $93{,}2 = 93{,}2$.

б. При решении задачи по методу узловых потенциалов вначале определяем напряжение между точками *1* и *2*:

$$\underline{U}_{12} = \frac{\underline{E}_1\underline{Y}_1 + \underline{E}_2\underline{Y}_2}{\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 + \underline{Y}_3} = \frac{100\,\dfrac{1}{50 + j30} + 100e^{-j30°}\,\dfrac{1}{50 + j30}}{\dfrac{1}{50 + j30} + \dfrac{1}{50 + j30} + \dfrac{1}{100}} =$$

$$= (71{,}5 - j28{,}6) \text{ В}.$$

Токи в ветвях находим по закону Ома:

$$\underline{I}_1 = (\underline{E}_1 - \underline{U}_{12})\,\underline{Y}_1 = (100 - 71{,}5 + j28{,}6)\,(0{,}0147 - j0{,}00884) =$$

$$= 0{,}693e^{j13°50'} \text{ А};$$

$$\underline{I}_2 = (\underline{E}_2 - \underline{U}_{12}) = (86{,}6 - j50 - 71{,}5 + j28{,}6)\,(0{,}0147 - j\,0{,}00884) =$$

$$= 0{,}45e^{-j85°20'} \text{ А};$$

$$\underline{I}_3 = \underline{U}_{12}\underline{Y}_3 = 77e^{-j21°50'} \cdot 0{,}01 = 0{,}77e^{-j21°50'} \text{ А}.$$

в. Для определения тока по методу эквивалентного источника э. д. с. надо найти э. д. с. $\underline{E}_{эк}$ эквивалентного источника э. д. с. и его сопротивление $\underline{Z}_{эк}$ (рис. 2.40, *б*).

Для определения $\underline{E}_{эк}$ отключим ветвь $\underline{Z}_2$ (рис. 2.40, *в*) и вычислим напряжение холостого хода (между точками *3* и *1*):

$$I' = \frac{\underline{E}_1}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_3}; \quad \underline{U}_{12} = \underline{I}'\underline{Z}_3 = \underline{E}_{эк} = \frac{\underline{E}_1\underline{Z}_3}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_3} = (64{,}2 - j12{,}8) \text{ В}.$$

Эквивалентное сопротивление источника э. д. с. (рис. 2.40, *г*)

$$\underline{Z}_{эк} = \frac{\underline{Z}_1\underline{Z}_3}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_3} = \frac{(50 + j30)\,100}{150 + j30} = (35{,}9 + j\,12{,}8)\ \text{Ом}.$$

Искомый ток (см. рис. 2.40, *б*)

$$\underline{I}_2 = \frac{\underline{E}_2 - \underline{E}_{эк}}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_{эк}} = \frac{43{,}5e^{-j59°}}{85{,}9 + j42{,}8} = \frac{43{,}5e^{-j59°}}{96e^{j26°30'}} = 0{,}453e^{-j85°30'}\ \text{А}.$$

2.52. В схеме рис. 2.40, *а* известны $\underline{E}_1 = E_1 = 400$ В, внутренние сопротивления источников э. д. с. равны: $\underline{Z}_1 = (0{,}04 + j0{,}2)$ Ом,

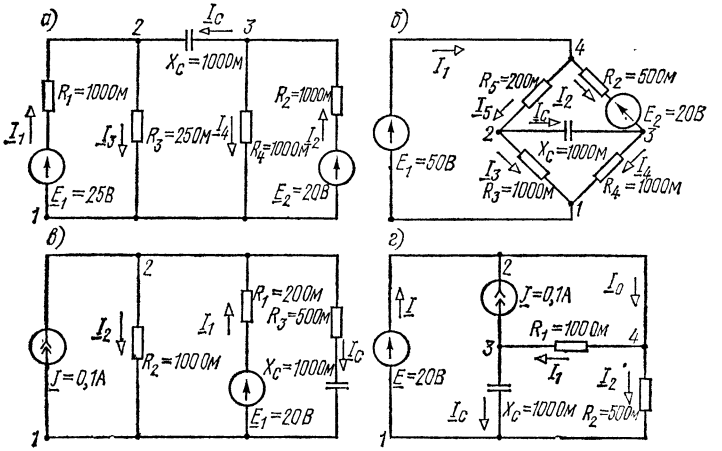


Рис. 2.41

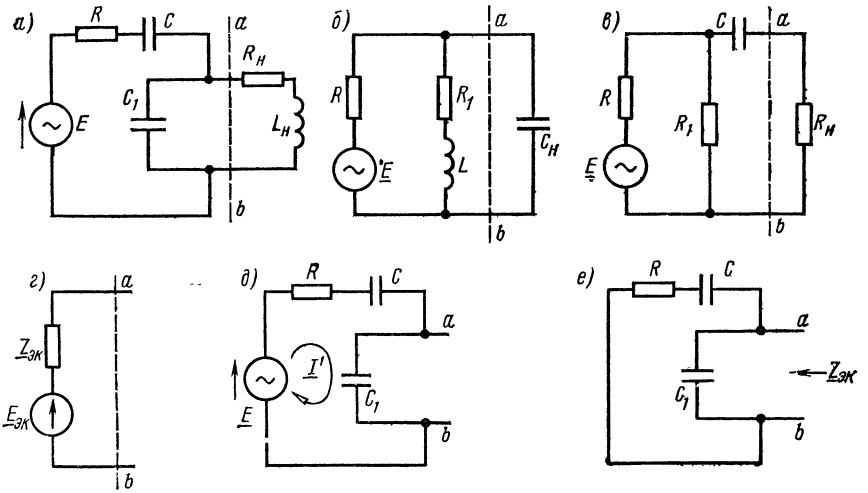


Рис. 2.42

$\underline{Z}_2 = (0{,}06 + j0{,}3)$ Ом. Сопротивление нагрузки $\underline{Z}_3 = (2{,}4 + j3{,}2)$ Ом. Определить все токи методами, указанными в предыдущей задаче.

2.53. Для каждой из цепей (рис. 2.41, *а*—*г*) рассчитать токи и найти потенциалы узловых точек, если потенциал точки *1* принять равным нулю. Задачу решить методом контурных токов или узловых потенциалов. Кроме того, определить ток в конденсаторе по методу эквивалентного источника э. д. с. или тока. На схеме э. д. с. даны в вольтах, токи источников тока в амперах, сопротивления — в омах.

2.54. Для каждой из частей схем рис. 2.42, *а*, *б*, *в*, расположенных левее штриховой линии *ab*, найти э. д. с. $\underline{E}_{эк}$ эквивалентного источника э. д. с. и его внутреннее сопротивление $\underline{Z}_{эк}$ (рис. 2.42, *г*).

Определить ток $\underline{I}_н$ в ветви нагрузки, расположенной правее линии *ab*. Частота переменного тока *f*.

Р е ш е н и е. Приведем расчет для схемы рис. 2.42, *а*. Отключим ветвь правее линии *ab* (рис. 2.42, *д*) и найдем напряжение холостого хода между точками *a* и *b*, равное $\underline{E}_{эк}$:

$$\underline{U}_{abx} = \underline{E}_{эк} = -j\frac{1}{\omega C_1}\underline{I}' = -j\frac{\frac{1}{\omega C_1}\underline{E}}{R - j\left(\frac{1}{\omega C} + \frac{1}{\omega C_1}\right)}.$$

Сопротивление эквивалентного источника найдем по схеме (рис. 2.42, *е*):

$$\underline{Z}_{эк} = \frac{-j\frac{1}{\omega C_1}\left(R - j\frac{1}{\omega C}\right)}{R - j\left(\frac{1}{\omega C} + \frac{1}{\omega C_1}\right)}.$$

Ток в искомой ветви

$$\underline{I}_н = \frac{\underline{E}_{эк}}{R_н + j\omega L_н + \underline{Z}_{эк}}.$$

2.55. К источнику э. д. с. *E* подключена цепь (рис. 2.43), сопротивления которой $\underline{Z}_1 = \underline{Z}_2 = 100$ Ом, $\underline{Z}_3 = j50$ Ом, $\underline{Z}_4 = -j50$ Ом, $\underline{Z}_5 = 200$ Ом, $\underline{Z}_6 = (100 + j100)$ Ом. При разомкнутом контакте вольтметр показывает напряжение, равное 100 В. Найти, чему равна э. д. с. *E*. Методом эквивалентного источника определить показание амперметра *A* при замыкании контакта *K*.

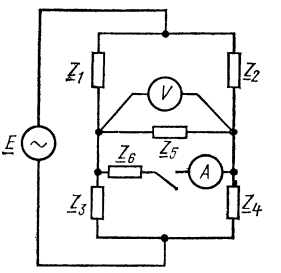


Рис. 2.43

2.56. Воспользовавшись преобразованием треугольника в звезду, найти все токи в неуравновешенном мостике (рис. 2.44). Приложенное к цепи напряжение $U = 130$ В. Сопротивления элементов цепи: $\underline{Z}_1 = 10$ Ом,

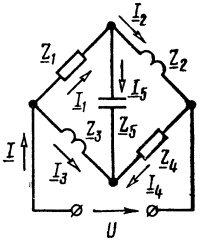


Рис. 2.44

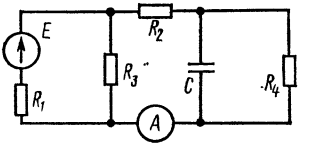


Рис. 2.45

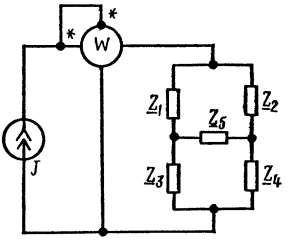


Рис. 2.46

$\underline{Z}_2 = j5$ Ом, $\underline{Z}_3 = j10$ Ом, $\underline{Z}_4 = 5$ Ом и $\underline{Z}_5 = -j10$ Ом. Вычислить мощность, расходуемую в цепи. Решить задачу методами контурных токов и узловых потенциалов. Методом эквивалентного источника э. д. с. найти токи $\underline{I}_5$ и $\underline{I}_4$; в тех же ветвях найти ток методом эквивалентного источника тока.

Указание. Разобрать решение задачи 1.45.

2.57. Методом эквивалентного источника э. д. с. определить показание амперметра, включенного в цепь рис. 2.45. Даны $E = 40$ В, $R_1 = 200$ Ом, $R_2 = 160$ Ом, $R_3 = 120$ Ом, $R_4 = 80$ Ом и $X_C = 60$ Ом.

2.58. В цепь схемы рис. 2.46 включен источник синусоидального тока, действующее значение тока которого $J = 10$ мА. Даны $\underline{Z}_1 = 2$ кОм, $\underline{Z}_2 = 3$ кОм, $\underline{Z}_3 = -j\,10$ кОм, $\underline{Z}_4 = (2 + j10)$ кОм и $\underline{Z}_5 = 5$ кОм.

Найти все токи методами контурных токов и узловых потенциалов. Определить показание ваттметра и убедиться в том, что оно равно сумме мощностей, расходуемых во всех резисторах цепи.

Методами эквивалентного источника э. д. с. и эквивалентного источника тока определить ток в ветви $\underline{Z}_4$; то же, в ветви $\underline{Z}_5$.

Указание. Разобрать решение задач 1.32; 1.45 и 1.50.

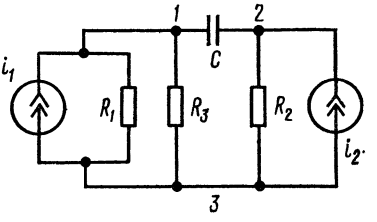


Рис. 2.47

2.59. В цепь рис. 2.47 включены два источника тока: $i_1 = 50\sqrt{2}\sin\omega t$ мА, $i_2 = 20\sqrt{2}\sin\omega t$ мА.

Даны: $R_1 = 10$ кОм, $R_2 = 25$ кОм, $R_3 = 20$ кОм и $X_C = 34$ кОм. Определить все токи. Задачу решить методами узловых потенциалов, контурных токов, наложения, преобразованием источников тока в эквивалентные источники э. д. с.

Г. Условия выделения максимальной мощности в нагрузке

2.60. Сопротивления цепи (рис. 2.48, *а*): $R = 10$ Ом, $X_C = 30$ Ом, э. д. с. $E = 100$ В.

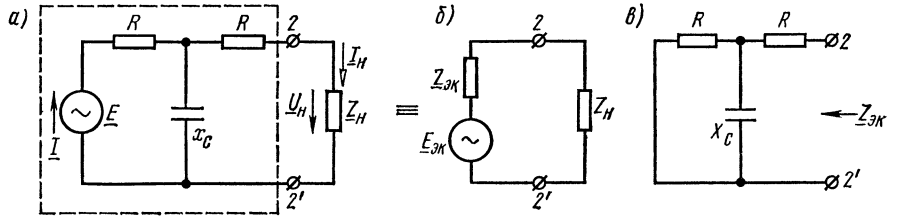


Рис. 2.48

При каком нагрузочном сопротивлении $\underline{Z}_н$ в нем выделится максимальная мощность и чему она равна? Вычислить к. п. д. , т. е. отношение мощности, выделяемой в $\underline{Z}_н$, к мощности, доставляемой источником E, и коэффициент передачи T — отношение напряжения на зажимах $2—2'$ к E.

Р е ш е н и е. Часть схемы левее зажимов $2—2'$ (обведенную штриховой линией) заменим эквивалентным источником э. д. с. Найдем его э д. с. $E_{эк}$ и сопротивление $\underline{Z}_{эк}$ (рис. 2.48, *б*). Отключив $\underline{Z}_н$, определим напряжение холостого хода между точками $2—2'$, которое равняется э. д. с. $E_{эк}$:

$$\underline{E}_{эк} = \frac{E}{R - jX_C}(-jX_C) = -j30\ \frac{100}{10 - j30} =$$

$$= 90 - j30 = 95e^{-j18°25'}\ \text{В}.$$

Сопротивление эквивалентного источника (рис. 2.48, *в*)

$$\underline{Z}_{эк} = R + \frac{-jX_C R}{R - jX_C} = 10 + \frac{-j30 \cdot 10}{10 - j30} = (19 - j3)\ \text{Ом}.$$

Максимум мощности выделяется в нагрузке $\underline{Z}_н$ при условии, что это сопротивление комплексно сопряжено с сопротивлением эквивалентного источника, т. е. при $\underline{Z}_н = \underline{Z}^*_{эк} = (19 + j3)$ Ом. Эта мощность

$$P_{н\,max} = E^2_{эк}/4R_н = 95^2/(4 \cdot 19) = 118\ \text{Вт}.$$

Рассчитываем мощность, доставляемую источником (рис. 2.48, *а*). Для этого вначале вычислим ток

$$\underline{I} = \frac{E}{R_1 + \dfrac{-jX_C(R_1 + \underline{Z}_н)}{R_1 + \underline{Z}_н - jX_C}} = \frac{100}{10 - \dfrac{30(29 + j3)}{29 - j27}} = 3{,}3e^{j28°37'}\ \text{А};$$

$$P_и = \text{Re}[E\underline{I}^*] = \text{Re}[100 \cdot 3{,}3e^{-j28°37'}] = 100 \cdot 3{,}3\cos 28°37' =$$

$$= 290\ \text{Вт}.$$

К. п. д.

$$\eta = \frac{P_{\text{н max}}}{P_{\text{и}}} = 100\% = \frac{118}{290}\ 100\% = 40{,}7\%\,.$$

Для расчета коэффициента передачи T сначала найдем ток $\underline{I}_{\text{н}}$:

$$\underline{I}_{\text{н}} = \underline{I}\,\frac{-jX_C}{R_1 + \underline{Z}_{\text{н}} - jX_C} = 3{,}3e^{j28°37'}\cdot\frac{-j30}{29-j27} = 2{,}5e^{-j18°23'}\ \text{А};$$

$$T = \frac{\underline{U}_{\text{п}}}{E} = \frac{\underline{I}_{\text{н}}\underline{Z}_{\text{н}}}{E} = \frac{2{,}5e^{-j18°23'}(19+j3)}{100} = 0{,}48e^{-j9°25'}\,.$$

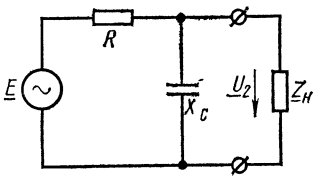


Рис. 2.49

2.61. Для цепи рис. 2.49 найти сопротивление $\underline{Z}_{\text{н}}$, при котором в нем выделится максимальная мощность и вычислить ее. Чему равно отношение мощности, выделяемой в $\underline{Z}_{\text{н}}$, к мощности, доставляемой источником, и коэффициент передачи $T = \underline{U}_2/E$.

Даны: $E = 100$ В; $R = 10$ Ом; $X_C = 20$ Ом.

Д. Частотные характеристики. Единицы измерения частотного интервала

2.62. В схеме рис. 2.50, *а* известны $R = 12$ Ом, $L = 1$ мГн.

Найти выражение коэффициента передачи $\underline{T}(j\omega) = \underline{U}_2(j\omega)/\underline{U}_1(j\omega)$ и построить кривые изменения его модуля, аргумента и времени замедления в функции частоты. Приняв $\omega = \omega_1 = 9\cdot 10^3\ \text{с}^{-1}$, определить изменение коэффициента передачи при изменении частоты на октаву и декаду. Выразить найденные величины в децибелах и неперах.

Р е ш е н и е. Вначале определяем комплексный коэффициент передачи и время замедления при любой частоте

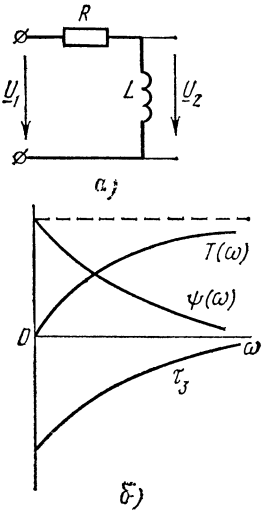


Рис. 2.50

$$\underline{T}(j\omega) = \frac{\underline{U}_2(j\omega)}{\underline{U}_1(j\omega)} = \frac{\dfrac{\underline{U}_1(j\omega)}{R + j\omega L}\,j\omega L}{\underline{U}_1(j\omega)} = \frac{\omega L}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}}\,e^{j\,(90°-\text{arctg}\,\omega L/R)},$$

или, обозначив L/R через τ, получим

$$\underline{T}(j\omega) = \frac{\omega\tau}{\sqrt{1+(\omega\tau)^2}}\,e^{j\,(90°-\text{arctg}\,\omega\tau)} = T(\omega)\,e^{j\psi(\omega)}, \qquad (1)$$

где

$$T(\omega)=\frac{\omega\tau}{\sqrt{1+(\omega\tau)^2}}\ (1),\quad \psi(\omega)=90^\circ-\operatorname{arctg}(\omega\tau), \tag{2}$$

$$\tau_з=\frac{d\psi(\omega)}{d\omega}=-\frac{\tau}{1+(\omega\tau)^2}. \tag{3}$$

По уравнениям (1)—(3) на рис. 2.50, *б* построены требуемые кривые. Найдем изменение коэффициента передачи на октаву и декаду. По формуле (1) имеем

$$T(\omega_1)=\frac{\omega_1\tau}{\sqrt{1+(\omega_1\tau)^2}},\quad T(2\omega_1)=\frac{2\omega_1\tau}{\sqrt{1+(2\omega_1\tau)^2}},$$

$$T(10\omega_1)=\frac{10\omega_1\tau}{\sqrt{1+(10\omega_1\tau)^2}}.$$

Их отношения равны:

$$\frac{T(2\omega_1)}{T(\omega_1)}=2\sqrt{\frac{1+(\omega_1\tau)^2}{1+(2\omega_1\tau)^2}};\quad \frac{T(10\omega_1)}{T(\omega_1)}=10\sqrt{\frac{1+(\omega_1\tau)^2}{1+(10\omega_1\tau)^2}}.$$

По формулам (2.31) и (2.32) и, учитывая, что $\tau = L/R = 1\cdot 10^{-3}/12$ с$^{-1}$, найдем

$$D_{окт}=20\lg\frac{T(2\omega_1)}{T(\omega_1)}=20\lg 2\sqrt{\frac{1+(9\cdot 10^3\cdot 1\cdot 10^{-3}/12)^2}{1+(2\cdot 9\cdot 10^3\cdot 1\cdot 10^{-3}/12)^2}}=$$

$$=20\lg 2\sqrt{\frac{1{,}5625}{3{,}25}}=2{,}84\ \text{дБ/окт}=0{,}327\ \text{Нп/окт};$$

$$D_{дек}=20\lg\frac{T(10\omega_1)}{T(\omega_1)}=20\lg 10\sqrt{\frac{1{,}5625}{57{,}25}}=4{,}36\ \text{дБ/дек}=$$

$$=0{,}5\ \text{Нп/дек}.$$

2.63. Схема состоит из последовательно соединенных $R = 20$ Ом и $C = 1$ мкФ. Ответить на вопросы, поставленные в предыдущей задаче, полагая $\omega_1 = 10^5$ с$^{-1}$. Выходной величиной считать напряжение на емкости.

2.64. Определить максимальное изменение коэффициента передачи напряжения для схемы рис. 2.50 при изменении частоты на октаву и выразить найденное число в децибелах и неперах. Такие же расчеты проделать при изменении частоты в 10 раз.

Указание. Надо составить отношение $T(2\omega_1)/T(\omega_1)$, из которого следует, что коэффициент передачи изменяется не более чем в 2 раза на октаву, так как согласно (2.31) $D(\omega) = 20\lg 2 \approx 20\cdot 0{,}3 = 6$, т. е. не более чем 6 дБ/окт, или на основании (2.30)$6\cdot 0{,}115 = 0{,}7$ Нп/окт.

Аналогично следует убедиться в том, что при изменении частоты в 10 раз коэффициент передачи изменяется не более чем в 10 раз на декаду, т. е. изменение коэффициента передачи напряжения меньше чем 20 дБ/дек, или 2,3 Нп/дек.

2.65. Решить предыдущую задачу для схемы из последовательно соединенных резистора и конденсатора, полагая коэффициент передачи равным $U_C(\omega)/U(\omega)$.

2.66. Для простого добротного последовательного колебательного контура, состоящего из R, L и C, найти максимальное изменение коэффициента передачи напряжения в децибелах и неперах на октаву и декаду, считая выходным напряжение на емкости.

Указание. Находим комплексный коэффициент передачи напряжения $\underline{T}(j\omega)$, а по нему модуль $T(\omega) = 1/\sqrt{[1-(\omega/\omega_0)^2]^2 + (\delta\omega/\omega_0)^2}$, где $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$, $\delta = R/R_C$, $R_C = \sqrt{L/C}$. При $\omega << \omega_0$ $T(\omega) \approx 1$, при $\omega \approx \omega_0$ $T(\omega) = \delta\omega_0/\omega_0$, при $\omega >> \omega_0$ $T(\omega) = \omega/\omega_0$. Из сопоставления последних выражений видно, что наибольшие изменения $T(\omega)$ будут на высоких частотах. Проделывая расчеты, найдем, что изменение коэффициента передачи напряжения не будет превосходить 12 дБ/окт $\approx$ 1,4Нп/окт и 40 дБ/дек $\approx$ 4,6 Нп/дек.

2.67. Составить таблицу отношений двух величин, выраженных в обычных числах, децибелах и неперах для следующих чисел: 10^{-3}, 10^{-2}, 10^{-1}, 1, 10, 10^2, 10^3, 10^4, 10^5, 10^6.

2.68. Как известно, для определения полосы пропускания колебательных контуров принимается уровень, равный $1/\sqrt{2}$. Определить, какому уровню в децибелах и неперах соответствует этот уровень.

2.69. Уровень напряжения на частоте f_1 превышает уровень напряжения на частоте f_2 на 10 дБ. Найти отношение напряжений, выразить его в процентах.

Р е ш е н и е. Из (2.29 а) имеем:

$$20 \lg \frac{U(f_1)}{U(f_2)} = 10 \text{ или } \lg \frac{U(f_1)}{U(f_2)} = 0{,}5.$$

Потенцируя, получим искомое отношение напряжений

$$U(f_1)/U(f_2) = 3{,}16.$$

Превышение напряжения в процентах составляет

$$\frac{U(f_1) - U(f_2)}{U(f_2)} 100\% = \frac{3{,}16U(f_2) - U(f_2)}{U(f_2)} 100\% = 216\%.$$

2.70. Найти, какому соотношению амплитуд соответствует изменение (увеличение или уменьшение) на: а) 1 дБ; б) 0,1 Нп.

2.71. Для цепи рис. 2.51 определить диапазон частот, в котором коэффициент передачи уменьшается не более чем на 10% от максимального значения.

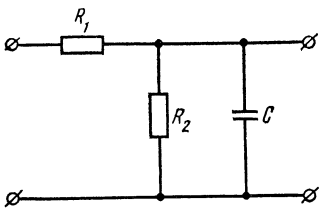


Рис. 2.51

Указание. Из рассмотрения выражения, составленного для коэффициента передачи $T(\omega)$, выясняется, что максимальное значение он принимает при $\omega = 0$. Далее надо составить отношение модулей $T(\omega)/T(0) = 0{,}9$, из которого будет определена граничная частота, соответствующая требованиям условия задачи.

Е. Трехфазные цепи

2.72. К симметричному трехфазному генератору с фазной э. д. с. $E = 127$ В и внутренним сопротивлением $\underline{Z}_0 = (0{,}3 + j0{,}9)$ Ом через линию, сопротивление каждого провода которой $\underline{Z}_{пр} = (0{,}5 + j1)$ Ом, подключена симметричная нагрузка $\underline{Z} = (10 + j6)$ Ом, соединенная звездой (рис. 2.52, *а* и *б*). Определить ток в каждой фазе, фазное и линейное напряжения генератора, ток, фазное и линейное напряжения нагрузки, мощность, доставляемую генератором и расходуемую в нагрузке. Построить векторную диаграмму.

2.73. Приемник энергии, сопротивления фаз которого одинаковы, потребляет мощность 5,46 кВт при $\cos\varphi_ф = 0{,}8$ ($\varphi_ф > 0$). Линейное напряжение на нагрузке равно 370 В. Чему равна фазная э. д. с.

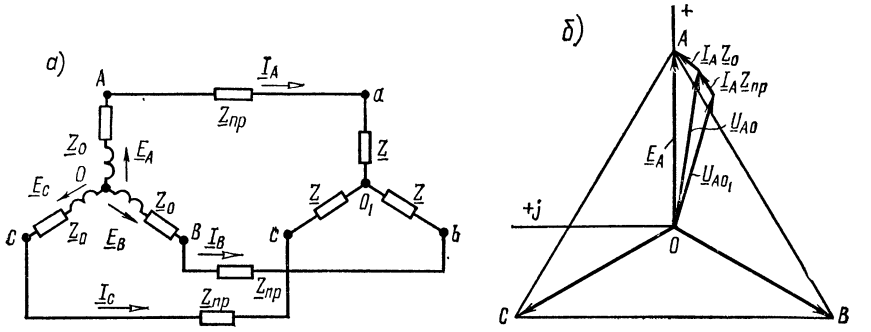


Рис. 2.52

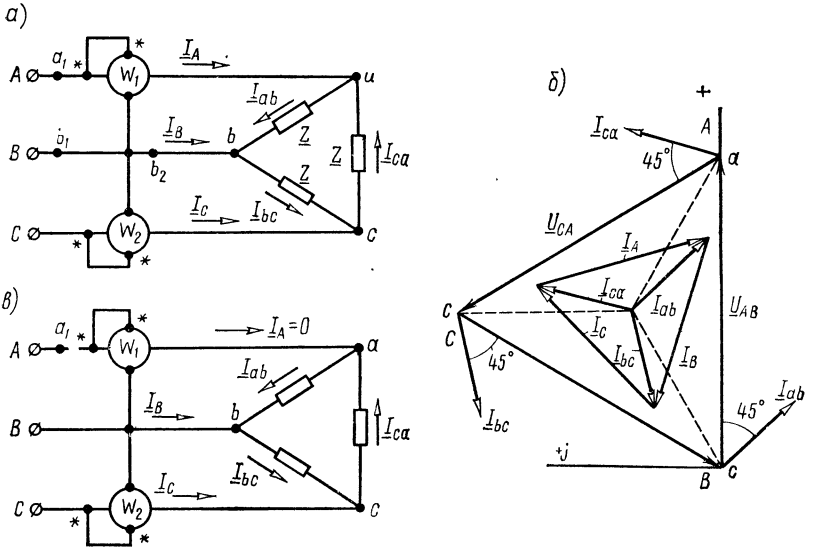


Рис. 2.53

генератора, соединенного звездой, внутреннее сопротивление каждой фазы которого $\underline{Z}_0 = (0{,}3 + j0{,}9)$ Ом, а сопротивление каждого провода линии $\underline{Z}_{\text{пр}} = (0{,}4 + j0{,}8)$ Ом?

2.74. К трехфазной линии с симметричными линейными напряжениями $U_{\text{л}} = 220$ В подключен треугольником приемник, сопротивление каждой фазы которого $\underline{Z} = (10 + j10)$ Ом (рис. 2.53, *а*). Найти токи в каждой фазе нагрузки и линии и показания каждого ваттметра. Найти те же величины в случае обрыва в точке a_1.

Р е ш е н и е. Задачу решим, пользуясь символическим методом. Примем, что комплекс напряжения $U_{\text{л}}$ действителен. Тогда комплексы линейных напряжений:

$$\underline{U}_{AB} = \underline{U}_{ab} = 220 \text{ В}; \quad \underline{U}_{BC} = \underline{U}_{bc} = 220e^{-j120^\circ} \text{В};$$

$$\underline{U}_{CA} = \underline{U}_{ca} = 220e^{-j240^\circ} \text{ В}.$$

Определим комплексы фазных и линейных токов:

$$\underline{I}_{ab} = \frac{\underline{U}_{ab}}{\underline{Z}} = \frac{220}{10 + j10} = 15{,}6e^{-j45^\circ} = (11 - j11) \text{ А};$$

$$\underline{I}_{bc} = \frac{\underline{U}_{bc}}{\underline{Z}} = \frac{220e^{-j120^\circ}}{10 + j10} = 15{,}6e^{-j165^\circ} = (-15 - j4{,}03) \text{ А};$$

$$\underline{I}_{ca} = \frac{\underline{U}_{ca}}{\underline{Z}} = \frac{220e^{-j240^\circ}}{10 + j10} = 15{,}6e^{j75^\circ} = (4{,}03 + j15) \text{ А};$$

$$\underline{I}_A = \underline{I}_{ab} - \underline{I}_{ca} = 6{,}97 - j26 = 26{,}9e^{-j75^\circ} \text{ А};$$

$$\underline{I}_B = \underline{I}_{bc} - \underline{I}_{ab} = -26 + j6{,}97 = 26{,}9e^{j165^\circ} \text{ А};$$

$$\underline{I}_C = \underline{I}_{ca} - \underline{I}_{bc} = 19 + j19 = 26{,}6e^{j45^\circ} \text{ А}.$$

Найдем показания ваттметров:

$$P_1 = \text{Re}\left[\underline{U}_{AB}\underline{I}_A^*\right] = \text{Re}\left[220 \cdot 26{,}9e^{j75^\circ}\right] = 220 \cdot 26{,}9 \cos 75^\circ =$$

$$= 1530 \text{ Вт};$$

$$P_2 = \text{Re}\left[\underline{U}_{CB}\underline{I}_C^*\right] = \text{Re}\left[-220e^{-j120^\circ} \cdot 26{,}9e^{-j45^\circ}\right] =$$

$$= \text{Re}\left[220e^{j60^\circ} \cdot 26{,}9e^{-j45^\circ}\right] = 220 \cdot 26{,}9 \cos 15^\circ = 5730 \text{ Вт}.$$

Активная мощность цепи

$$P = P_1 + P_2 = 1530 + 5730 = 7260 \text{ Вт}.$$

Проверка показывает, что

$$P = 3I_\Phi^2 R = 3 \cdot 15{,}56^2 \cdot 10 = 7260 \text{ Вт}.$$

На рис. 2.53, *б* построена векторная диаграмма напряжений и токов.

Обрыв в точке a_1 (рис. 2.53, *в*). Токи в фазах нагрузки:

$$\underline{I}_{bc} = \frac{\underline{U}_{bc}}{\underline{Z}} = \frac{220e^{-j120^\circ}}{10 + j10} = (-15 - j4{,}04)\ \text{А};$$

$$\underline{I}_{ab} = \underline{I}_{ca} = \frac{\underline{U}_{CB}}{2\underline{Z}} = -\frac{220e^{-j120^\circ}}{2(10 + j10)} = (7{,}5 + j2{,}02)\ \text{А}.$$

Вычислим линейные токи:

$$\underline{I}_A = 0;$$

$$\underline{I}_C = -\underline{I}_B = \underline{I}_{ca} - \underline{I}_{bc} = 22{,}5 + j6{,}05 = 23{,}3e^{j15^\circ}\ \text{А}.$$

Определим показания ваттметров

$$P_1 = 0;$$

$$P_2 = \text{Re}\left[\underline{U}_{CB}\underline{I}^*_C\right] = \text{Re}\left[220e^{j60^\circ} \cdot 23{,}3e^{-j15^\circ}\right] =$$

$$= 220 \cdot 23{,}3 \cos 45^\circ = 3630\ \text{Вт}.$$

2.75. К зажимам симметричной трехфазной сети, линейное напряжение которой равно $U_л$, подключены три одинаковых сопротивления $\underline{Z}$, соединенных треугольником. Условные знаки A и X соответственно обозначают «начало» и «конец» фазы A; B и Y — фазы B; C и Z — фазы C.

Определить, во сколько раз уменьшится ток в подводящих проводах и потребляемая мощность, если те же сопротивления с помощью переключателя $П$ соединить звездой (рис. 2.54).

2.76. К концу линии, сопротивление каждого провода которой $Z_{пр} = (0{,}5 + j1{,}5)$ Ом, подключен соединенный треугольником приемник энергии. Сопротивление каждой его фазы $\underline{Z}_{ab} = \underline{Z}_{bc} = \underline{Z}_{ca} = \underline{Z} = (8{,}4 + j6{,}6)$ Ом. Линейные напряжения в начале линии $U_{AB} = U_{BC} = U_{CA} = 230$ В (рис. 2.55). Рассчитать линейные и фазные токи, а также напряжения на фазах нагрузки, соединенной

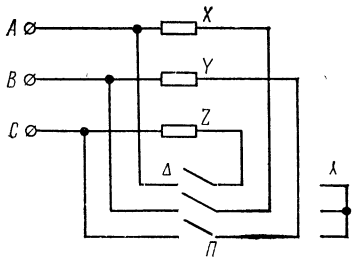


Рис. 2.54

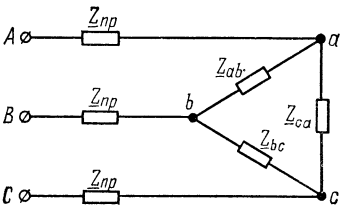


Рис. 2.55

треугольником. Определить потерю напряжения в линии. Построить векторную диаграмму.

Указание. Задачу проще решить при помощи преобразования треугольника сопротивлений нагрузки в эквивалентную звезду.

2.77. а. Для измерения активной мощности трехфазной равномерной нагрузки, имеющей активно-индуктивный характер, соединенной звездой и подключенной к симметричной трехфазной сети,

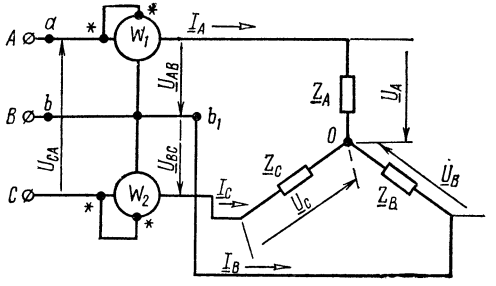


Рис. 2.56

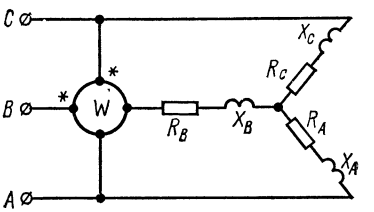


Рис. 2.57

линейное напряжение которой $U_л = 220$ В, были включены два ваттметра (рис. 2.56), показания которых $P_1 = 1080$ Вт и $P_2 = 1920$ Вт. Определить фазное напряжение, ток и сдвиг фаз между ними. Чему равна общая мощность, расходуемая в нагрузке? Построить векторную диаграмму напряжений и токов.

б. Решить задачу, если $U_л = 380$ В, $P_1 = 0$ и $P_2 = 2{,}5$ кВт.

2.78. Чему равно показание ваттметра, включенного в цепь рис. 2.57, и какую мощность он учитывает? Нагрузка фаз симметрична: $R_A = R_B = R_C = 12$ Ом, $X_A = X_B = X_C = 9$ Ом. Система линейных напряжений тоже симметрична $U_л = 380$ В.

2.79. На расстояние $l = 60$ км нужно передать мощность $P = 3000$ кВт при линейном напряжении у потребителей $U_л = 35\,000$ В и $\cos\varphi_ф = 0{,}8$ так, чтобы потеря мощности не превышала 5% от полезной. Определить необходимое для этого количество меди (в тоннах) при: а) трехфазной и б) однофазной системах передачи энергии.

2.80. Симметричный трехфазный трансформатор питает симметричную нагрузку, общая мощность которой $P = 600$ кВт, а $\cos\varphi_ф = 0{,}8$ ($\varphi_ф > 0$). Линейное напряжение на нагрузке $U_л = 6$ кВ. От трансформатора до потребителя проложена воздушная линия, сечение каждого провода которой $s = 35$ мм^2, а длина $l = 2{,}3$ км. Материал проводов линии — медь (удельное сопротивление $\rho = 0{,}0175$ Ом·мм^2/м). Индуктивное сопротивление каждого километра провода равно 0,4 Ом.

Вычислить ток и линейное напряжение в начале линии.

2.81. К симметричному трехфазному генератору с фазной э. д. с. $E = 230$ В и с внутренним сопротивлением $Z_0 = (0{,}3 + j0{,}9)$ Ом подключена несимметричная нагрузка, соединенная в звезду с нулевым

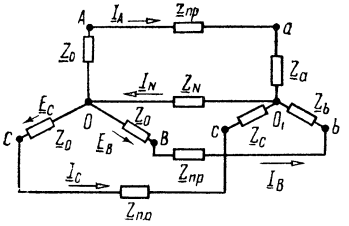


Рис. 2.58

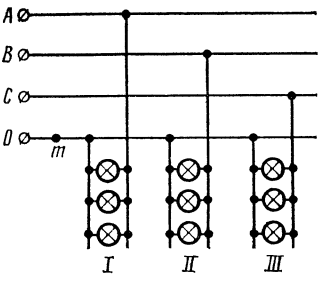


Рис. 2.59

проводом (рис. 2.58). Сопротивления фаз нагрузки: $\underline{Z}_a = (2 + j4)$ Ом, $\underline{Z}_b = (4 - j8)$ Ом, $\underline{Z}_c = 5$ Ом. Сопротивление каждого провода линии $\underline{Z}_{пр} = (0{,}4 + j0{,}3)$ Ом, а сопротивление нулевого провода $\underline{Z}_N = 0{,}5$ Ом. Определить токи и напряжения на каждой фазе нагрузки и генераторе при наличии нулевого провода и при его обрыве.

2.82. В четырехпроводную линию трехфазной симметричной сети с фазным напряжением $U_{AO} = U_{BO} = U_{CO} = U_ф = 120$ В включены три группы одинаковых ламп (рис. 2.59): *I* — 30 ламп, *II* — 25 ламп *III* — 20 ламп. Сопротивление каждой лампы считать неизменным и равным 300 Ом.

Определить ток в нейтральном проводе. Под каким напряжением окажется каждая группа ламп при обрыве нейтрального провода в точке *m*?

2.83. К зажимам трехфазного симметричного источника энергии с линейным напряжением $U_л = 380$ В подключена соединенная звездой несимметричная нагрузка (рис. 2.60, *а*), сопротивления фаз которой $\underline{Z}_A = (6 + j8)$ Ом, $\underline{Z}_B = (24 + j7)$ Ом и $\underline{Z}_C = 20$ Ом.

Определить токи и напряжения на каждой фазе, показания каждого ваттметра, мощность, расходуемую в нагрузке.

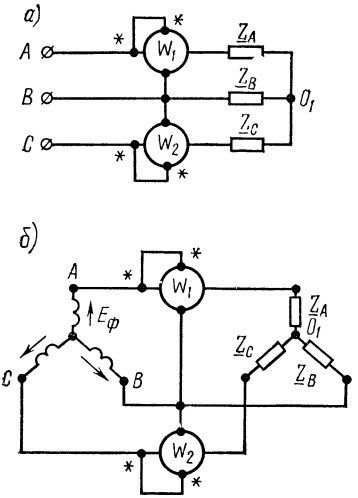


Рис. 2.60

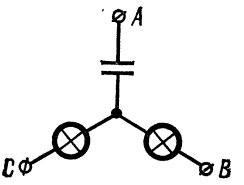


Рис. 2.61

Указание. Способ 1. Заданная схема может быть заменена новой (рис. 2.60, *б*), для которой фазные напряжения $U_ф = U_л/\sqrt{3}$, а внутренние сопротивления источников равны нулю. Затем по (2.36) найти $\underline{U}_N$, а по (2.37) — искомые токи. Способ 2. Сначала найти напряжение на фазах нагрузки по (2.38), а затем токи.

2.84. Для определения порядка чередования фаз применяется схема рис. 2.61, состоящая из трех равных по модулю сопротивлений, соединенных звездой, из которых одно емкостное, а два других — активные (лампы накаливания). Система линейных напряжений $U_л$ симметрична. Определить фазные напряжения и построить векторную диаграмму.

Замечание. При расчете принять, что к фазе *A* подключается нагрузка, содержащая конденсатор. Тогда получится, что лампа, включенная в фазу *B*, будет находиться под напряжением в 3,71 раза больше, чем та, которая в фазе *C*.

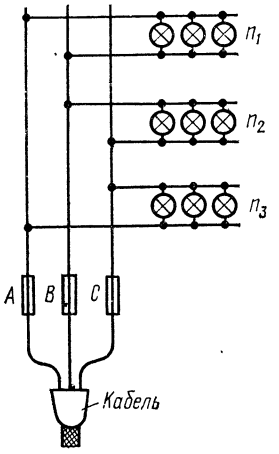


Рис. 2.62

2.85. В трехфазную симметричную сеть без нулевого провода с линейным напряжением $U_л = 220$ В включены три группы одинаковых ламп (рис. 2.62). В первой группе имеется $n_1 = 17$ ламп, во второй $n_2 = 23$ лампы и в третьей — $n_3 = 19$ ламп. Сопротивление каждой лампы считать неизменным и равным 590 Ом.

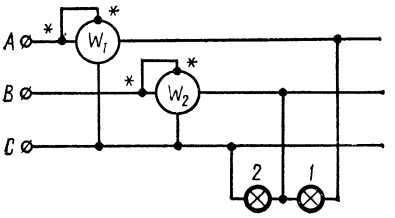


Рис. 2.63

а. Определить линейные и фазные токи. б. Вычислить все токи и напряжения на зажимах каждой группы ламп при перегорании предохранителя на вводе фазы *C*.

2.86. В трехпроводную систему трехфазного тока, линейные напряжения которой симметричны и равны $U_л = 127$ В, включены две лампы, потребляющие мощности $P_1 = 55$ Вт и $P_2 = 200$ Вт (рис. 2.63). Рассчитать токи каждой лампы и в каждом из проводов линии. Определить показания ваттметров.

2.87. Вольтметры, подключенные к линейным зажимам трехфазной системы, показали $U_{AB} = 210$ В, $U_{BC} = 220$ В и $U_{CA} = 225$ В. К указанной системе подключен приемник энергии, соединенный звездой, сопротивления фаз которого $\underline{Z}_A = 25$ Ом, $\underline{Z}_B = (24 + j7)$ Ом, $\underline{Z}_C = (16 - j12)$ Ом (см. рис. 2.56). Найти токи и фазные напряжения. Каковы показания ваттметров?

Указание. По заданным значениям линейных напряжений следует построить треугольник напряжений ABC (рис. 2.64). Углы векторов $\underline{U}_{CA}$ и $\underline{U}_{BC}$ определяются решением этого треугольника. Например, угол ψ_{BC} определяется из следующего равенства:

$$\cos \psi_{BC} = \frac{U_{AB}^2 + U_{BC}^2 - U_{CA}^2}{2U_{AB}U_{BC}}.$$

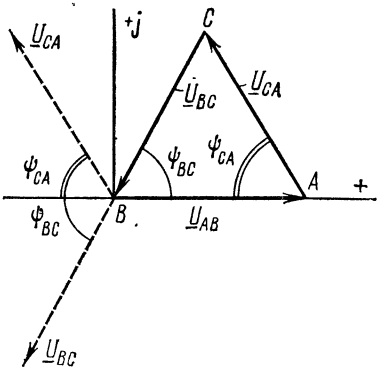


Рис. 2.64

2.88. Линейные напряжения трехфазной сети: $U_{AB} = 120$ В, $U_{BC} = 110$ В и $U_{CA} = 125$ В. К этой сети подключена нагрузка, соединенная треугольником, сопротивления фаз которой $Z_{AB} = 25$ Ом, $Z_{BC} = 20$ Ом и $\underline{Z}_{CA} = (16 + j8)$ Ом. Найти линейные и фазные токи.

2.89. Система линейных напряжений симметрична $U_л = 220$ В. Сопротивления фаз нагрузки (рис. 2.65): $\underline{Z}_A = \underline{Z}_B = 20$ Ом, $\underline{Z}_C = (24 - j7)$ Ом, $\underline{Z}_{AB} = \underline{Z}_{BC} = (20 + j15)$ Ом и $\underline{Z}_{CA} = 20$ Ом. Вычислить все токи.

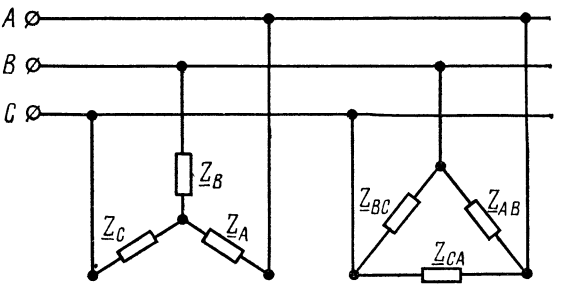


Рис. 2.65

Ж. Электронные цепи в линейном режиме

2.90. На рис. 2.66, *а* приведена схема одного каскада усилителя переменного напряжения (его частота ω), а на рис. 2.66, *б* ее эквивалентная схема для высоких частот. Параметры триода: крутизна

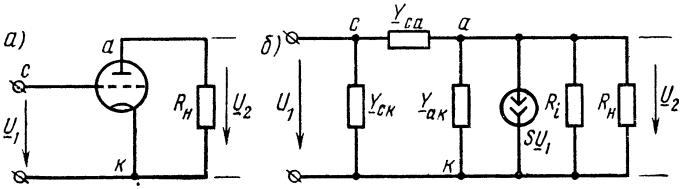


Рис. 2.66

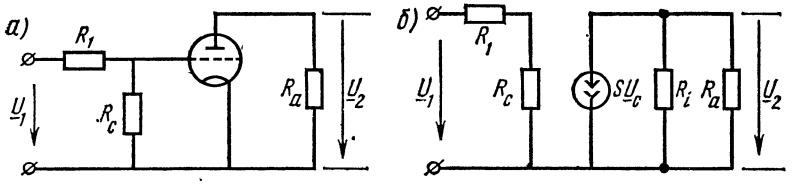


Рис. 2.67

анодно-сеточной характеристики анодного тока лампы S, ее внутреннее сопротивление R_i, емкости $C_{ск}$ (сетка — катод), $C_{са}$ (сетка — анод) и $C_{ак}$ (анод — катод) известны, сопротивление нагрузки $R_н$. Определить коэффициент усиления $\underline{T}_U = \underline{U}_2/\underline{U}_1$. На схеме 2.66, *б*: $\underline{Y}_{ск} = j\omega C_к$; $\underline{Y}_{са} = j\omega C_а$, $\underline{Y}_{ак} = j\omega C_{ак}$.

Р е ш е н и е. Схема цепи рис. 2.66, *б* имеет три узла (*с*, *а*, *к*). Для ее расчета по методу узловых потенциалов достаточно составить не два, а лишь одно уравнение (так как известно напряжение между узлами *а* и *к* $\underline{U}_{ак} = \underline{V}_а - \underline{V}_к = \underline{U}_2$). Составим это уравнение для узла *а*, приняв $\underline{V}_к = 0$:

$$\underline{V}_a\left(\underline{Y}_{са} + \underline{Y}_{ак} + \frac{1}{R_i} + \frac{1}{R_н}\right) - \underline{V}_с\underline{Y}_{са} = -SU_1.$$

Отсюда, учитывая, что $\underline{V}_а = \underline{U}_2$ и $\underline{V}_с - \underline{V}_к = \underline{V}_с = \underline{U}_1$, находим искомое отношение

$$\underline{T}_U = \frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_1} = \frac{R_iR_н(\underline{Y}_{са} - S)}{R_iR_н\underline{Y}_{са} + R_iR_н\underline{Y}_{ак} + R_н + R_i}.$$

В случае низких частот можно полагать:

$$\underline{Y}_{ск} = \underline{Y}_{са} = \underline{Y}_{ак} = 0.$$

Тогда

$$\underline{T}_U = \frac{-R_iSR_н}{R_i + R_н} = \frac{-\mu R_н}{R_i + R_н},$$

где $\mu = R_iS$ — коэффициент усиления.

Знак минус указывает на то, что фазы $\underline{U}_2$ и $\underline{U}_1$ противоположны.

2.91. Определить коэффициент усиления по напряжению $\underline{T}_U = \underline{U}_2/\underline{U}_1$ усилительного каскада (рис. 2.67, *а*). Параметры лампы S и R_i, а также сопротивления R_1, $R_с$ и $R_а$ известны.

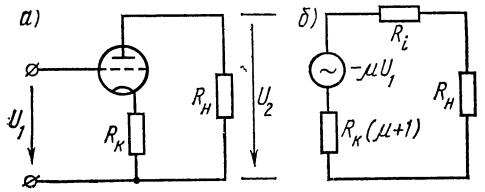


Рис. 2.68

Указание. Воспользоваться схемой замещения рис. 2.67, *б*.

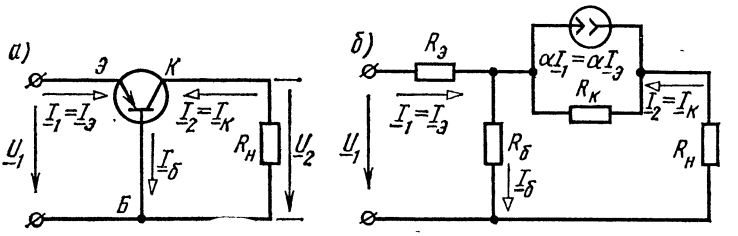


Рис. 2.69

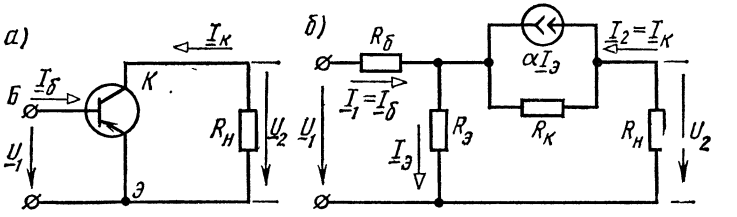


Рис. 2.70

2.92. Для схемы усилительного каскада рис. 2.68, *а* определить коэффициент усиления по напряжению $\underline{T}_U = \underline{U}_2/\underline{U}_1$. Параметры триода S, R_i и сопротивления $R_н$ и $R_к$ известны.

Указание. Воспользоваться схемой замещения рис. 2.68, *б*.

2.93. На рис. 2.69, *а* изображена схема транзистора, включенного по схеме с общей базой, а на рис. 2.69, *б* — его эквивалентная схема. Сопротивления: эмиттера — $R_э$, базы — $R_б$, коллектора — $R_к$ и α известны.

Найти коэффициент усиления $\underline{T}_U = \underline{U}_2/\underline{U}_1$ при нагрузке на сопротивление $R_н$.

2.94. Транзистор с общим эмиттером нагружен на сопротивление $R_н$ (рис. 2.70, *а*). Его параметры $R_э$, $R_б$, $R_к$, α известны. Определить коэффициент передачи напряжения $\underline{T}_U = \underline{U}_2/\underline{U}_1$.

Указание. Воспользоваться эквивалентной схемой транзистора (рис. 2.70,*б*).

ГЛАВА ТРЕТЬЯ

ОДИНОЧНЫЕ КОЛЕБАТЕЛЬНЫЕ КОНТУРЫ

ОСНОВНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ И СООТНОШЕНИЯ

1. Резонанс. Это явление в электрической цепи, содержащей участки, имеющие индуктивный и емкостный характер, при котором разность фаз напряжения и тока на входе цепи равна нулю.

Эквивалентное реактивное сопротивление или реактивная проводимость цепи, где имеется резонанс, равны нулю.

2. Резонанс напряжений. Этот резонанс возможен на участке цепи, содержащем последовательно соединенные индуктивный и емкостный элементы. Цепь схемы (рис. 3.1) называют последовательным контуром.

Входное комплексное сопротивление последовательного колебательного контура

$$\underline{Z} = R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) = R + jX = Ze^{j\varphi}, \qquad (3.1)$$

где $X = \omega L - 1/\omega C$ — реактивное сопротивление контура: $Z = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}$ — полное сопротивление контура; $\varphi = \operatorname{arctg}\frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}$ — сдвиг фаз между напряжением и током.

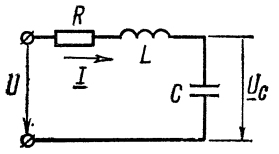


Рис. 3.1

Условие резонанса напряжений

$$X = 0 \text{ или } \omega L = 1/\omega C. \qquad (3.2)$$

Угловая резонансная частота

$$\omega_0 = 2\pi f_0 = 1/\sqrt{LC}. \qquad (3.3)$$

При резонансе напряжений применяются следующие соотношения и формулы:

характеристическое сопротивление контура — сопротивление каждого из реактивных элементов при резонансе

$$R_c = \omega_0 L = 1/\omega_0 C = \sqrt{L/C}, \qquad (3.4)$$

добротность контура

$$Q = R_c/R, \qquad (3.5)$$

затухание контура

$$\delta = 1/Q. \qquad (3.6)$$

При резонансе напряжений ток в конутре

$$I_0 = U/R, \tag{3.7}$$

а напряжение на индуктивности равно напряжению на емкости:

$$U_{L0} = U_{C0} = I_0 R_c = UQ = U/\delta. \tag{3.8}$$

Абсолютная расстройка

$$\Delta\omega = \omega - \omega_0 \text{ или } \Delta f = f - f_0. \tag{3.9}$$

Относительная расстройка

$$\Delta\omega/\omega_0 = \Delta f/f_0. \tag{3.10}$$

Обобщенная расстройка

$$\xi = \frac{X}{R} = \frac{\omega L - 1/\omega C}{R} = Q\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right) = \operatorname{tg}\varphi. \tag{3.11а}$$

Зависимость комплексного тока в контуре от обобщенной расстройки

$$\underline{I} = \frac{\underline{U}}{\underline{Z}} = \frac{\underline{U}}{R(1 + j\xi)} = \frac{U e^{-j\varphi}}{R\sqrt{1 + \xi^2}} = \frac{U e^{-j\varphi}}{Z}, \tag{3.12а}$$

где $\underline{Z} = R + jX = R + j\xi R$ — комплексное полное сопротивление;

$Z = R\sqrt{1 + \xi^2}$ — модуль полного сопротивления;

$\varphi = \operatorname{arctg}\xi$ — сдвиг фаз между напряжением и током. (3.13а)

Уравнение резонансной кривой тока есть отношение модуля тока при любой частоте к току при резонансной частоте (при неизменных значениях напряжения и параметров цепи):

$$T_I = \frac{I}{I_0} = \left|\frac{1}{1 + j\xi}\right| = \frac{1}{\sqrt{1 + \xi^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left[Q\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)\right]^2}}. \tag{3.14а}$$

Уравнение фазовой характеристики

$$\varphi = \operatorname{arctg}\xi = \operatorname{arctg}\frac{X}{R} = \operatorname{arctg} Q\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega}{\omega_0}\right). \tag{3.11б}$$

Комплексные коэффициенты передачи по напряжению

$$\left.\begin{aligned} T_C &= \frac{\underline{U}_C}{U} = -j\frac{\omega_0}{\omega}\cdot\frac{Q}{1 + j\xi}; \\ T_L &= \frac{\underline{U}_L}{U} = j\frac{\omega}{\omega_0}\cdot\frac{Q}{1 + j\xi}. \end{aligned}\right\} \tag{3.15а}$$

При небольших расстройках (т. е. когда $\Delta\omega < R/2L$) формулы (3.11)—(3.15) имеют вид

$$\xi = \frac{X}{R} \approx 2Q\frac{\Delta\omega}{\omega_0}; \quad X \approx 2R_c\frac{\Delta\omega}{\omega_0}; \tag{3.11в}$$

$$\underline{I} \approx \frac{\underline{U}}{R\left(1 + j2Q\frac{\Delta\omega}{\omega_0}\right)} = \frac{Ue^{-j\varphi}}{R\sqrt{1 + \left(2Q\frac{\Delta\omega}{\omega_0}\right)^2}}; \tag{3.12б}$$

$$Z \approx R\sqrt{1 + \left(2Q\frac{\Delta\omega}{\omega_0}\right)^2}, \varphi \approx \operatorname{arctg} 2Q\frac{\Delta\omega}{\omega_0}; \tag{3.13б}$$

$$T_I = \frac{I}{I_0} \approx \frac{1}{\sqrt{1 + \left(2Q\frac{\Delta\omega}{\omega_0}\right)^2}}; \tag{3.14б}$$

$$\underline{T}_C = \frac{\underline{U}_C}{U} \approx -j\frac{Q}{1 + j2Q\frac{\Delta\omega}{\omega_0}}; \quad \underline{T}_L = \frac{\underline{U}_L}{U} \approx$$

$$\approx j\frac{Q}{1 + j2Q\frac{\Delta\omega}{\omega_0}}. \tag{3.15б}$$

Полоса пропускания определяется из условия, что ток на частотах f_1 и f_2, соответствующих границе полосы пропускания, уменьшается по сравнению с резонансным в $\sqrt{2}$ раз. Это соответствует 3 дБ.

Абсолютное и относительное значения полосы пропускания определяются по формулам

$$S_a = f_2 - f_1 = f_0/Q; \tag{3.16}$$

$$S_r = S_a/f_0 = 1/Q. \tag{3.17}$$

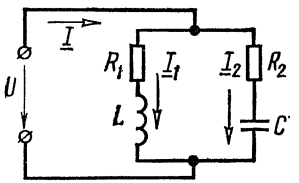


Рис. 3.2

3. Резонанс токов. Он может быть в участке электрической цепи, содержащей параллельно соединенные индуктивный и емкостной элементы.

Резонанс токов для цепи с потерями энергии в обеих ветвях. Цепь рис. 3.2 называют простым параллельным колебательным контуром.

Условие резонанса

$$B_1 = -B_2 \text{ или } \frac{\omega L}{R_1^2 + (\omega L)^2} = \frac{1/\omega C}{R_2^2 + (1/\omega C)^2}. \tag{3.18а}$$

Угловая резонансная частота

$$\omega_{рез} = \frac{1}{\sqrt{LC}}\sqrt{\frac{R_c^2 - R_1^2}{R_c^2 - R_2^2}}, \tag{3.19а}$$

где характеристическое сопротивление

$$R_c = \sqrt{L/C}. \tag{3.20}$$

Сопротивление параллельного контура при резонансе

$$Z_{\text{рез}} = R_{\text{рез}} = \frac{R_c^2 + R_1 R_2}{R_1 + R_2}. \tag{3.21а}$$

Добротность контура

$$Q = R_c/(R_1 + R_2). \tag{3.22}$$

Ток в неразветвленной части цепи при резонансе

$$I_{\text{рез}} = U/R_{\text{рез}}. \tag{3.23}$$

Частные случаи резонанса токов для цепи рис. 3.2.

Цепь не имеет потерь ($R_1 = R_2 = 0$).

Условие резонанса

$$1/(\omega_{\text{рез}} L) = \omega_{\text{рез}} C. \tag{3.18б}$$

Угловая резонансная частота

$$\omega_{\text{рез}} = \omega_0 = 1/\sqrt{LC}. \tag{3.19б}$$

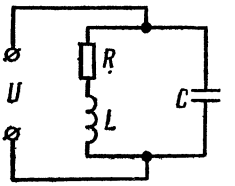


Рис. 3.3

Сопротивление контура при резонансе

$$Z_{\text{рез}} = \infty. \tag{3.21б}$$

Для добротного контура $Q >> 1$ (рис. 3.2 и 3.3), т. е. при малых потерях можно считать, что

$$\omega_{\text{рез}} \approx \omega_0 = 1/\sqrt{LC}. \tag{3.19в}$$

Сопротивление этого контура при резонансе

$$R_{\text{рез}} = \frac{R_c^2}{R_1 + R_2} = \frac{R_c^2}{R} = Q^2 R = \frac{L}{RC}, \tag{3.21в}$$

где $R = R_1 + R_2$.

Токи в каждой из ветвей при резонансе примерно одинаковы $I_{1\text{рез}} \approx I_{2\text{рез}}$ и каждый из них больше тока в неразветвленной части цепи $I_{\text{рез}}$ в Q раз:

$$I_{1\text{рез}} / I_{\text{рез}} \approx I_{2\text{рез}} / I_{\text{рез}} \approx Q. \tag{3.24}$$

Мощность, выделяемая в параллельном контуре при резонансе,

$$P_{\text{рез}} = I_{\text{рез}}^2 R_{\text{рез}} = I_{1\text{рез}}^2 R_1 + I_{2\text{рез}}^2 R_2. \tag{3.25}$$

При небольшой расстройке контура ($\Delta\omega = \omega - \omega_{\text{рез}}$), т. е. когда

$$\Delta\omega < (R_1 + R_2)/2L = R/2L, \tag{3.26}$$

комплексное сопротивление можно определять по приближенной формуле

$$\left.\begin{aligned} &\underline{Z}=\frac{R_{\text{рез}}}{1+j\xi}=\frac{R_{\text{рез}}}{1+\xi^2}-j\,\frac{R_{\text{рез}}}{1+\xi^2}\,\xi=R_{\text{эк}}+jX_{\text{эк}}=Z_{\text{эк}}e^{j\varphi_{\text{эк}}},\\ &\text{где}\\ &R_{\text{эк}}=\frac{R_{\text{рез}}}{1+\xi^2},\quad X_{\text{эк}}=-\frac{R_{\text{рез}}}{1+\xi^2}\,\xi,\quad Z_{\text{эк}}=\frac{R_{\text{рез}}}{\sqrt{1+\xi^2}},\\ &\varphi_{\text{эк}}=-\operatorname{arctg}\xi,\quad \xi=\frac{\omega L-\dfrac{1}{\omega C}}{R_1+R_2}. \end{aligned}\right\}\quad(3.27)$$

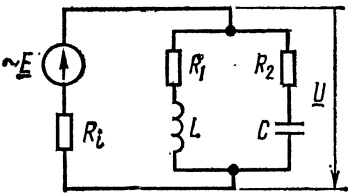


Рис. 3.4

Подключение простого параллельного контура к источнику с э.д.с. $\underline{E}$ и внутренним сопротивлением R_i показано на рис. 3.4.

Ток в неразветвленной части цепи и напряжение на параллельном контуре $\underline{U}$ при любой частоте определяются по формулам

$$\underline{I}=\frac{\underline{E}}{R_i+\underline{Z}};\quad \underline{U}=\frac{E\underline{Z}}{R_i+\underline{Z}},\quad(3.28)$$

а при резонансе:

$$\underline{I}_{\text{рез}}=\frac{\underline{E}}{R_i+R_{\text{рез}}};\quad \underline{U}_{\text{рез}}=\frac{\underline{E}R_{\text{рез}}}{R_i+R_{\text{рез}}}.\quad(3.29)$$

Отношение этих напряжений

$$\frac{\underline{U}}{\underline{U}_{\text{рез}}}=\frac{1}{1+jQ_{\text{эк}}\left(\dfrac{\omega}{\omega_0}-\dfrac{\omega_0}{\omega}\right)}=\frac{1}{\sqrt{1+\left[Q_{\text{эк}}\left(\dfrac{\omega}{\omega_0}-\dfrac{\omega_0}{\omega}\right)\right]^2}}\,e^{-j\varphi_{\text{эк}}},\quad(3.30)$$

где эквивалентная (приведенная) добротность

$$Q_{\text{эк}}=\frac{Q}{1+R_{\text{рез}}/R_i},\quad(3.31)$$

а угол сдвига фаз напряжения на контуре при любой частоте к тому же напряжению при резонансе

$$\varphi_{\text{эк}}=\operatorname{arctg}Q_{\text{эк}}\left(\frac{\omega}{\omega_0}-\frac{\omega_0}{\omega}\right).\quad(3.32)$$

Полоса пропускания определяется из условия, что $U/U_{\text{рез}}=1/\sqrt{2}$.

Абсолютная и относительная полосы пропускания

$$S_{aU} = f_2 - f_1 = f_{\text{рез}}/Q_{\text{эк}}; \tag{3.33}$$

$$S_{rU} = S_{aU}/f_{\text{рез}} = 1/Q_{\text{эк}}. \tag{3.34}$$

Комплексный коэффициент передачи напряжения — отношение комплексного напряжения на параллельном контуре к э. д. с. источника при любой частоте:

$$\underline{T}_U = \frac{\underline{U}}{\underline{E}} = \frac{Q_{\text{эк}} \dfrac{R_c}{R_i}}{1 + jQ_{\text{эк}}\left(\dfrac{\omega}{\omega_0} - \dfrac{\omega_0}{\omega}\right)}. \tag{3.35}$$

При резонансе

$$T_{U\,\text{рез}} = Q_{\text{эк}} \frac{R_c}{R_i}. \tag{3.36}$$

Их отношение

$$\frac{\underline{T}_U}{\underline{T}_{U\,\text{рез}}} = \frac{1}{1 + jQ_{\text{эк}}\left(\dfrac{\omega}{\omega_0} - \dfrac{\omega_0}{\omega}\right)}. \tag{3.37}$$

4. Резонанс токов в сложном параллельном контуре (рис. 3.5).

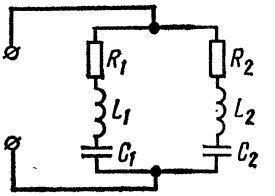


Рис. 3.5

Для добротных контуров, у которых

$$R_1 \ll |X_1| = |\omega L_1 - 1/\omega C_1| \quad \text{и} \quad R_2 \ll |X_2| = |\omega L_2 - 1/\omega C_2|,$$

комплексное сопротивление определяется по приближенной формуле

$$\underline{Z} = \frac{-X_1X_2}{R + jX} = -\frac{RX_1X_2}{R^2 + X^2} + j\,\frac{XX_1X_2}{R^2 + X^2} = R_{\text{эк}} + jX_{\text{эк}}, \tag{3.38}$$

где

$$R = R_1 + R_2, \quad X = X_1 + X_2, \quad R_{\text{эк}} = -\frac{RX_1X_2}{R^2 + X^2}, \quad X_{\text{эк}} = \frac{XX_1X_2}{R^2 + X^2}.$$

Условие резонанса токов (приближенное)

$$X_1 \approx -X_2 \text{ или } \omega_{\text{рез}} L_1 - \frac{1}{\omega_{\text{рез}} C_1} \approx \frac{1}{\omega_{\text{рез}} C_2} - \omega_{\text{рез}} L_2, \tag{3.39}$$

отсюда угловая резонансная частота

$$\omega_{\text{рез}} \approx \omega_0 = 1/\sqrt{LC}, \tag{3.40}$$

где $L = L_1 + L_2$ — полная индуктивность контура; $C = C_1C_2/(C_1 + C_2)$ — полная емкость контура.

Добротность сложного контура

$$\left.\begin{aligned} &Q = R_c/R = \omega_{\text{рез}}L/R = 1/(\omega_{\text{рез}} CR), \\ \text{где}\quad &R_c = \sqrt{L/C}, \quad R = R_1 + R_2. \end{aligned}\right\} \tag{3.41}$$

Полное сопротивление контура при резонансе определяется реактивным сопротивлением каждой из ветвей

$$R_{\text{рез}} = X_1^2/R = X_2^2/R, \tag{3.42}$$

где $R = R_1 + R_2$.

Если коэффициенты включения обозначить $m_L = L_1/L$, $m_C = C/C_1$, то полное сопротивление контура при резонансе

$$R_{\text{рез}} = Q^2R\,(m_L - m_C)^2. \tag{3.43}$$

Эта формула показывает возможность изменения величины $R_{\text{рез}}$ в широких пределах при данных L и C путем их перераспределения по ветвям при неизменной частоте резонанса токов.

УПРАЖНЕНИЯ И ЗАДАЧИ

А. Резонанс напряжений

3.1. Определить емкость C конденсатора, который надо включить последовательно с катушкой, имеющей активное сопротивление $R = 16$ Ом и индуктивность $L = 158$ мкГн, для того чтобы цепь была настроена на резонанс при частоте $f_0 = 1$ МГц. Найти ток, мощность, выделяемую в цепи, напряжения на конденсаторе и катушке при резонансе, если приложенное к цепи напряжение $U = 0{,}8$ В.

3.2. Последовательный колебательный контур (R, L, C) подключен к источнику синусоидальной э. д. с. $E = 1{,}6$ В с внутренним сопротивлением $R_i = 16$ Ом. При какой величине сопротивления контура R в нем выделится максимальная мощность при резонансе и чему она будет равна?

3.3 Цепь состоит из индуктивной катушки (R, L), соединенной последовательно с конденсатором без потерь. Приложенное ко всей цепи напряжение $U = 35$ В. Определить напряжение на катушке при резонансе, если при этом напряжение на конденсаторе равно 120 В.

3.4. Цепь схемы рис. 3.1, настроенная на резонанс при угловой частоте 5000 $с^{-1}$, потребляет мощность 0,1 Вт при токе 0,1 А. Напряжение на конденсаторе 200 В. Найти параметры цепи R, L, C и приложенное к ней напряжение.

3.5. Какому условию должны удовлетворять частоты f_1 и f_2, при которых цепь, составленная из последовательно соединенных R, L, C, обладает одинаковыми по абсолютной величине, но противоположными по знаку реактивными сопротивлениями?

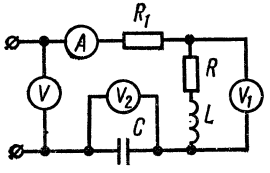


Рис. 3.6

3.6. Найти параметры катушки (R, L), емкость C конденсатора и сопротивление реостата R_1, включенного в цепь, изображенную на рис. 3.6, если при резонансе приборы показали $U = 200$ В, $U_{10} = 204$ В, $U_{20} = 180$ В, $I_0 = 4$ А. Частота переменного тока $f = 50$ Гц.

3.7. Реостат с активным сопротивлением

$R = 100$ Ом, катушка с индуктивностью $L = 5{,}05$ мГн и конденсатор емкостью $C = 0{,}05$ мкФ соединены последовательно. Вычислить резонансную частоту, характеристическое сопротивление, затухание контура, напряжения U_{L0} и U_{C0} при резонансной частоте. При каких частотах напряжения на конденсаторе $U_{C\max}$ и катушке $U_{L\max}$ достигнут максимума?

Чему они будут равны, если действующее значение напряжения переменной частоты, приложенного к цепи, $U = 10$ В?

Р е ш е н и е.

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{5{,}05 \cdot 10^{-3}\ 0{,}05 \cdot 10^{-6}}} = 6{,}28 \cdot 10^4\ \text{с}^{-1};$$

$$f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{2\pi \cdot 10^4}{2\pi} = 10^4\ \text{Гц};$$

$$R_c = \sqrt{L/C} = \sqrt{5{,}05 \cdot 10^{-3}(0{,}05 \cdot 10^{-6})} = 318\ \text{Ом};$$

$$\delta = R/R_c = 100/318 = 0{,}314;$$

$$U_{L0} = U_{C0} = I_0 R_c = \frac{U}{R} R_c = \frac{10}{100} \cdot 318 = 31{,}8\ \text{В}.$$

Частоты, при которых напряжения на индуктивности и емкости максимальны, и значения этих максимальных напряжений определяются по формулам, известным из теории:

$$\omega_L = \omega_0 \sqrt{\frac{2}{2 - \delta^2}} = 6{,}28 \cdot 10^4 \sqrt{\frac{2}{2 - 0{,}314^2}} = 6{,}45 \cdot 10^4\ \text{с}^{-1};$$

$$\omega_C = \omega_0 \sqrt{\frac{2 - \delta^2}{2}} = 6{,}13 \cdot 10^4\ \text{с}^{-1},$$

$$f_L = \frac{\omega_L}{2\pi} = 10\,250\ \text{Гц}; \quad f_C = \frac{\omega_C}{2\pi} = 9750\ \text{Гц};$$

$$U_{L\,\max} = U_{C\,\max} = \frac{2U}{\delta \sqrt{4 - \delta^2}} = \frac{2 \cdot 10}{0{,}314 \sqrt{4 - 0{,}314^2}} = 32{,}2\ \text{В}.$$

3.8. Катушка с индуктивностью $L = 5{,}05$ мГн и конденсатор с емкостью $C = 0{,}05$ мкФ соединены последовательно с реостатом, сопротивление которого R. Ответить на вопросы задачи 3.7 для двух значений сопротивления: 1) $R = 318$ Ом и 2) $R = 450$ Ом.

3.9. Известно, что в последовательном колебательном контуре (см. рис. 3.1) при резонансной частоте 1 кГц отношение напряжения на емкости к напряжению на входе равно 50. Емкость $C = 0{,}5$ мкФ. Вычислить R и L контура.

3.10. Электрическая цепь состоит из последовательно соединенных резистора, сопротивление которого $R = 10$ Ом, катушки индуктивностью $L = 100$ мкГн и конденсатора емкостью $C = 100$ пФ. Определить резонансную частоту ω_0, характеристическое сопротивление R_c, затухание δ и добротность Q. Чему равны ток I_0, расходуемая в

цепи мощность P_0, напряжения на индуктивной катушке U_{L0} и конденсаторе U_{C0} при резонансе, если контур включен на напряжение $U = 1$ В? Вычислить абсолютное значение полосы пропускания контура.

Р е ш е н и е. По формулам (3.3)—(3.8) находим:

$$\omega_0 = 1/\sqrt{LC} = 1/\sqrt{100 \cdot 10^{-6} \cdot 100 \cdot 10^{-12}} = 10^7 \text{ с}^{-1};$$

$$f_0 = \omega_0/2\pi = 10^7/2\pi \approx 1{,}6 \cdot 10^6 \text{ Гц} = 1{,}6 \text{ МГц};$$

$$R_c = \sqrt{L/C} = \sqrt{100 \cdot 10^{-6}/(100 \cdot 10^{-12})} = 1000 \text{ Ом};$$

$$\delta = R/R_c = 10/1000 = 0{,}01;$$

$$Q = R_c/R = 1000/10 = 100; \quad I_0 = U/R = 1/10 = 0{,}1 \text{ А} = 100 \text{ мА};$$

$$P_0 = I_0^2 R = 0{,}1^2 \cdot 10 = 0{,}1 \text{ Вт} = 100 \text{ мВт};$$

$$U_{L0} = U_{C0} = I_0 R_c = 0{,}1 \cdot 1000 = 100 \text{ В}.$$

Полосу пропускания определяем по формуле (3.16):

$$S_a = \frac{f_0}{Q} = \frac{1{,}6 \cdot 10^6}{100} = 16\,000 \text{ Гц}.$$

3.11. К контуру, данные которого приведены в задаче 3.10, подведено напряжение $U = 1$ В с угловой частотой $\omega = 1{,}002 \cdot 10^7$ с$^{-1}$. Чему при этом равны реактивное и полное сопротивление цепи, ток, мощность, напряжение на конденсаторе, сдвиг фаз φ между приложенным напряжением и током, сдвиг фаз φ' между приложенным напряжением и напряжением на конденсаторе, коэффициенты передачи по току и по напряжению?

Р е ш е н и е. Прежде всего вычислим абсолютную, относительную и обобщенную расстройки по формулам (3.9), (3.10) и (3.11в):

$$\Delta\omega = \omega - \omega_0 = 0{,}002 \cdot 10^7 \text{ с}^{-1}; \quad \Delta\omega/\omega_0 = 0{,}002;$$

$$\xi = 2Q \frac{\Delta\omega}{\omega_0} = 2 \cdot 100 \cdot 0{,}002 = 0{,}4.$$

Реактивное и полное сопротивление находим из (3.11в) и (3.13б):

$$X = \xi R = 0{,}4 \cdot 10 = 4 \text{ Ом};$$

$$Z = R\sqrt{1 + \xi^2} = 10\sqrt{1 + 0{,}4^2} = 10{,}77 \text{ Ом}.$$

Ток и расходуемая в цепи мощность:

$$I = U/Z = 1/10{,}77 = 0{,}093 \text{ А} = 93 \text{ мА};$$

$$P = I^2 R = 0{,}093^2 \cdot 10 = 0{,}0865 \text{ Вт} = 86{,}5 \text{ мВт}.$$

Напряжение на конденсаторе находим из (3.15 б):

$$U_C = \frac{UQ}{\sqrt{1 + \xi^2}} = \frac{1 \cdot 100}{\sqrt{1 + 0{,}4^2}} = 93 \text{ В}.$$

Сдвиг фаз между напряжением и током вычисляем из (3.13 б):

$$\operatorname{tg}\varphi = X/R = 4/10 = 0{,}4; \quad \varphi = 21°50'.$$

Найдем сдвиг фаз φ' между $\underline{U}$ и $\underline{U}_C$. Так как расстройка положительна, то $\omega L > 1/\omega C$ и ток $\underline{I}$ отстает от напряжения на угол φ; вектор напряжения на конденсаторе $\underline{U}_C$ отстает от вектора тока $\underline{I}$ на 90° (рис. 3.7), поэтому $\underline{U}_C$ отстает от U на угол $\varphi' = \varphi + 90° = 111°50'$.

При заданной расстройке коэффициенты передачи по току и напряжению [см. формулы (3.14б) и (3.15 б)] равны:

$$T_I = 1/\sqrt{1+\xi^2} = 1/\sqrt{1+0{,}4^2} = 0{,}93;$$

$$T_L \approx T_C \approx Q/\sqrt{1+\xi^2} = 100/\sqrt{1+0{,}4^2} = 93.$$

3.12. Для контура и данных, рассмотренных в задачах 3.10 и 3.11, построить амплитудно и фазочастотные характеристики тока и напряжения на конденсаторе в зависимости от отношения ω/ω_0, от отношения расстройки частоты питающего генератора Δf к резонансной частоте f_0 (построение сделать для частот, отличающихся от резонансной на $\pm$ 10%) и от обобщенной расстройки ξ (в пределах $\pm$ 4).

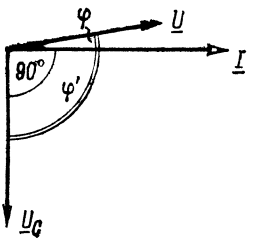


Рис. 3.7

Р е ш е н и е. Построение амплитудной и фазочастотной характеристик тока и напряжения на конденсаторе в зависимости от f/f_0 и $\Delta f/f_0$ проводится на основании уравнений, получаемых из (3.14а) и (3.14б), (3.11б) и (3.11в), (3.15а):

$$I = \frac{I_0}{\sqrt{1+\left[Q\left(\frac{\omega}{\omega_0}-\frac{\omega_0}{\omega}\right)\right]^2}}; \quad \varphi = \operatorname{arctg} Q\left(\frac{\omega}{\omega_0}-\frac{\omega_0}{\omega}\right);$$

$$U_C = \frac{\omega_0}{\omega}\frac{UQ}{\sqrt{1+\left[Q\left(\frac{\omega}{\omega_0}-\frac{\omega_0}{\omega}\right)\right]^2}}; \quad \varphi' = \operatorname{arctg} Q\left(\frac{\omega}{\omega_0}-\frac{\omega_0}{\omega}\right)+\frac{\pi}{2}.$$

На практике обычно приходится иметь дело с небольшими расстройками $\Delta\omega = \omega - \omega_0$. В этом случае, учитывая, что

$$\frac{\omega}{\omega_0}-\frac{\omega_0}{\omega} = \frac{\omega^2-\omega_0^2}{\omega_0\omega} = \frac{(\omega+\omega_0)(\omega-\omega_0)}{\omega_0\omega} \approx 2\frac{\Delta\omega}{\omega_0},$$

формулы для I, φ, U_C и φ' примут вид

$$I \approx \frac{I_0}{\sqrt{1+\left(2Q\frac{\Delta\omega}{\omega_0}\right)^2}}; \quad \varphi \approx \operatorname{arctg} 2Q\frac{\Delta\omega}{\omega_0};$$

$$U_C \approx \frac{UQ}{\sqrt{1+\left(2Q\frac{\Delta\omega}{\omega_0}\right)^2}}; \quad \varphi' \approx \operatorname{arctg} 2Q\frac{\Delta\omega}{\omega_0} + \frac{\pi}{2}.$$

Для удобства расчеты сведены в табл. 3.1. При этом следует иметь в виду, что $\Delta f/f_0 = \Delta\omega/\omega_0$ и $f/f_0 = \omega/\omega_0$.

Таблица 3.1

Задаваемые величины		Расчеты по приближенным формулам		Искомые величины, рассчитанные по приближенным формулам			
$\Delta f/f_0$ или f/f_0		$2\frac{\Delta\omega}{\omega_0}$	$2Q\frac{\Delta\omega}{\omega_0}$	I, мА	φ	U_C, В	φ'
— 0,10	0,90	— 0,20	— 20	5,0	— 87°10′	5,0	2°50′
— 0,08	0,92	— 0,16	— 16	6,2	— 86°25′	6,2	3°35′
— 0,06	0,94	— 0,12	— 12	8,3	— 85°15′	8,3	4°45′
— 0,04	0,96	— 0,08	— 8	12,4	— 82°50′	12,4	7°10′
— 0,02	0,98	— 0,04	— 4	24,3	— 76°	24,3	14°
0	1,00	0	0	100	0	100	90°
0,02	1,02	0,04	4	24,3	76°	24,3	166°
0,04	1,04	0,08	8	12,4	82°50′	12,4	172°50′
0,06	1,06	0,12	12	8,3	85°15′	8,3	175°15′
0,08	1,08	0,16	16	6,2	86°25′	6,2	176°25′
0,10	1,10	0,20	20	5,0	87°10′	5,0	177°10′

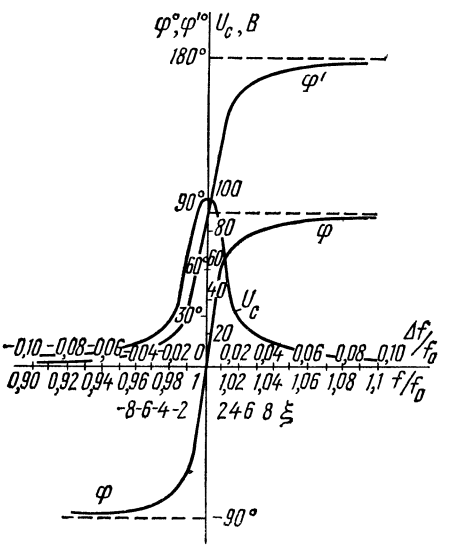


Рис. 3.8

По данным табл. 3.1 на рис. 3.8 начерчены требуемые кривые в зависимости от $\Delta f/f_0$ и f/f_0.

Кривые зависимостей от обобщенной расстройки надо строить по уравнениям (3.12а), (3.13) и (3.15а):

$$I = U/R\sqrt{1+\xi^2}; \quad \varphi = \operatorname{arctg}\xi;$$

$$U_C = UQ/\sqrt{1+\xi^2};$$

$$\varphi' = \operatorname{arctg}\xi + \pi/2.$$

Результаты расчетов сведены в табл. 3.2, а соответствующие кривые даны на рис. 3.8.

Наконец, выясним, каким значениям $\Delta f/f_0$ и f/f_0 соответствует некоторая фиксирован-

Таблица 3.2

ξ	I, мА	φ	U_C, В	φ'
-4	24,3	$-82°50'$	24,3	$7°10'$
-3	31,6	$-71°35'$	31,6	$18°25'$
-2	44,7	$-63°30'$	44,7	$26°30'$
-1	70,7	$-45°$	70,7	$45°$
0	100	0	100	$90°$
1	70,7	$45°$	70,7	$135°$
2	44,7	$63°30'$	44,7	$153°30'$
3	31,6	$71°35'$	31,6	$161°35'$
4	24,3	$82°50'$	24,3	$172°50'$

ная величина ξ. Пусть $\xi = \pm 1$. Тогда из выражения $\xi = 2Q\frac{\Delta\omega}{\omega_0}$ находим, что

$$\frac{\Delta\omega}{\omega_0} = \frac{\Delta f}{f_0} = \pm\frac{1}{2Q} = \pm\frac{1}{2\cdot 100} = \pm 0{,}005,$$

или

$$\frac{f - f_0}{f_0} = \frac{f}{f_0} - 1 = \pm 0{,}005,$$

отсюда

$$f/f_0 = 1 \pm 0{,}005.$$

Таким образом, значению $\xi = \pm 1$ соответствуют $\Delta f/f_0 = 0{,}005$, а $f/f_0 = 1{,}005$, или 0,995, т. е. частота генератора напряжения отклоняется от резонансной на $\pm$ 0,5%. Аналогично найдем, что $\xi = 2$ соответствует $\Delta f/f_0 = \pm 0{,}01$ при $\xi = 3$ $\Delta f/f_0 = \pm 0{,}015$; при $\xi = 4$ $\Delta f/f_0 = \pm 0{,}02$.

3.13 Резонансный контур состоит из последовательно включенных $L = 100$ мкГн, $C = 100$ пФ и R.

Построить амплитудные и фазовые характеристики для коэффициентов передачи по току $\underline{T}_I$ и напряжению на емкости $\underline{T}_C$ в зависимости от $\Delta f/f_0$ и f/f_0 для трех значений активного сопротивления $R = 5$ Ом, $R = 10$ Ом и $R = 20$ Ом.

Указание. Предварительно вычислив добротности, искомые величины рассчитать по (3.14б), (3.15б) и (3.15а).

3.14. В последовательном колебательном контуре, имеющем добротность $Q = 150$ и настроенном на резонансную частоту $f_0 = 2$ МГц при некотором напряжении U, проходит ток $I_0 = 60$ мА. Определить ток в контуре, сдвиг фаз между напряжением и током, коэффициент передачи $T_C = U_C/U$ при его подключении к генератору такого же по величине напряжения U, но с частотой $f = 2{,}02$ МГц.

Указание. Вычислив обобщенную расстройку по (3.11в), воспользоваться (3.12б), (3.13б) и (3.15б).

3.15. Последовательный контур настроен на частоту $f_0 = 1$ МГц.

При какой добротности этот контур пропустит полосу частот: 1) S_a = = 2,5 кГц и 2) S_a = 10 кГц?

3.16. Последовательный колебательный контур состоит из катушки индуктивности 100 мкГн, сопротивление потерь которой 15 Ом, и конденсатора емкостью 100 пФ. Тангенс угла потерь конденсатора равен 0,05. Определить добротность контура и полосу его пропускания.

3.17. К контуру, параметры которого приведены в предыдущей задаче, подведен источник с э. д. с. $e = 0{,}3 \sin\omega t$ В и внутренним сопротивлением 10 Ом. Определить амплитуду напряжения на конденсаторе при резонансной частоте и на частоте, отличающейся от резонансной на 1%.

3.18. Через последовательный контур (C = 100 пФ, R_L = 8 Ом), настроенный на резонанс при частоте f_0 = 400 кГц, надо пропустить полосу частот S_a = 10^4 Гц так, чтобы отношение тока на частоте $f_0 + S_a'/2$ к току при резонансной частоте было равно m = 0,8. Определить добротность цепи и величину добавочного сопротивления, которое надо включить в контур для выполнения заданных условий.

Указание. Согласно условию из (3.14б) $I/I_0 = m$, откуда найти $\Delta\omega/\omega_0 = \Delta f/f_0$, и учитывая, что $\Delta f = S_a'/2$, определить Q.

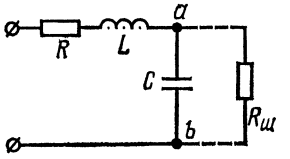


Рис. 3.9

Далее, воспользовавшись (3.4) и (3.5), найти R и, наконец, $R_д = R - R_L$.

3.19. В последовательном колебательном контуре конденсатор емкостью C шунтируется активным сопротивлением $R_ш >> 1/\omega_0 C$ (рис. 3.9). Как при этом изменится добротность эквивалентного последовательного контура? Дать числовой расчет, если известны R = 20 Ом, L = 400 мкГн, C = 625 пФ и $R_ш$ = 80 кОм.

Указание. Параллельно соединенные C и $R_ш$ заменить последовательно соединенными $R_эк$ и $C_эк$, так как $R_ш >> R_C$, то $C_эк = C$. Искомая добротность $Q_эк = R_C/(R + R_эк)$.

3.20. По данным задачи 3.19 вычислить ток и напряжение на конденсаторе до и после его шунтирования при расстройке частоты генератора на 0,5%, если к контуру приложено напряжение U = 1 В.

3.21. Последовательный колебательный контур настроен в резонанс на частоту полезного сигнала радиостанции, работающей на длине волны $\lambda_с$ = 857 м и наводящий в нем э. д. с. $E_с$ = 0,5 мВ. Добротность контура Q = 50, а его активное сопротивление R = 16 Ом.

Чему равен ток, наводимый в контуре от другой радиостанции, работающей на длине волны $\lambda_п$ = 800 м и создающей э. д. с. помехи $E_п$ = 1 мВ.

Вычислить отношение напряжения сигнала к напряжению помехи на конденсаторе. Как изменится это отношение, если конденсатор зашунтировать сопротивлением $R_ш$ = 100 кОм.

Указание. Длина волны связана с частотой соотношением $\lambda = 3 \cdot 10^8/f$, где λ — в м, f — в Гц.

Б. Резонанс токов

3.22. Цепь, состоящая из трех параллельных ветвей (рис. 3.10), параметры которых $R = 16$ Ом, $L = 1{,}6$ мГн, $C = 25$ мкФ, подключена к генератору синусоидального напряжения, действующее значение которого $U = 10$ В. Найти резонансную частоту $f_{рез}$ и токи I, I_L, I_C при резонансе. Построить кривые токов $I = F_1(f)$, $I_L = F_2(f)$, $I_C = F_3(f)$ и угла сдвига фаз φ между U, величина которого поддерживается постоянной, и I в зависимости от частоты [$\varphi = F_4(f)$]. Частоту изменять в пределах от 0 до $4f_0$.

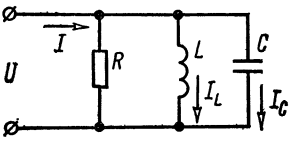


Рис. 3.10

3.23. Генератор, напряжение которого $U = 10$ В, а частота $\omega = 5000$ с$^{-1}$, подключен к цепи, изображенной на рис. 3.10. Чему равна индуктивность L, при которой цепь настроена в резонанс, если $R = 16$ Ом, $C = 25$ мкФ.

Полагая, что приложенное к цепи напряжение изменяется по закону $u = U\sqrt{2}\sin\omega t$, построить в зависимости от времени кривые i, i_L, i_C, p_L, p_C, p и кривые энергии $w_м$ и $w_э$, запасаемой в магнитном и электрическом полях цепи.

3.24. Параметры цепи (см. рис. 3.2): $L = 4$ мГн, $C = 0{,}1$ мкФ, $R_1 = 160$ Ом, $R_2 = 120$ Ом. Выяснить, является ли параллельный контур высокодобротным. Вычислить частоту резонанса токов и сопротивление контура при резонансе. При каком значении сопротивления R_2 резонанс вообще невозможен? При каких значениях сопротивлений R_1 и R_2 резонанс в данной цепи будет иметь место при любой частоте?

3.25. Напряжение $U = 20$ В, частота которого $f = 50$ кГц, подключено к цепи, изображенной на рис. 3.2. Определить емкость C, при которой наступит резонанс, если $R_1 = 2$ Ом, $R_2 = 3{,}2$ Ом, $L = 9{,}5$ мкГн. Найти токи при резонансе и построить векторную диаграмму.

Для каждого из найденных значений емкости C определить сдвиг фаз между приложенным к цепи напряжением и током, проходящим через конденсатор. В какой связи находятся найденные углы?

3.26. В цепи (см. рис. 3.2) даны $R_1 = 40$ Ом, $\omega L = 30$ Ом, $1/\omega C = 15$ Ом. Чему равно R_2 при резонансе токов и каково при этом полное сопротивление цепи?

3.27. К катушке индуктивности, параметры которой $R = 11{,}2$ Ом, $L = 4$ мГн, подключен конденсатор емкостью $C = 2{,}5$ мкФ (см. рис. 3.3). При какой частоте наступит резонанс токов? Для найденной частоты определить полное сопротивление цепи. Построить векторную диаграмму при резонансе, если $U = 10$ В.

3.28. Для цепи (см. рис. 3.3) найти значение индуктивности L, при которой наступит резонанс на угловой частоте $\omega = 5000$ с$^{-1}$. Параметры цепи $R = 14$ Ом, $C = 2$ мкФ.

Для каждого из найденных значений L вычислить сдвиг фаз между приложенным напряжением и током, проходящим по катушке. В ка-

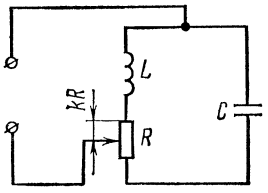


Рис. 3.11

кой связи находятся найденные углы?

3.29. При перемещении ползунка сопротивление R распределяется между ветвями параллельного контура (рис. 3.11).

Определить пределы изменения резонансной частоты контура в зависимости от параметра $k(0 \leqslant k < 1)$. Даны: $L = 2$ мГн, $C = 500$ пФ, $R = 1$ кОм.

3.30. Найти резонансную частоту и полное сопротивление параллельного контура (см. рис. 3.2), параметры которого равны: $R_1 = 9$ Ом, $R_2 = 1$ Ом, $L = 100$ мкГн, $C = 100$ пФ. Рассчитать токи, проходящие в каждой из ветвей при резонансе, и выделяемую в контуре мощность, если приложенное напряжение $U = 200$ В.

3.31. Для контура и данных задачи 3.30 определить, чему будут равны эквивалентные активное, реактивное и полное сопротивления контура, если вследствие расстройки частота станет на 0,2% больше резонансной. Для этого случая вычислить все токи и мощность, выделяемую в контуре, полагая, что величина приложенного к цепи напряжения осталась прежней ($U = 200$ В).

Р е ш е н и е. Вначале определим по (3.22) добротность Q и по (3.21 в) сопротивление контура при резонансе:

$$Q = \sqrt{L/C}/(R_1 + R_2) = \sqrt{\frac{100 \cdot 10^{-6}}{100 \cdot 10^{-12}}} \Big/ 10 = 100;$$

$$R_{\text{рез}} = \frac{L}{(R_1 + R_2)\,C} = \frac{100 \cdot 10^{-6}}{10 \cdot 100 \cdot 10^{-12}} = 10^5 \text{ Ом} = 100 \text{ кОм}.$$

Произведем расчеты при $\omega = 1{,}002\omega_{\text{рез}}$. Найдем абсолютную и обобщенную расстройки и искомые сопротивления по формулам (3.9), (3.11в) и (3.27):

$$\Delta\omega = \omega - \omega_{\text{рез}} = 0{,}002\omega_{\text{рез}} = 0{,}002 \cdot 10^7 = 2 \cdot 10^4 \text{ с}^{-1};$$

$$\xi = 2Q\Delta\omega/\omega_{\text{рез}} = 2 \cdot 100 \cdot 0{,}002\omega_{\text{рез}}/\omega_{\text{рез}} = 0{,}4;$$

$$R_{\text{эк}} = R_{\text{рез}}/(1 + \xi^2) = 100/(1 + 0{,}4^2) = 86{,}2 \text{ кОм};$$

$$X_{\text{эк}} = -\xi R_{\text{эк}} = -0{,}4 \cdot 86{,}2 = -34{,}4 \text{ кОм}.$$

$X_{\text{эк}}$ имеет емкостный характер, так как ξ положительно [см. формулу (3.27)].

Полное сопротивление при расстройке

$$Z_{\text{эк}} = R_{\text{рез}}/\sqrt{1 + \xi^2} = 100/\sqrt{1 + 0{,}4^2} = 93{,}3 \text{ кОм};$$

$$\operatorname{tg}\varphi_{\text{эк}} = X_{\text{эк}}/R_{\text{эк}} = -34{,}4/86{,}2 = -0{,}4; \quad \varphi_{\text{эк}} = -21°50'.$$

Так как $\varphi_{\text{эк}}$ отрицательно, ток опережает напряжение

$$I_1 = \frac{U}{\sqrt{R_1^2 + (\omega L)^2}} = \frac{200}{\sqrt{9^2 + (1{,}002 \cdot 10^7 \cdot 100 \cdot 10^{-6})^2}} \approx 0{,}2 \text{ А};$$

$$I_2 = \frac{U}{\sqrt{R_2^2 + \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2}} = \frac{200}{\sqrt{1^2 + \left(\frac{1}{1{,}002 \cdot 10^7 \cdot 100 \cdot 10^{-12}}\right)^2}} \approx$$

$$\approx 0{,}2 \text{ А};$$

$$I = U/Z_{эк} = 200/(93{,}3 \cdot 10^3) \approx 2{,}15 \cdot 10^{-3} \text{ А} = 2{,}15 \text{ мА}.$$

Расходуемая мощность

$$P = UI \cos \varphi_{эк} = 200 \cdot 2{,}15 \cdot 10^{-3} \cos 21°50' = 0{,}4 \text{ Вт},$$

или

$$P = I_1^2 R = 0{,}2^2 \cdot 10 = 0{,}4 \text{ Вт}.$$

Заметим, что даже при небольшой расстройке (0,2%) в полном сопротивлении контура появилась значительная реактивная составляющая $X_{эк}$, вследствие которой и оказался сдвиг фаз $\varphi_{эк}$ между током I и напряжением U. Ввиду небольшого изменения частоты реактивные сопротивления каждой из параллельных ветвей и токи в них почти не изменились и не намного изменился ток в неразветвленной части цепи.

3.32. Для контура и по данным задачи 3.30 построить резонансную кривую неразветвленного тока в зависимости: а) от отношения расстройки частоты питающего генератора Δf к резонансной частоте f_0 (построение сделать для области частот, отличающихся от резонансной на $\pm$ 10%); б) от отношения f/f_0 и в) от обобщенной расстройки ξ.

Построить те же кривые, если рассмотренный контур имеет активное сопротивление: 1) $R_1 = 4{,}5$ Ом и $R_2 = 0{,}5$ Ом; 2) $R_1 = 18$ Ом и $R_2 = 2$ Ом.

3.33. Параметры параллельного контура (см. рис. 3.2) имеют следующие значения: $R_1 = 15$ Ом, $L = 338$ мкГн, $R_2 = 1$ Ом, $C = 300$ пФ. Чему равны резонансная частота и сопротивление контура при резонансе? Вычислить эквивалентные активное, реактивное и полное сопротивления контура при частоте $f = 496$ кГц. Определить все токи и мощность, выделяемую в контуре, если к нему подведено напряжение $U = 150$ В.

3.34. Определить эквивалентные величины активной, реактивной составляющих и полного сопротивления параллельного контура (см. рис. 3.3) при частоте f по следующим данным: 1) $C = 300$ пФ; $R = 16{,}3$ Ом; $Q = 65$; $f = 505$ кГц; 2) $L = 93{,}5$ мкГн; $f_{рез} = 1{,}5$ МГц; $Q = 40$; $f = 1490$ кГц; 3) $L = 600$ мкГн; $Q = 66$; $R_{рез} = 100$ кОм; $f = 400$ кГц.

3.35. Параллельный контур с малыми потерями (т. е. $Q \gg 1$) включен к источнику с э. д. с. $E = 200$ В и внутренним сопротивлением $R_i = 69$ кОм (см. рис. 3.4). Определить параметры контура R и L, если известны резонансная частота $f_{рез} = 500$ кГц, емкость

$C = 300$ пФ и что сопротивление контура при резонансе равно внутреннему сопротивлению генератора R_i. Вычислить токи источника, каждой из ветвей, мощность, доставляемую источником и выделяемую в нем и в параллельном контуре при резонансе.

Р е ш е н и е. Находим индуктивность по формуле (3.19в):

$$L = 1/\omega_{\text{рез}}^2 C = 338 \text{ мкГ}.$$

Имея в виду, что по условию $R_{\text{рез}} = R_i$, по формуле (3.21в) находим активное сопротивление

$$R = \frac{L}{R_{\text{рез}} C} = \frac{338 \cdot 10^{-6}}{69 \cdot 10^3 \cdot 300 \cdot 10^{-12}} = 16{,}3 \text{ Ом}.$$

Ток источника и напряжение на параллельном контуре при резонансе:

$$I_{\text{рез}} = \frac{E}{R_i + R_{\text{рез}}} = \frac{200}{2 \cdot 69 \cdot 10^3} = 1{,}45 \cdot 10^{-3} \text{ А} = 1{,}45 \text{ мА};$$

$$U_{\text{рез}} = I_{\text{рез}} R_{\text{рез}} = 1{,}45 \cdot 10^{-3} \cdot 69 \cdot 10^3 = 100 \text{ В}.$$

В каждой из ветвей контура токи

$$I_{1\text{рез}} = \frac{U}{\sqrt{R^2 + (\omega_{\text{рез}} L)^2}} = \frac{100}{\sqrt{16{,}3^2 + 1060^2}} = 94{,}2 \text{ мА};$$

$$I_{2\text{ рез}} = U\omega_{\text{рез}} C = 100 \cdot 2\pi \cdot 500 \cdot 10^3 \cdot 300 \cdot 10^{-12} =$$

$$= 94{,}2 \cdot 10^{-3} \text{ А} = 94{,}2 \text{ мА}.$$

Мощность, доставляемая источником ($P_{\text{и рез}}$), расходуемая в нем ($P_{\text{вт}}$) и выделяемая в контуре (P):

$$P_{\text{и рез}} = EI_{\text{рез}} = 200 \cdot 1{,}45 \cdot 10^{-3} = 0{,}29 \text{ Вт};$$

$$P_{\text{вт}} = I^2 R_i = (1{,}45 \cdot 10^{-3})^2 \cdot 69 \cdot 10^3 = 0{,}145 \text{ Вт};$$

$$P_{\text{рез}} = I_{\text{рез}}^2 R_{\text{рез}} = (1{,}45 \cdot 10^{-3})^2 \cdot 69 \cdot 10^3 = 0{,}145 \text{ Вт}.$$

3.36. Для задачи 3.35 определить абсолютное значение и относительную величину полосы пропускания контура по напряжению.

Р е ш е н и е. Предварительно вычислим характеристическое сопротивление и добротность контура:

$$R_c = \sqrt{L/C} = 1060 \text{ Ом}; \quad Q = R_c/R = 65.$$

Искомые значения абсолютной и относительной величины полосы пропускания контура по напряжению равны [см. формулы (3.33) и (3.34)]:

$$S_{aU} = \frac{f_{\text{рез}}}{Q}\left(1 + \frac{R_{\text{рез}}}{R_i}\right) = \frac{500 \cdot 10^3}{65}\left(1 + \frac{69}{69}\right) = 15\,400 \text{ Гц};$$

$$S_{rU} = S_{aU}/f = 15\,400/(500 \cdot 10^3) = 0{,}031.$$

3.37. По данным задачи 3.35 вычислить указанные там величины, если э. д. с. источника останется той же (E = 200 В), а вследствие расстройки его частота увеличится на 0,5%.

Указание. Разобрать решение задачи 3.31.

3.38. Для контура и по данным задачи 3.35 (L = 338 мкГн C = = 300 пФ, R = 16,3 Ом) построить частотные характеристики для коэффициента передачи ($T_U = U/E$), для трех значений активного сопротивления, равных 0,5R; R; 2R. Построение дать в зависимости от отношения расстройки частоты питающего генератора к резонансной частоте $\Delta f/f_{рез}$ (построение сделать для частот, отличающихся от резонансной на ± 10%); отношения частот $f/f_{рез}$ (в пределах 0,9—1,1); обобщенной расстройки ξ (в пределах ± 4).

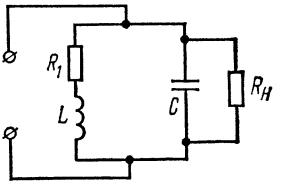


Рис. 3.12

Построить также резонансную кривую отношения неразветвленного тока к току при резонансе $T_I = I/I_{рез}$.

3.39. Найти резонансную частоту и неизвестный параметр параллельного контура (см. рис. 3.4), выделяемую в нем мощность при резонансе по данным:

1) E = 150 В, $R_1 + R_2$ = 22 Ом, C = 300 пФ, Q = 60, R_i = = 35 кОм;

2) E = 100 В, L = 10,3 мкГн, C = 68 пФ, Q = 111, R_i = 30 кОм.

Для каждого из случаев вычислить абсолютное значение полосы пропускания и относительную величину полосы пропускания по напряжению.

3.40. Определить резонансную частоту и эквивалентное сопротивление контура при резонансе нагруженного на сопротивление $R_н$ (рис. 3.12), исходя из того, что $\omega_{рез} L >> R$.

Каковы резонансная частота и сопротивление цепи при резонансе, если $R_н >> R$?

3.41. Параллельный контур, параметры которого R_L = 16,3 Ом, L = 338 мкГн, C = 300 пФ, подключен к источнику с э. д. с. E = = 200 В и внутренним сопротивлением R_i = 69 кОм.

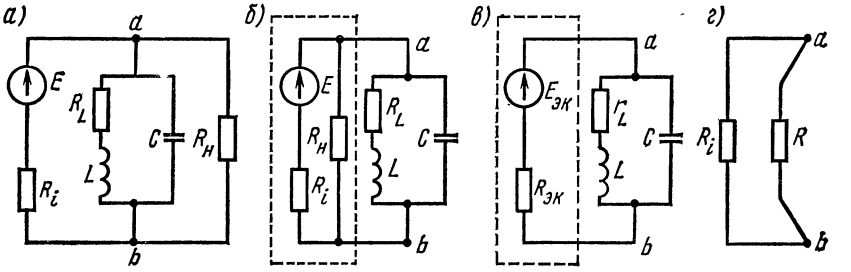


Рис. 3.13

1. Вычислить эквивалентную добротность контура и полосу его пропускания. Найти все токи и расходуемую в контуре мощность при резонансе.

2. Чему будут равны эквивалентная добротность контура и полоса его пропускания, если его нагрузить на резистивное сопротивление $R_н = 138$ кОм (рис. 3.13, *а*)? Определить для данного случая все токи, мощности, доставляемую источником и расходуемую в контуре и нагрузочном сопротивлении $R_н$ при резонансе.

Р е ш е н и е 1. Для заданного контура вычисляем:

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = 3{,}14 \cdot 10^6 \text{ с}^{-1}, \quad f_{рез} \approx f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = 500 \text{ кГц};$$

$$R_C = \sqrt{L/C} = 1060 \text{ Ом}, \quad Q = R_C/R_L = 1060/16{,}3 = 65;$$

$$R_{рез} = Q^2 R_L = 69 \text{ кОм}.$$

Эквивалентную добротность заданного контура с учетом внутреннего сопротивления источника э. д. с. и полосу его пропускания определяем по формулам (3.31) и (3.33):

$$Q_{эк} = Q \Big/ \left(1 + \frac{R_{рез}}{R_i}\right) = 32{,}5; \quad S'_{aU} = f_{рез}/Q_{эк} = 15\,400 \text{ Гц}.$$

Так как данные контура, э. д. с. источника и его внутреннего сопротивления те же, что и в задаче 3.35, то в решении были уже вычислены требуемые по условию $I_{рез}$, $I_{1рез}$, $I_{2рез}$, $P_{и\,рез}$, $P_{рез}$.

2. Решение задачи в случае нагрузки контура на сопротивление $R_н$ проще всего может быть получено, если осуществить замену относительно зажимов *ab* заданного источника э. д. с. с E и R_i и подключенным к нему параллельно сопротивлением $R_н$ (рис. 3.13, *б*), эквивалентным с э. д.с. $E_{эк}$ и внутренним сопротивлением $R_{эк}$ (рис. 3.13, *в*). Для определения $E_{эк}$ отключим параллельный контур (см. рис. 3.13, *б* и *в*) и вычислим напряжение холостого хода U_{ab}, равное $E_{эк}$:

$$E_{эк} = \frac{ER_н}{R_н + R_i} = \frac{200 \cdot 138}{69 + 138} = 133 \text{ В}.$$

Сопротивление короткого замыкания равно внутреннему сопротивлению эквивалентного источника (рис. 3.13, *г*):

$$R_{эк} = \frac{R_н R_i}{R_н + R_i} = \frac{69 \cdot 138}{69 + 138} = 46 \text{ кОм}.$$

Для схемы рис. 3.13, *в* согласно формулам (3.31) и (3.33) эквивалентные добротность и полоса пропускания соответственно равны:

$$Q'_{эк} = \frac{Q}{1 - \dfrac{R_{рез}}{R_{эк}}} = 26; \quad S'_{aU} = \frac{f_{рез}}{Q_{эк}} = 19\,200 \text{ Гц}.$$

Следует, отметить, что подключение к контуру сопротивления $R_н$

приводит к уменьшению эквивалентной добротности и увеличению полосы пропускания.

Рассчитываем ток в неразветвленной части заданной цепи, напряжение на контуре, токи в ветвях контура и нагрузочном сопротивлении $R_н$, мощности, доставляемую источником и выделяемую в контуре и в сопротивлении $R_н$:

$$I'_{рез} = \frac{E}{R_i + \dfrac{R_н R_{рез}}{R_н + R_{рез}}} = \frac{20}{69 + \dfrac{138 \cdot 69}{138 + 69}} = 1{,}74 \text{ мА};$$

$$U'_{рез} = E - I'_{рез} R_i = 200 - 1{,}74 \cdot 10^{-3} \cdot 69 \cdot 10^3 = 80 \text{ В};$$

$$I'_{1\,рез} = \frac{U'_{рез}}{\sqrt{R_L^2 + (\omega_{рез} L)^2}} = \frac{80}{\sqrt{16{,}3^2 + 1060^2}} = 75{,}5 \text{ мА};$$

$$I'_{2\,рез} = \frac{U_{рез}}{\dfrac{1}{\omega_{рез} C}} = 75{,}5 \text{ мА}; \quad I'_{н\,рез} = \frac{U'_{рез}}{R_н} = 0{,}58 \text{ мА};$$

$$P'_{и\,рез} = E I'_{рез} = 0{,}348 \text{ Вт}; \quad P'_{вт} = I'^2_{рез} R_i = 0{,}209 \text{ Вт};$$

$$P'_{к\,рез} = I'_{1\,рез} R_L = 0{,}093 \text{ Вт}; \quad P'_{н\,рез} = I'^2_{н\,рез} R_н = 0{,}046 \text{ Вт}.$$

Проверка показывает, что

$$P'_{и\,рез} = P'_{н\,рез} + P'_{к\,рез} + P'_{вт}.$$

3.42. Решить задачу 3.41, если принять, что нагрузочное сопротивление:

а) $R_н = R_i$ и б) $R_н = R_i/2$. Остальные данные те же, что и в задаче 3.41.

В. Резонансы напряжений и токов в сложных контурах

3.43. Параметры параллельного контура (рис. 3.14) имеют следующие значения: $R_1 = 1$ Ом, $L_1 = 25$ мкГн, $C = 1600$ пФ, $R_2 = 4$ Ом, $L_2 = 150$ мкГн.

Найти частоты резонанса токов, напряжений и сопротивления цепи при этих частотах. Чему равна добротность контура и эквивалентная добротность при его подключении к источнику с внутренним сопротивлением $R_i = 20$ кОм? Какова при этом полоса пропускания контура? Определить область частот, при которых модуль сопротивления параллельного контура больше 10 кОм. Определить эквивалентные активные и реактивные сопротивления

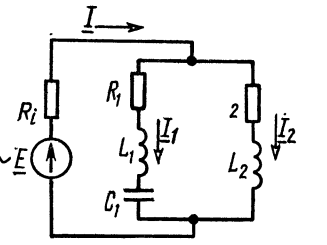


Рис. 3.14

контура на границах этой области. При каком условии сопротивление контура при резонансе токов будет иметь максимально возможное значение?

Как нужно подключить контур к источнику синусоидальной э. д. с. с амплитудой $E_m = 100$ В и внутренним сопротивлением $R_i = 20$ кОм, чтобы мощность, выделенная в контуре, была максимальна и чему она равна?

Р е ш е н и е. Частота резонанса токов [см. формулу (3.40)]:

$$\omega_1 = 1/\sqrt{(L_1 + L_2)C} = 1{,}89 \cdot 10^6 \text{ с}^{-1};$$

$$f_1 = \frac{1{,}89 \cdot 10^6}{2\pi} = 3 \cdot 10^5 \text{ Гц} = 300 \text{ кГц}.$$

Сопротивление контура при этой частоте [см. формулу (3.42)]

$$R_{\text{рез}} = X_2^2/(R_1 + R_2) = (\omega_1 L_2)^2/(R_1 + R_2) = 16 \text{ кОм}.$$

Частота резонанса напряжений:

$$\omega_2 = 1/\sqrt{L_1 C_1} = 5 \cdot 10^6 \text{ с}^{-1};$$

$$f_2 = 5 \cdot 10^6/2\pi = 795 \text{ кГц}.$$

При этой частоте сопротивления каждой из ветвей и всего параллельного контура соответственно равны:

$$\underline{Z}_1 = R_1 + j\left(\omega_2 L_1 - \frac{1}{\omega_2 C_1}\right) = R_1 = 1 \text{ Ом};$$

$$\underline{Z}_2 = R_2 + j\omega_2 L_2 = (4 + j\,750) \text{ Ом};$$

$$\underline{Z} = \frac{\underline{Z}_1 \underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} = \frac{1\,(4 + j750)}{5 + j750} \approx 1 \text{ Ом}.$$

Добротность контура [см. формулу (3.41)]

$$Q = \frac{\omega_1 (L_1 + L_2)}{R_1 + R_2} = \frac{1{,}89 \cdot 10^6 \cdot 175 \cdot 10^{-6}}{5} = 66{,}2$$

и эквивалентная добротность [см. формулу (3.31)]

$$Q_{\text{эк}} = \frac{Q}{1 + \dfrac{R_{\text{рез}}}{R_i}} = \frac{66 \cdot 2}{1 + \dfrac{16}{20}} = 36{,}8.$$

Полосу пропускания найдем по формуле (3.33):

$$S_{aU} = f_{\text{рез}}/Q_{\text{эк}} = 300/36{,}8 = 8{,}15 \text{ кГц}.$$

Для определения области частот, при которых модуль сопротивления параллельного контура больше 10 кОм, используем формулу (3.27) для модуля полного сопротивления:

$$Z_{\text{эк}}(\omega) = 10\,000 \leqslant \frac{R_{\text{рез}}}{\sqrt{1 + \xi^2}} = \frac{16\,000}{\sqrt{1 + \xi^2}}.$$

Отсюда найдем обобщенную расстройку $\xi = \pm 1{,}25$ и по формуле (3.27) с учетом величины $\Delta\omega$ из (3.26) — соответствующую ей абсолютную расстройку:

$$\frac{\xi(R_1 + R_2)}{2(L_1 + L_2)} = \frac{1{,}25 \cdot 5}{2 \cdot 175 \cdot 10^{-6}} = 17\,900 \text{ с}^{-1},$$

$$\Delta f = \frac{17\,900}{2\pi} = 2850 \text{ Гц}.$$

Искомая область частот, при которой $Z_{эк}(\omega) > 10$ кОм, определяется из неравенства $(f_1 - \Delta f) < f < (f_1 + \Delta f)$ или 297 150 Гц $< f <$ $< 302\,850$ Гц.

Эквивалентные активное и реактивное сопротивления при $\xi =$ $= 1{,}25$ найдем по (3.27):

$$R_{эк} = \frac{R_{рез}}{1 + \xi^2} = 6{,}25 \text{ кОм}, \quad X_{эк} = -\frac{R_{рез}}{1 + \xi^2}\xi = -7{,}81 \text{ кОм}.$$

Вычислим максимально возможное сопротивление параллельного контура при резонансе токов. Оно имеет место тогда, когда вся индуктивность будет сосредоточена в одной из ветвей, а емкость—в другой. В этом случае согласно формуле (3.21 в)

$$R_{рез} = \frac{L}{RC} = \frac{175 \cdot 10^{-6}}{5 \cdot 1600 \cdot 10^{-12}} = 21{,}8 \cdot 10^3 \text{ Ом} = 21{,}8 \text{ кОм}.$$

Наконец, решим вопрос об условиях подключения контура к источнику э. д. с., с тем чтобы в нем была выделена максимальная мощность. Как известно, это будет в случае, если сопротивление контура при резонансе $R_{рез}$ будет равно сопротивлению источника R_i. Для этого используем свойство сложного параллельного контура изменять свое резонансное сопротивление при перераспределении его реактивных элементов по отдельным ветвям без изменения частоты резонанса токов. Обозначим величину индуктивности правой ветви контура, удовлетворяющей требованиям задачи ($R'_{рез} = R_i$), через L'_2, тогда с учетом (3.42) получим

$$R'_{рез} = (\omega_1 L'_2)^2/(R_1 + R_2) = R_i.$$

Отсюда

$$L'_2 = \frac{\sqrt{R_i(R_1 + R_2)}}{\omega_1} = \frac{\sqrt{20 \cdot 10^3 \cdot 5}}{1{,}89 \cdot 10^6} = 167 \cdot 10^{-6} \text{ Гн}.$$

Максимальная мощность, выделяемая в контуре при указанном условии,

$$P_{max} = \left(\frac{\frac{E_m}{\sqrt{2}}}{R'_{рез} + R_i}\right)^2 R'_{рез} = \frac{100^2}{2(40 \cdot 10^3)^2} \cdot 20 \cdot 10^3 =$$

$$= 0{,}0625 \text{ Вт} = 62{,}5 \text{ мВт}.$$

3.44. Для контура, изображенного на рис. 3.5, найти резонансные частоты и вычислить его активное, реактивное и полное сопротивления при этих частотах. Даны: $R_1 = 9{,}4$ Ом, $L_1 = 256$ мкГн, $C = 270$ пФ, $R_2 = 12$ Ом, $L_2 = 660$ мкГн, $C = 430$ пФ.

3.45. Как надо перераспределить индуктивности катушек L_1 и L_2 между отдельными ветвями контура задачи 3.43, чтобы при той же частоте резонанса токов полное сопротивление параллельного контура равнялось 12 кОм?

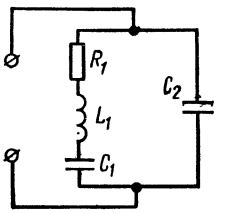


Рис. 3.15

Р е ш е н и е. Пусть при требуемых условиях (ω_1 остается той же) полная индуктивность контура $L = L_1 + L_2 = 175$ мкГн распределится так, чтобы в левой ветви была индуктивность L', а в правой — $L'' = L - L'$. При этом полное сопротивление контура [см. формулу (3.42)] при частоте резонанса токов

$$R_{\text{рез}} = 12\,000 = (\omega_1 L'')^2/(R_1 + R_2).$$

Отсюда

$$L'' = \frac{\sqrt{R_{\text{рез}}(R_1 + R_2)}}{\omega_1} = 130 \text{ мкГн},$$

$$L' = L - L'' = 175 - 130 = 45 \text{ мкГн}.$$

3.46. Дан колебательный контур (рис. 3.15). Найти емкости C_1 и C_2, если известно, что $R_1 = 5$ Ом, $L_1 = 150$ мкГн, сопротивление контура при резонансе $R_{\text{рез}} = 20$ кОм и полная емкость контура $C = 500$ пФ ($C = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}$). Как надо включить элементы этой схемы, чтобы сопротивление контура было максимально и чему оно при этом равно?

3.47. Контур имеет в каждой ветви индуктивную катушку, конденсатор и резистор (см. рис. 3.5). Определить активную и реактивную составляющие эквивалентного сопротивления контура для частоты, которая на 0,5% отличается от частоты резонанса токов. Значения параметров контура взять из задачи 3.44.

Указание. Решение задачи начать с разбора решения задачи 3.31.

3.48. Сложный параллельный контур (см. рис. 3.14), параметры которого взять из условия задачи 3.43, подключенный к источнику синусоидальной э. д. с. с амплитудой $E_m = 100$ В и внутренним сопротивлением $R_i = 20$ кОм, зашунтирован резистором с активным сопротивлением $R_н = 30$ кОм (на рис. 3.14 не показано).

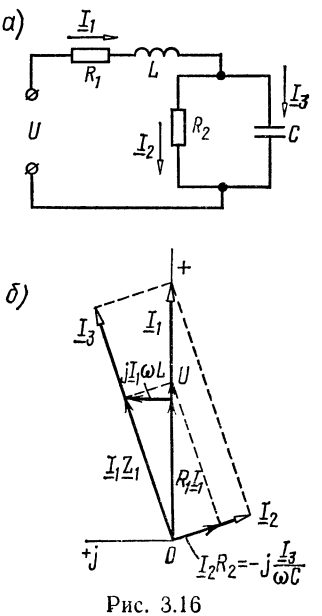


Рис. 3.16

Рассчитать действующее значение тока источника, токов в ветвях контура и в нагрузочном сопротивлении $R_н$ в режиме резонанса токов и при расстройке частоты источника на 0,5%.

Какое сопротивление $R_ш$ надо взять вместо $R_н$, чтобы при резонансе токов в контуре была выделена максимальная мощность?

3.49. Дан контур (см. рис. 3.14) с полосой пропускания 5 кГц, добротностью 100 и индуктивностью $L = L_1 + L_2 = 400$ мкГн. Коэффициент включения $m_L = 0{,}6$. Э. д. с. источника $E = 200$ В, его внутреннее сопротивление $R_i = 62{,}5$ кОм. Найти L_1, L_2, C, R_1, R_2 (полагать, что $R_1 = R_2$). Определить частоты резонансов токов и напряжений, все токи и мощности, потребляемые контуром при этих частотах.

3.50. Определить значение сопротивления R_2, при котором в цепи рис. 3.16, *а* имеется резонанс напряжений на частоте $f = 500$ Гц. Вычислить все токи. Построить векторную диаграмму.

Даны: $R_1 = 2{,}7$ Ом, $L = 286$ мкГн, $C = 318$ мкФ, $U = 30$ В.

Решение.

$$\omega L = 2\pi \cdot 500 \cdot 286 \cdot 10^{-6} = 0{,}9 \text{ Ом};$$

$$\frac{1}{\omega C} = \frac{1}{2\pi \cdot 500 \cdot 318 \cdot 10^{-6}} = 1 \text{ Ом};$$

$$\underline{Z}_{эк} = 2{,}7 + j0{,}9 + \frac{-j \cdot 1 \cdot R_2}{R_2 - j \cdot 1} = 2{,}7 + j0{,}9 + \frac{R_2^2 - jR_2^2}{R_2^2 + 1}.$$

При резонансе реактивная составляющая сопротивления $\underline{Z}_{эк}$ должна быть равна нулю, т. е. $0{,}9 - \frac{R_2^2}{R_2^2 + 1} = 0$, откуда $R_2 = 3$ Ом.

При найденном значении R_2 полное сопротивление цепи имеет только вещественную составляющую:

$$R_{эк} = 2{,}7 + \frac{R_2^2}{R_2^2 + 1} = 2{,}7 + \frac{3}{3^2 + 1} = 3 \text{ Ом}.$$

Токи в неразветвленной части цепи и в параллельных ветвях:

$$I_1 = U/R_{эк} = 30/3 = 10 \text{ А},$$

$$\underline{I}_2 = \underline{I}_1 \frac{-jX_C}{R_2 - jX_C} = 10 \frac{-j \cdot 1}{3 - j \cdot 1} = 1 - j3 = 3{,}16e^{-j71°35'} \text{ А};$$

$$\underline{I}_3 = \underline{I}_1 - \underline{I}_2 = 10 - (1 - j3) = 9 + j3 = 9{,}5e^{j18°25'} \text{ А}.$$

На рис. 3.16, *б* начерчена векторная диаграмма. На основе расчета отложены векторы токов $\underline{I}_2$, $\underline{I}_3$ и $\underline{I}_1$, далее построены векторы

$$\underline{I}_2 R_2 = -j\underline{I}_3 / \omega C, \quad \underline{I}_1 R_1 \text{ и } j\underline{I}_1 \omega L \text{ и } \underline{I}_1 \underline{Z}_1 = \underline{I}_1 R_1 + j\underline{I}_1 \omega L.$$

Наконец, построен вектор, являющийся суммой векторов напряжений на неразветвленном $\underline{I}_1\underline{Z}_1$ и на параллельном $\underline{I}_2\underline{Z}_2$ участках.

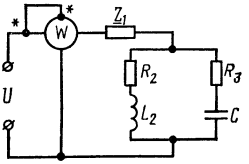


Рис. 3.17

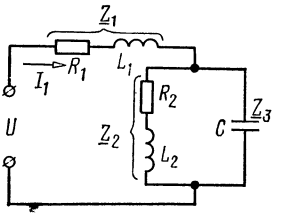


Рис. 3.18

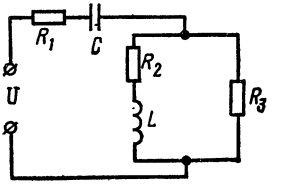


Рис. 3.19

3.51. К зажимам цепи (см. рис. 3.16, *а*) подведено напряжение частотой f. Параметры цепи R_1, L и C известны. Определить, каким минимальным активным сопротивлением R_2 можно шунтировать конденсатор емкостью C, при котором еще может иметь место резонанс. Чему в этом случае равен ток в неразветвленной части цепи?

3.52. Определить, при каком значении и характере сопротивления $\underline{Z}_1$ в цепи рис. 3.17 показание ваттметра наибольшее, если известно, что $R_2 = 8$ Ом, $X_{L2} = 6$ Ом, $R_3 = 12$ Ом, $X_C = 5$ Ом, $U = 110$ В. Чему равно показание ваттметра при этом режиме? Построить векторную диаграмму.

Указание. Требуемое условие будет выполнено при резонансе напряжений.

3.53. При каком реактивном сопротивлении $\underline{Z}_3$ (рис. 3.18) приложенное напряжение U и ток I_1 совпадут по фазе? Даны: $\underline{Z}_1 = (12 + j14)$ Ом, $\underline{Z}_2 = (10 + j15)$ Ом. Для найденного значения Z_3 вычислить все токи и построить векторную диаграмму при $U = 120$ В.

3.54. При каком индуктивном сопротивлении X_L в цепи рис. 3.19 наступит резонанс напряжений? Вычислить токи и построить векторную диаграмму, если $R_1 = 1{,}5$ Ом, $X_C = 1{,}25$ Ом, $R_2 = 3$ Ом, $R_3 = 5$ Ом, $U = 120$ В.

3.55. В цепи рис. 3.19 имеет место резонанс. В этом режиме в ее неразветвленной части проходит ток $I = 2{,}5$ А при $U = 110$ В. Известны: $R_1 = 24$ Ом, $X_L = 32$ Ом, $R_3 = 40$ Ом. Вычислить активное сопротивление R_2 и емкостное сопротивление X_C. Найти все токи.

3.56. Определить частоты резонансов напряжений и токов в цепи рис. 3.18, если известны $R_1 = 12$ Ом, $L_1 = 0{,}31$ мГн, $R_2 = 3$ Ом, $L_2 = 0{,}29$ мГн, $C = 11{,}6$ мкФ.

ГЛАВА ЧЕТВЕРТАЯ

СВЯЗАННЫЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ЦЕПИ

ОСНОВНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ И СООТНОШЕНИЯ

1. Схемные признаки связи. Различают *внутреннюю* (рис. 4.1, *а*) и *внешнюю* (рис. 4.1, *б*) связь двух контуров. Сопротивление $\underline{Z}_{12}$ элемента, общего для обоих контуров, называют сопротивлением связи.

Виды связи: 1) *магнитная* (рис. 4.2, *а* — индуктивная или трансформаторная; рис. 4.2, *б* — кондуктивная или автотрансформаторная); 2) *электрическая* (рис. 4.2, *в* — емкостная внутренняя; рис. 4.2, *г* — емкостная внешняя); 3) *комбинированная* или *смешанная* (рис. 4.2, *д* — индуктивно-емкостная; рис. 4.2, *е* — кондуктивно-емкостная); 4) *гальваническая* (рис. 4.2, *ж*).

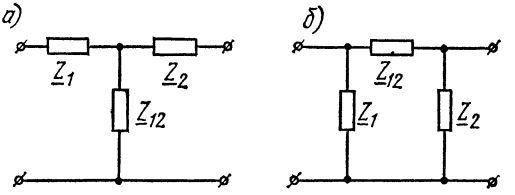


Рис. 4.1

Для количественной оценки взаимного влияния двух контуров служит коэффициент связи k. Он определяется как среднее геометрическое значение степеней связи k_1 и k_2, определяемых для каждого контура по отношению к другому:

$$k = \sqrt{k_1 k_2}\,. \tag{4.1}$$

Для чисто магнитной (или чисто электрической) связи степень связи k_1 первого контура со вторым представляет собой отношение напряжения на индуктивной катушке (конденсаторе) второго контура в режиме его холостого хода к полному напряжению на катушке (конденсаторе) первого контура. Аналогично степень связи k_2 второго контура с первым есть отношение напряжения на индуктивной катушке (конденсаторе) первого контура в режиме его холостого хода к полному напряжению на индуктивной катушке (конденсаторе) второго контура.

Для схемы рис. 4.2, *а*

$$k_1 = \frac{M}{L_1}, \quad k_2 = \frac{M}{L_2}, \quad k = \frac{M}{\sqrt{L_1 L_2}}, \tag{4.2 а}$$

для схемы рис. 4.2, *б*

$$k_1 = \frac{L_{12}}{L_1 + L_{12}}, \quad k_2 = \frac{L_{12}}{L_2 + L_{12}}, \quad k = \frac{L_{12}}{\sqrt{(L_1 + L_{12})(L_2 + L_{12})}}, \tag{4.2 б}$$

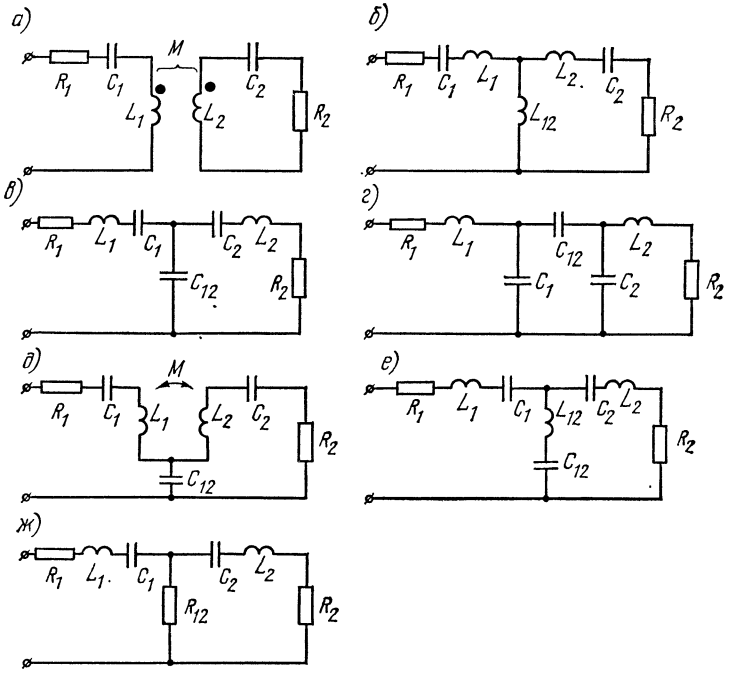


Рис. 4.2

для схемы рис.4.2, *в*

$$k_1 = \frac{C_1}{C_1 + C_{12}}, \quad k_2 = \frac{C_2}{C_2 + C_{12}}, \quad k = \frac{\sqrt{C_{11}C_{22}}}{C_{12}}, \qquad (4.2\text{в})$$

где

$$C_{11} = C_1C_{12}/(C_1 + C_{12}), \quad C_{22} = C_2C_{12}/(C_2 + C_{12});$$

для схемы рис. 4.2, *г*

$$k_1 = \frac{C_{12}}{C_{12} + C_1}, \quad k_2 = \frac{C_{12}}{C_{12} + C_2}, \quad k = \frac{C_{12}}{\sqrt{(C_{12} + C_1)(C_{12} + C_2)}}. \qquad (4.2\text{г})$$

2. **Индуктивно связанные цепи**. Приступая к расчету электрической цепи с взаимной индуктивностью, следует на схеме отметить стрелками произвольно выбираемые положительные направления токов в ветвях (и контурных токов в случае применения метода контурных токов). Кроме того, одинаковыми условными значками (буквами, звездочками, точками и т. п.) обозначить одноименные зажимы каждой пары индуктивно связанных элементов цепи (катушек).

Одноименными считаются такие зажимы, при одинаковых положительных направлениях токов относительно которых магнитные потоки самоиндукции и взаимной индукции складываются.

Заметим, что при наличии трех (или более) индуктивно связанных катушек зажимы второй и третьей катушек, являющиеся одноименными по отношению к какому-либо зажиму первой катушки, могут в общем случае оказаться разноименными относительно друг друга. В таком случае каждая пара одноименных зажимов отмечается особыми значками.

При составлении уравнений второго закона Кирхгофа с помощью комплексных чисел ($\Sigma \underline{E} = \Sigma \underline{Z} \underline{I}$) величины э. д. с. взаимной индукции $\underline{E}_{ks} = -j\omega M_{ks} \underline{I}_s$ обычно из части уравнения, содержащей э. д. с., переносятся с переменой знака в другую часть, содержащую падения напряжения, в виде членов типа $\pm \underline{U}_{ks} = \pm j\omega M_{ks} \underline{I}_s = \pm \underline{Z}_{ks} \underline{I}_s$.

Верхние (положительные) знаки принимаются тогда, когда при обходе контура, содержащего ветвь k, направление обхода этой ветви и положительное направление тока ветви s относительно одноименных зажимов одинаковы, в противном случае принимаются отрицательные знаки.

Здесь $\underline{E}_{ks}$ — комплексная э. д. с. взаимной индукции в k-й катушке, определяемая током в s-й катушке; M_{ks} — взаимная индуктивность этих катушек; ω — угловая частота; $\underline{Z}_{ks} = j\omega M_{ks}$ — сопротивление взаимной индукции.

Указанное правило разметки зажимов и выбора знаком справедливо, если M считать всегда положительным.

3. Последовательное соединение двух индуктивно связанных катушек. В этом случае эквивалентное комплексное сопротивление и эквивалентная индуктивность определяются по формулам

$$\left.\begin{aligned} \underline{Z} &= \underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 \pm 2\underline{Z}_{12}; \\ L &= L_1 + L_2 \pm 2M_{12}, \end{aligned}\right\} \qquad (4.3)$$

где $\underline{Z}_{12} = j\omega M_{12}$.

Знак плюс соответствует согласному включению катушек, а знак минус — встречному.

Примеры приведены в задачах 4.4 и 4.9.

Параллельное соединение двух индуктивно связанных катушек. Эквивалентное комплексное сопротивление определяется по формуле

$$\underline{Z} = \frac{\underline{Z}_1 \underline{Z}_2 - \underline{Z}_{12}^2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 \mp 2\underline{Z}_{12}}, \qquad (4.4\,а)$$

а эквивалентная индуктивность (при условии, что активные сопротивления катушек равны нулю)

$$L = \frac{L_1 L_2 - M^2}{L_1 + L_2 \mp 2M}. \qquad (4.4\,б)$$

Знак минус в знаменателе уравнений (4.4а) и (4.4б) ставится при согласном включении, а знак плюс — при встречном.

Примеры даны в задачах 4.11 и 4.12 .

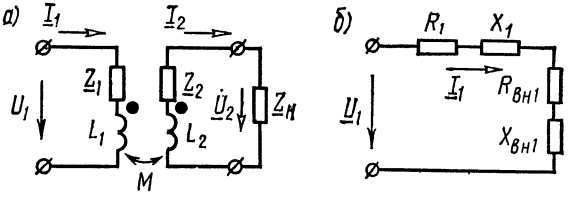


Рис. 4.3

4. Уравнения второго закона Кирхгофа для двух индуктивно связанных контуров (рис. 4.3, *а*)

$$\left.\begin{aligned} \underline{Z}_{11}\underline{I}_1 - \underline{Z}_{12}\underline{I}_2 &= \underline{U}_1; \\ \underline{Z}_{22}\underline{I}_2 - \underline{Z}_{21}\underline{I}_1 &= 0, \end{aligned}\right\} \qquad (4.5)$$

где

$$\underline{Z}_{11} = \underline{Z}_1 + j\omega L_1 = \underline{Z}_1 + jX_1 = R_{11} + jX'_{11} + jX_1 = R_{11} + jX_{11};$$

$$\underline{Z}_{22} = \underline{Z}_2 + j\omega L_2 + \underline{Z}_н = \underline{Z}_2 + jX_2 + \underline{Z}_н = R'_{22} + jX'_{22} + jX_2 + R_н + jX_н = R_{22} + jX_{22};$$

$$\underline{Z}_1 = R_{11} + jX'_{11}, \quad \underline{Z}_2 = R'_{22} + j\underline{X}'_{22}, \quad \underline{Z}_н = R_н + jX_н;$$

$$X_{11} = X'_{11} + X_1, \quad X_{22} = X'_{22} + X_2, \quad R_{22} = R'_{22} + R_н;$$

$$\underline{Z}_{12} = \underline{Z}_{21} = j\omega M = jX_{12}.$$

Схему рис. 4.3, *а* можно заменить эквивалентной (рис. 4.3, *б*), содержащей вносимые в первый контур активное и реактивное сопротивления, соответственно равные

$$R_{вн1} = \frac{\omega^2 M^2}{R_{22}^2 + X_{22}^2} R_{22} = \frac{\omega^2 M^2}{Z_{22}^2} R_{22}; \qquad (4.6)$$

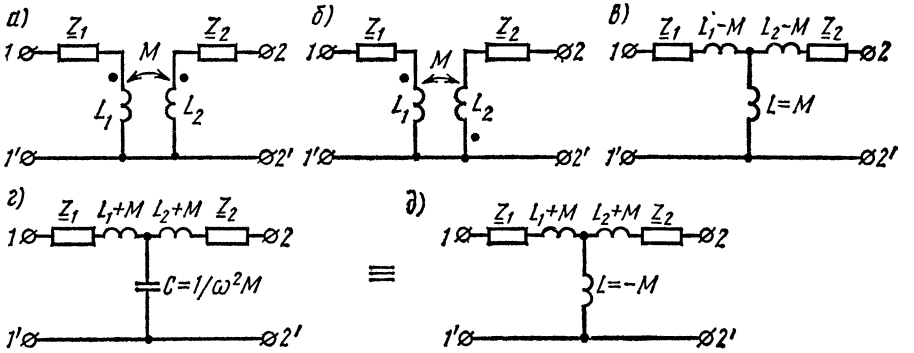


Рис. 4.4

$$X_{\text{вн1}} = -\frac{\omega^2 M^2}{R_{22}^2 + X_{22}^2} X_{22} = \frac{\omega^2 M^2}{Z_{22}^2} X_{22}. \quad (4.7)$$

Ток

$$I_1 = \frac{\underline{U}_1}{(R_{11} + R_{\text{вн1}}) + j(X_{11} + X_{\text{вн1}})}. \quad (4.8)$$

5. Развязка индуктивных связей. Цепь схемы рис. 4.4, *а* эквивалентна схеме рис. 4.4, *в*, а схема рис. 4.4, *б* — схемам рис. 4.4, *г*, *д*, не содержащим индуктивные связи. Поэтому, например, при анализе схемы рис. 4.4, *а* достаточно исследовать схему рис. 4.4, *в*.

Примеры приведены в задачах 4.17 и 4.25.

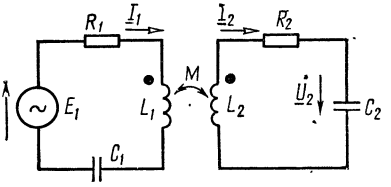


Рис. 4.5

6. Индуктивно связанные колебательные контуры. Собственные комплексные сопротивления первого и второго контуров соответственно равны: $\underline{Z}_1 = R_1 + jX_1$ и $\underline{Z}_2 = R_2 + jX_2$; где $X_1 = \omega L_1 - 1/\omega C_1$, $X_2 = \omega L_2 - 1/\omega C_2$. Комплексное сопротивление связи $\underline{Z}_{12} = j\omega M = jX_{12}$.

Действующие значения токов в связанных контурах:

$$I_1 = \frac{E_1}{\sqrt{(R_1 + R_{\text{вн1}})^2 + (X_1 + X_{\text{вн1}})}} = \frac{E_2}{\sqrt{(R_2 + R_{\text{вн2}})^2 + (X_2 + X_{\text{вн2}})^2}}, \quad (4.9)$$

$$I_2 = \frac{E_1 \dfrac{X_{12}}{Z_2}}{\sqrt{(R_1 + R_{\text{вн1}})^2 + (X_1 + X_{\text{вн1}})^2}} = \frac{E_1 \dfrac{X_{12}}{Z_1}}{\sqrt{(R_2 + R_{\text{вн2}})^2 + (X_2 + X_{\text{вн2}})^2}}, \quad (4.10)$$

где $R_{\text{вн1}} = \dfrac{X_{12}^2}{Z_2^2} R_2$ — активное сопротивление, вносимое в первый контур; $X_{\text{вн1}} = -\dfrac{X_{12}^2}{Z_2^2} X_2$ — реактивное сопротивление, вносимое в первый контур; $R_{\text{вн2}} = \dfrac{X_{12}^2}{Z_1^2} R_1$ — активное сопротивление, вносимое во второй контур; $X_{\text{вн2}} = \dfrac{X_{12}^2}{Z_1^2} X_1$ — реактивное сопротивление, вносимое во второй контур.

7. Резонансы в связанных контурах (рис. 4.5). а. Первый частный резонанс достигается изменением параметров первого контура при неизменных параметрах второго контура и постоянном коэффициенте связи k. Условие этого резонанса

$$X_{1\text{эк}} = X_1 + X_{\text{вн1}} = X_1 - \frac{X_{12}^2}{Z_2^2} X_2 = 0, \quad (4.11)$$

при этом вторичный ток достигает максимального значения:

$$I_{2\mathrm{I}\,\max} = \frac{E_1 X_{12}}{Z_2 (R_1 + R_{\text{вн1}})}. \tag{4.12}$$

б. Второй частный резонанс получается подбором параметров второго контура при неизменных параметрах первого контура и постоянном k. Этот резонанс имеет место при

$$X_{2\,\text{эк}} = X_2 + X_{\text{вн2}} = X_2 - \frac{X_{12}^2}{Z_1^2} X_1 = 0. \tag{4.13}$$

В этом случае ток во вторичном контуре достигает максимума, равного

$$I_{2\,\mathrm{II}\,\max} = \frac{E_1 X_{12}}{Z_1 (R_2 + R_{\text{вн2}})}. \tag{4.14}$$

в. Сложный резонанс представляет собой такой режим цепи, когда одновременно наблюдаются первый и второй частные резонансы.

Коэффициент связи при этом имеет оптимальное значение:

$$X_{12\,\text{опт}} = Z_2 \sqrt{R_1/R_2} = Z_1 \sqrt{R_2/R_1} = \sqrt{Z_1 Z_2}. \tag{4.15}$$

В этом случае ток вторичного контура достигает максимально возможного значения («максимум — максиморум»):

$$I_{2\,\max\,\max} = E_1/(2\sqrt{R_1 R_2}), \tag{4.16}$$

а ток первичного контура имеет оптимальное значение:

$$I_{1\,\text{опт}} = E_1/2R_1. \tag{4.17}$$

г. Полный резонанс имеет место при настройке в резонанс порознь каждого из контуров

$$X_1 = 0, \quad X_2 = 0 \tag{4.18}$$

и при подборе оптимальной связи между контурами $k_{\text{опт}} = 1/\sqrt{Q_1 Q_2}$, которой соответствует сопротивление связи

$$X_{12\,\text{опт}} = \sqrt{R_1 R_2}. \tag{4.19}$$

При полном резонансе токи контуров имеют такие же значения, как и при сложном резонансе [см. формулы (4.16) и (4.17)].

Пример дан в задаче 4.38.

8. Резонансные характеристики связанных контуров. Входное сопротивление системы связанных контуров (рис. 4.5) определяется формулой

$$\underline{Z} = R_1 + \frac{X_{12}^2}{Z_2^2} R_2 + j\left(X_1 - \frac{X_{12}^2}{Z_2^2} X_2\right). \tag{4.20}$$

Если собственные резонансные частоты контуров ω_{01} и ω_{02} между собой близки, то при их небольших расстройках относительно частоты источника $\omega[\Delta\omega_1 = (\omega - \omega_{01}) \ll \omega_{01}$ и $\Delta\omega_2 = (\omega - \omega_{02}) \ll \omega_{02}]$ входное сопротивление системы связанных контуров

$$\underline{Z} = R_{1\text{эк}} + jX_{1\text{эк}} \approx R_1\left(1 + \frac{A^2}{1+\xi_2^2}\right) + j\xi_1 R_1\left(1 - \frac{A^2}{1+\xi_2^2}\cdot\frac{\xi_2^2}{\xi_1}\right), \quad (4.21)$$

где $\xi_1 = \dfrac{X_1}{R_1} \approx 2Q_1\dfrac{\Delta\omega_1}{\omega_{01}}$ — обобщенная расстройка первого контура; $\xi_2 = \dfrac{X_2}{R_2} \approx 2Q_2\dfrac{\Delta\omega_2}{\omega_{02}}$ — обобщенная расстройка второго контура; $A = X_{12}/\sqrt{R_1R_2}$ — фактор связи.

Действующее значение вторичного тока и модуль коэффициента передачи (амплитудно-частотная характеристика) при одинаковых резонансных частотах контуров определяются выражениями:

$$I_2 = \frac{E_1 A}{\sqrt{R_1R_2}\sqrt{(A^2+1-\xi_1\xi_2)^2 + (\xi_1+\xi_2)^2}}, \quad (4.22а)$$

$$T_C = \frac{U_2}{E_1} = \frac{A}{\omega C_2\sqrt{R_1R_2}\sqrt{(A^2+1-\xi_1\xi_2)^2 + (\xi_1+\xi_2)^2}}. \quad (4.23а)$$

При настройке порознь каждого из контуров на одну и ту же частоту, т. е. когда $1/\sqrt{L_1C_1} = \omega_{01} = \omega_0 = \omega_{02} = 1/\sqrt{L_2C_2}$, различают следующие случаи связи: а) сильную ($k > k_{\text{кр}}$), б) критическую ($k = k_{\text{кр}}$), в) слабую ($k < k_{\text{кр}}$). Критической связи соответствует значение

$$k = k_{\text{кр}} = \sqrt{(\delta_1^2 + \delta_2^2)/2}, \quad (4.24)$$

где $\delta_1 = 1/Q_1$ и $\delta_2 = 1/Q_2$ — затухания первого и второго контуров.

При слабой связи резонансная кривая тока I_2 имеет один максимум. При сильной связи резонансная кривая тока I_2 имеет два максимума, наступающих при частотах связи ω_{I} и ω_{II} ($\omega_{\text{I}} < \omega_0 < \omega_{\text{II}}$):

$$\omega_{\text{I}} = \frac{\omega_0}{\sqrt{1+\sqrt{k^2-k_{\text{кр}}^2}}}; \quad \omega_{\text{II}} = \frac{\omega_0}{\sqrt{1-\sqrt{k^2-k_{\text{кр}}^2}}}. \quad (4.25)$$

При небольших расстройках $[\Delta\omega = (\omega - \omega_0) \ll \omega_0]$ системы одинаковых связанных контуров $\xi_1 = \xi_2 = \xi$ действующее значение вторичного тока и модуль коэффициента передачи

$$I_2 = \frac{E_1 A}{R\sqrt{(A^2+1-\xi^2)^2 + 4\xi^2}}, \quad (4.22б)$$

$$T_C = \frac{U_2}{E_1} = \frac{QA}{\sqrt{(A^2+1-\xi^2)^2 + 4\xi^2}}. \quad (4.23б)$$

Полоса пропускания двух идентичных ($\omega_{01} = \omega_{02} = \omega_0$, $\delta_1 = \delta_2 = \delta$) индуктивно связанных контуров на уровне $1/\sqrt{2} \approx 0{,}707$ зависит не только от затухания контуров δ, но и от коэффициента связи k.

При слабой связи и при идентичных контурах относительная полоса пропускания

$$S_r = \delta \sqrt{\left(\frac{k}{\delta}\right)^2 - 1 + \sqrt{2\left[1 + \left(\frac{k}{\delta}\right)^4\right]}}. \qquad (4.26)$$

При критической связи и при идентичных контурах относительная полоса пропускания

$$S_r = \sqrt{2}\,\delta. \qquad (4.27)$$

При сильной связи и при идентичных контурах относительная полоса пропускания

$$S_r = \delta \sqrt{\left(\frac{k}{\delta}\right)^2 - 1 + 2\left(\frac{k}{\delta}\right)}. \qquad (4.28)$$

Максимальная полоса пропускания имеет место при коэффициенте связи $k = 2{,}41\ \delta$ и равна

$$S_{r\,\max} = 3{,}1\,\delta. \qquad (4.29)$$

Примеры даны в задачах 4.34; 4.36; 4.38 и 4.39.

9. Энергетические соотношения в индуктивно связанных контурах. Мощности, выделяемые в каждом из двух связанных контуров,

$$P_1 = \frac{I_{1m}^2 R_1}{2} = I_1^2 R_1; \quad P_2 = \frac{I_{2m}^2 R_2}{2} = I_2^2 R_2. \qquad (4.30)$$

К. п. д. системы двух связанных контуров находится как отношение мощности второго контура P_2 ко всей затраченной мощности $P = P_1 + P_2$, т. е.

$$\eta = P_2/(P_1 + P_2). \qquad (4.31)$$

К. п. д. вычисляется по формуле

$$\eta = R_{\text{вн1}}/(R_1 + R_{\text{вн1}}). \qquad (4.32)$$

При настроенных первичном и вторичном контурах ($X_1 = 0$, $X_2 = 0$), но при любом коэффициенте связи k к. п. д.

$$\eta = k^2/(d_1 d_2 + k^2). \qquad (4.33)$$

При полном резонансе мощность во вторичном контуре достигает максимального значения, равного

$$P_{2\,\max\,\max} = P_{1\,\max\,\max} = E_{1m}^2/8R_1 = E_1^2/4R_1. \qquad (4.34)$$

При этом к. п. д. составляет 50%.

Пример дан в задаче 4.40.

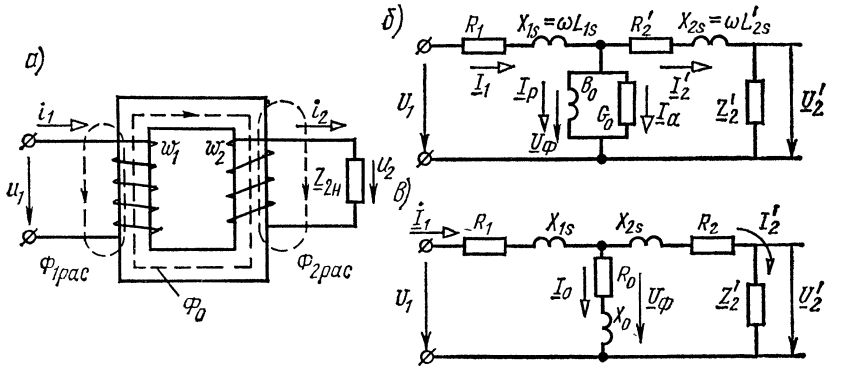


Рис. 4.6

10. Трансформатор с ферромагнитным сердечником (рис. 4.6, *а*). В нем различают основной магнитный поток Φ, замыкающийся по сердечнику и сцепленный как с первой w_1, так и со второй w_2 обмотками трансформатора, и магнитные потоки рассеяния $\Phi_{1рас}$ и $\Phi_{2рас}$ первой и второй обмоток, замыкающиеся по воздуху.

В трансформаторе с ферромагнитным сердечником э. д. с., наводимые основным магнитным потоком в первичной и вторичной обмотках, определяются по формулам

$$E_1 = 4{,}44f\Phi_m w_1, \quad E_2 = 4{,}44f\Phi_m w_2. \tag{4.35}$$

Отсюда отношение

$$E_1 : E_2 = w_1 : w_2 = n \tag{4.36}$$

называют коэффициентом трансформации.

Схема замещения трансформатора с ферромагнитным сердечником, приведенная к первичной обмотке, показана на рис. 4. 6, *б*. Здесь R_1 и R_2 — сопротивления провода соответственно первой и второй обмоток трансформатора; $L_{1рас}$ $L_{2рас}$ — индуктивности рассеяния обмоток; B_0 — основная индуктивная проводимость, обусловленная основным магнитным потоком, пронизывающим сердечник; G_0 — активная проводимость, учитывающая потери в сердечнике. Последовательный вариант схемы замещения трансформатора с индуктивным сопротивлением X_0 и сопротивлением потерь в сердечнике R_0 показан на рис. 4.6, *в*. Штрихами помечены на схемах замещения величины, измененные в соответствии с правилами приведения к первичной обмотке:

$$\underline{U}_2' = n\underline{U}_1; \quad \underline{I}_2' = \frac{1}{n}\underline{I}_2;$$

$$\underline{Z}_2' = n^2\underline{Z}_2; \quad R_2' = n^2R_2; \quad X_2' = n^2X_2. \tag{4.37}$$

При синусоидальном напряжении уравнения Кирхгофа в симво-

лической форме для первичной и вторичной обмоток трансформатора имеют вид

$$\underline{U}_1 = R_1\underline{I}_1 + j\omega L_{1\,\text{рас}}\underline{I}_1 + \underline{U}_\Phi; \tag{4.38}$$

$$\left.\begin{aligned} \underline{U}_\Phi &= R_2'\underline{I}_2' + j\omega L_{2\text{рас}}'\underline{I}_2' + \underline{U}_2'; \\ \underline{U}_2' &= \underline{I}_2'\underline{Z}_2'. \end{aligned}\right\} \tag{4.39}$$

Примеры приведены в задачах 4.43, 4.45—4.48.

УПРАЖНЕНИЯ И ЗАДАЧИ

А. Расчет связанных электрических цепей

4.1. Резонансные частоты двух индуктивно-связанных контуров (см. рис. 4.2, *а*) соответственно равны 8 и 10 МГц, а их емкости 50 и

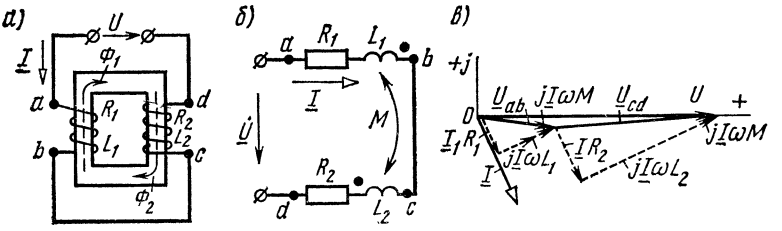


Рис. 4.7

80 пФ. При какой взаимной индуктивности можно получить коэффициент связи 0,05?

4.2. Определить емкость конденсатора связи в схеме с внутренней емкостной связью (см. рис. 4.2, *в*), если $C_1 = C_2 = 100$ пФ, а коэффициент связи равен 0,1.

4.3. В схеме цепи с автотрансформаторной связью (см. рис. 4.2,*б*) $L_1 = 20$ мкГн, $C_1 = 50$ пФ, $L_2 = 6$ мкГн, резонансная частота первого контура 4 МГц. Найти коэффициент связи между контурами.

4.4. Определить эквивалентное комплексное сопротивление цепи (рис. 4.7, *а*), ток и напряжения между точками *a* и *b*, *c* и *d*, если известны $U = 130$ В, $R_1 = 2$ Ом, $R_2 = 3$ Ом, $\omega L_1 = 3$ Ом, $\omega L_2 = 7$ Ом, $\omega M = 1$ Ом.

Р е ш е н и е. Проследив по рис. 4.7, *а* прохождение тока по виткам обеих катушек, видим, что в каждой из них потоки самоиндукции и взаимной индукции действуют согласно. Таким образом, катушки включены согласно. Заданная цепь может быть представлена схемой, показанной на рис. 4.7, *б*. Составим для нее уравнение второго закона Кирхгофа:

$$\underline{U} = \underline{Z}_1\underline{I} + \underline{Z}_{12}\underline{I} + \underline{Z}_2\underline{I} + \underline{Z}_{21}\underline{I},$$

где

$$\underline{Z}_1 = R_1 + j\omega L_1 = (2 + j3)\ \text{Ом};$$

$$\underline{Z}_2 = R_2 + j\omega L_2 = (3 + j7)\ \text{Ом};$$

$$\underline{Z}_{12} = \underline{Z}_{21} = j\omega M = j1\ \text{Ом}.$$

Эквивалентное комплексное сопротивление цепи

$$\underline{Z} = \underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + 2\underline{Z}_{12} = 5 + j12 = 13e^{j67°20'}\ \text{Ом}.$$

Искомый комплексный ток

$$\underline{I} = U/\underline{Z} = 130/13e^{j67°20'} = 10e^{-j67°20'}\ \text{А}.$$

Комплексные напряжения между точками a и b, c и d равны:

$$\underline{U}_{ab} = \underline{I}(\underline{Z}_1 + \underline{Z}_{12}) = 44{,}7e^{-j3°50'}\ \text{В};$$

$$\underline{U}_{cd} = \underline{I}(\underline{Z}_2 + \underline{Z}_{21}) = 85{,}5e^{j2°5'}\ \text{В}.$$

На рис. 4.7, *в* изображена векторная диаграмма. По вещественной оси отложен вектор напряжения, от него в сторону отставания на 67°20′ направлен вектор тока, затем отложены векторы падения напряжения в каждой из катушек.

4.5. Для цепи рис. 4.8, *а* найти ток и напряжение между точками a и b, c и d. Даны: $R_1 = 2$ Ом, $R_2 = 4$ Ом, $\omega L_1 = 6$ Ом, $\omega L_2 = 4$ Ом, $\omega M = 1$ Ом. К цепи приложено напряжение $U = 100$ В. Построить векторную диаграмму.

Указание. На рис. 4.8, *б* дана эквивалентная схема, а на рис. 4.8, *в* по результатам расчетов построена векторная диаграмма.

4.6. К цепи рис. 4.8, *а* приложено напряжение $U = 100$ В. Найти ток и напряжения $\underline{U}_{ab}$ и $\underline{U}_{cd}$, а также построить векторную диа-

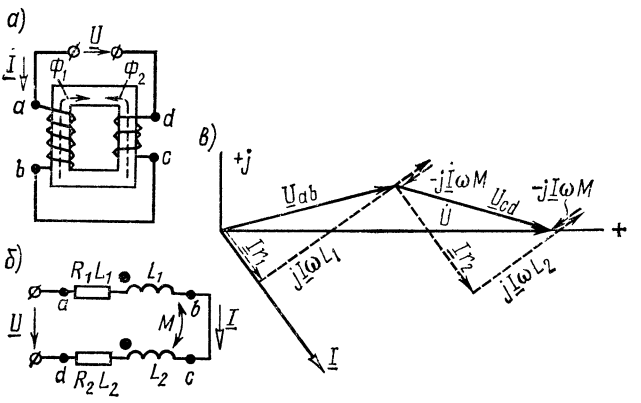


Рис. 4.8

грамму. Даны $R_1 = 30$ Ом, $R_2 = 50$ Ом, $\omega L_1 = 120$ Ом, $\omega L_2 = 30$ Ом. Коэффициент связи $k = 0{,}75$.

Замечание. По результатам решения обратить внимание на то, что напряжение на одной из катушек отстает по фазе от тока.

4.7. Вычислить ток и напряжение между точками a и b, если $R_1 = 5$ Ом, $R_2 = 3$ Ом, $\omega L_1 = 4$ Ом, $\omega L_2 = 2$ Ом, $\omega M = 2$ Ом,

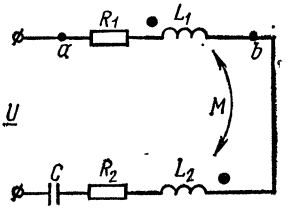


Рис. 4.9

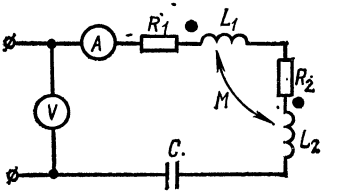


Рис. 4.10

$1/\omega C = 4$ Ом, а приложенное к цепи напряжение $\underline{U} = 100$ В (рис. 4.9). Построить векторную диаграмму.

4.8. Вольтметр и амперметр, включенные в цепь (рис. 4.10), показали $U = 88$ мВ, $I = 2{,}2$ мА. Чему равна емкость C, если $R_1 = 9{,}5$ Ом, $\omega L_1 = 14{,}6$ Ом, $R_2 = 11{,}6$ Ом, $\omega L_2 = 17$ Ом, $\omega M = 3{,}2$ Ом? Частота тока $f = 50$ кГц.

4.9. Для определения взаимной индуктивности двух катушек их соединили последовательно и подключили к источнику; были измерены напряжение, ток и мощность в двух случаях: в первом — зажим *2* первой катушки был соединен с зажимом *3* второй катушки (рис. 4.11, *а*), во втором — зажим *2* первой катушки был соединен с зажимом *4* второй катушки (рис. 4.11, *б*). Показания приборов при первом опыте: $U_1 = 120$ В, $I_1 = 12$ А, $P_1 = 864$ Вт; при втором — $U_2 = 120$ В, $I_2 = 10$ А, $P_2 = 600$ Вт.

Чему равна взаимная индуктивность катушек, если частота переменного тока $f = 50$ Гц? Выяснить, в какой из двух схем катушки соединены согласно.

Р е ш е н и е. По данным первого опыта найдем полное сопротивление схемы Z_I, ее активное R_I и реактивное сопротивления X_I:

$$Z_I = U_1/I = 10 \text{ Ом}; \quad R_I = P_1/I_1^2 = 6 \text{ Ом}; \quad X_I = \sqrt{Z_I^2 - R_I^2} = 8 \text{ Ом}.$$

Аналогично из данных второго опыта:

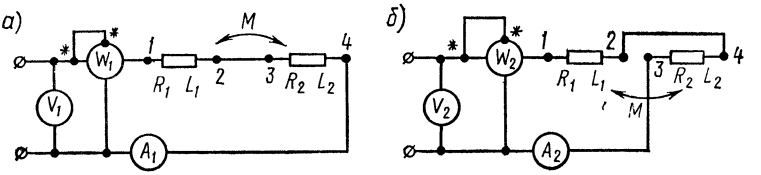


Рис. 4.11

$Z_{II} = U_2/I_2 = 12$ Ом; $R_{II} = P_2/I_2^2 = 6$ Ом; $X_{II} = \sqrt{Z_{II}^2 - R_{II}^2} =$ $= 10{,}4$ Ом.

Равенство полученных значений активного сопротивления $R_I =$ $= R_{II}$ свидетельствует об отсутствии ошибок измерения. Реактивное же сопротивление во втором опыте оказалось больше, чем в первом

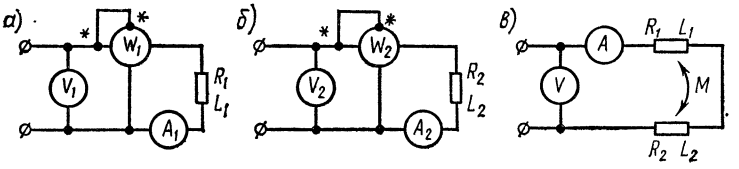


Рис. 4.12

($X_{II} > X_I$). Это указывает на то, что вторая схема соответствует согласному включению, а первая — встречному.

Искомую взаимную индуктивность найдем из уравнений

$$\omega L_1 + \omega L_2 + 2\omega M = X_{II} \text{ и } \omega L_1 + \omega L_2 - 2\omega M = X_I .$$

Вычитая одно уравнение из другого, получим

$$M = (X_2 - X_1)/4\omega = (10{,}4 - 8)/(4 \cdot 2\pi \cdot 50) = 1{,}91 \text{ мГн}.$$

4.10. При включении одной первой катушки (рис. 4.12, *а*) приборы показали $U_1 = 52$ В, $I_1 = 4$ А, $P_1 = 80$ Вт, а при включении только одной второй катушки (рис. 4.12, *б*) $U_2 = 52$ В, $I_2 = 4{,}16$ А, $P_2 =$

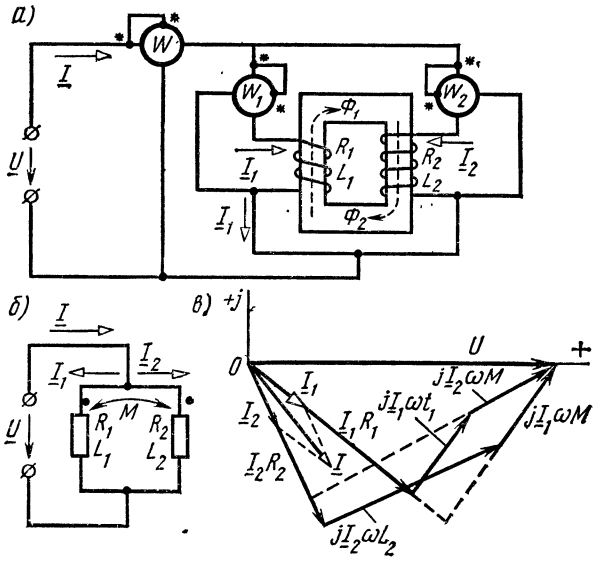


Рис. 4.13

$=60{,}5$ Вт. При включении же катушек по схеме рис. 4.12, *в* приборы показали $U = 76$ В, $I = 4$ А.

Выяснить, включены катушки согласно или встречно, и подсчитать взаимную индуктивность M, если частота переменного тока $f = 50$ Гц.

4.11. Даны две параллельно соединенные катушки (рис. 4.13, *а*), параметры которых $R_1 = 20$ Ом, $\omega L_1 = 10$ Ом, $R_2 = 20$ Ом, $\omega L_2 = 20$ Ом и сопротивление взаимной индукции $\omega M = 10$ Ом. К цепи подведено напряжение $U = 150$ В. Определить все токи и построить векторную диаграмму. Определить показание каждого ваттметра и мощности тепловых потерь в каждой из ветвей.

Р е ш е н и е. Из рис. 4.13, *а* видно, что катушки соединены согласно, так как каждую из них магнитные потоки само- и взаимной индукции пронизывают в одном и том же направлении. На рис. 4.13, *б* начерчена схема заданной цепи. Введем обозначения:

$$\underline{Z}_1 = R_1 + j\omega L_1 = (20 + j10) \text{ Ом};$$

$$\underline{Z}_2 = R_2 + j\omega L_2 = (20 + j20) \text{ Ом}; \quad \underline{Z}_\text{м} = j\omega M = j10 \text{ Ом}.$$

По законам Кирхгофа

$$\underline{U} = \underline{I}_1 \underline{Z}_1 + \underline{I}_2 \underline{Z}_\text{м}; \tag{1}$$

$$\underline{U} = \underline{I}_2 \underline{Z}_2 + \underline{I}_1 \underline{Z}_\text{м}; \tag{2}$$

$$\underline{I} = \underline{I}_1 + \underline{I}_2. \tag{3}$$

Решив совместно уравнения (1) и (2) и приняв $\underline{U} = U = 150$ В, получим

$$\underline{I}_1 = U \frac{\underline{Z}_2 - \underline{Z}_\text{м}}{\underline{Z}_1\underline{Z}_2 - \underline{Z}_\text{м}^2} = 4 - j3 = 5e^{-j36°50'} \text{ А};$$

$$\underline{I}_2 = \frac{\underline{Z}_1 - \underline{Z}_\text{м}}{\underline{Z}_1\underline{Z}_2 - \underline{Z}_\text{м}^2} = 2 - j4 = 4{,}47e^{-j63°30} \text{ А};$$

$$\underline{I} = \underline{I}_1 + \underline{I}_2 = 6 - j7 = 9{,}22e^{-j49°25'} \text{ А}.$$

На рис. 4.13, *в* по уравнениям (1)—(3) построена векторная диаграмма. По вещественной оси отложен вектор U. На основе расчетов построены векторы $\underline{I}_1$, $\underline{I}_2$ и $\underline{I}$. Затем на основании уравнения (1) построены векторы $\underline{I}_1 R_1$, $\underline{I}_1 j\omega L$, $\underline{I}_2 j\omega M$; их сумма дает вектор U. Аналогично построены векторы по уравнению (2). Определяем показания каждого из ваттметров:

$$P_1 = \text{Re}\left[\underline{U}\underline{I}_1^*\right] = \text{Re}\left[150(4 + j3)\right] = 150 \cdot 4 = 600 \text{ Вт};$$

$$P_2 = \text{Re}\left[\underline{U}\,\underline{I}_2^*\right] = \text{Re}\left[150(2 + j4)\right] = 150 \cdot 2 = 300 \text{ Вт};$$

$$P = \text{Re}\left[\underline{U}\,\underline{I}^*\right] = \text{Re}\left[150(6 + j7)\right] = 150 \cdot 6 = 900 \text{ Вт}.$$

Тепловые потери в первой и второй ветвях соответственно равны:

$$\Delta P_1 = I_1^2 R_1 = 5^2 \cdot 20 = 500 \text{ Вт};$$

$$\Delta P_2 = I_2^2 R_2 = 4{,}47^2 \cdot 20 = 400 \text{ Вт},$$

а их сумма $\Delta P_1 + \Delta P_2$ равна мощности P, поступающей во всю рассматриваемую цепь (900 Вт).

Активная мощность $P_1 = 600$ Вт, потребляемая первой ветвью от источника энергии, частично расходуется на тепловые потери в этой ветви ($\Delta P_1 = 500$ Вт), а остальная часть (600—500 = 100 Вт) поступает в магнитное поле, откуда вследствие взаимной индукции передается во вторую катушку. Это видно из следующего.

Напряжение взаимной индукции на первой катушке

$$\underline{U}_{1м} = \underline{Z}_м \underline{I}_2 = j10\,(2 - j4) = (40 + j20) \text{ В},$$

а мощность, передаваемая полем из первой катушки, во вторую,

$$P_{1м} = \operatorname{Re}\left[\underline{U}_{1м}\underline{I}_1^*\right] = \operatorname{Re}\left[(40 + j20)(4 + j3)\right] = 40 \cdot 4 - 20 \cdot 3 = 100 \text{ Вт}.$$

Аналогично,

$$\underline{U}_{2м} = \underline{Z}_м \underline{I}_1 = j10\,(4 - j3) = (30 + j40) \text{ В};$$

$$P_{2м} = \operatorname{Re}\left[\underline{U}_{2м}\underline{I}_2^*\right] = \operatorname{Re}\left[(30 + j40)(2 + j4)\right] = 30 \cdot 2 - 40 \cdot 4 = -100 \text{ Вт}.$$

4.12. Вычислить токи для цепи схемы (рис. 4.14, *а*), параметры которой равны $\underline{Z}_1 = (20 + j10)$ Ом, $\underline{Z}_2 = (20 + j\,20)$ Ом, $\underline{Z}_м = j10$ Ом. Напряжение $U = 150$ В.

Указание. Катушки цепи, изображенной на рис. 4.14, *б*, соединены встречно. При указанных на схеме положительных направлениях токов система уравнений Кирхгофа будет иметь следующий вид:

$$\underline{U} = \underline{I}_1 \underline{Z}_1 - \underline{I}_2 \underline{Z}_м; \quad \underline{U} = \underline{I}_2 \underline{Z}_2 - \underline{I}_1 \underline{Z}_м; \quad \underline{I} = \underline{I}_1 + \underline{I}_2.$$

4.13. Подобрать емкость C так, чтобы в цепи схемы рис. 4.15 при угловой частоте $\omega = 5 \cdot 10^5$ с$^{-1}$ был резонанс напряжений. Параметры цепи: $R_1 = 100$ Ом, $L_1 = 0{,}1$ мГн, $R_2 = 100$ Ом, $L_2 = 0{,}2$ мГн, $M = 0{,}1$ мГн. При найденной емкости определить токи и построить векторную диаграмму, если $U = 75$ мВ.

4.14. При какой емкости C, включенной в цепь (рис. 4.16), будет резонанс токов на частоте $f = 10^4$ Гц? Параметры цепи $L_1 = 318$ мкГн, $L_2 = 159$ мкГн, $M = 124$ мкГн. Вычислить токи, если $U = 40$ мВ.

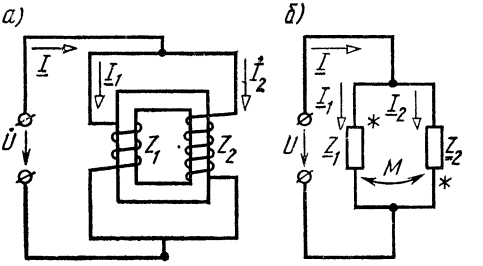


Рис. 4.14

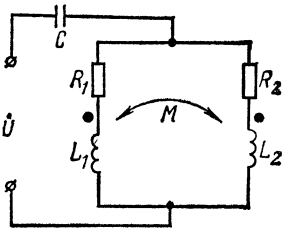


Рис. 4.15

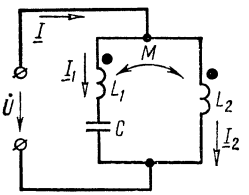


Рис. 4.16

4.15. К первичной обмотке трансформатора без стального сердечника подведено напряжение $U_1 = 120$ В (рис. 4.17, *а*). Определить напряжение на нагрузочном сопротивлении $\underline{Z}$ при $\underline{Z_1} = R_1 + j\omega L_1 = (10 + j42)$ Ом, $Z_2 = R_2 + j\omega L_2 = (15 + j70)$ Ом, $\underline{Z} = R - j1/(\omega C) = (5 - j10)$Ом, $Z_м = j\omega M = j20$ Ом. Построить векторную диаграмму.

Р е ш е н и е. Система уравнений второго закона Кирхгофа для этого случая будет:

$$\underline{I}_1\underline{Z}_1 - \underline{I}_2\underline{Z}_м = \underline{U}_1; \qquad (1)$$

$$\underline{I}_2(\underline{Z}_2 + \underline{Z}) - \underline{I}_1\underline{Z}_м = 0. \qquad (2)$$

Решая эти два уравнения, получим:

$$\underline{I}_1 = 1 - j3 = 3{,}16e^{-j71°35'} \text{ А}; \quad \underline{I}_2 = 0{,}6 - j0{,}8 = 1e^{-j53°10'} \text{ А}.$$

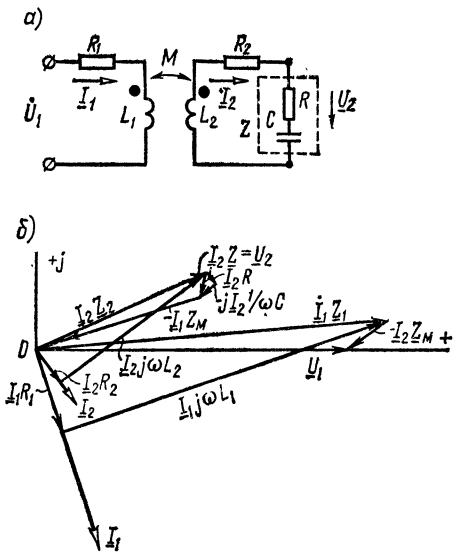


Рис. 4.17

Напряжение на сопротивлении $\underline{Z}$

$$\underline{U}_2 = \underline{I}_2\underline{Z} = -5 - j10 = 11{,}2e^{-j116°10'} \text{ В}.$$

Векторная диаграмма приведена на рис. 4.17, *б*. Порядок ее построения таков: на основе расчетов отложены векторы токов $\underline{I}_1$, $\underline{I}_2$, далее в соответствии с уравнением (1) отложены векторы $\underline{I}_1R_1$, $\underline{I}_1j\omega L_1$, $-\underline{I}_2j\omega M$, их сумма дает вектор $\underline{U}_1$. Аналогично построены векторы по уравнению (2).

4.16. Во вторичной обмотке трансформатора без стального сердечника проходит ток $I_2 = 0{,}5$А (рис. 4.18, *а*, *б* и *в*). Коэф-

фициент связи между первой и второй обмотками $k = 0{,}5$. Вторичная обмотка трансформатора замкнута на конденсатор емкостью C. Сопротивления элементов цепи: $R_1 = 60$ Ом, $\omega L_1 = 80$ Ом, $R_2 = 90$ Ом, $\omega L_2 = 45$ Ом и $1/(\omega C) = 210$ Ом.

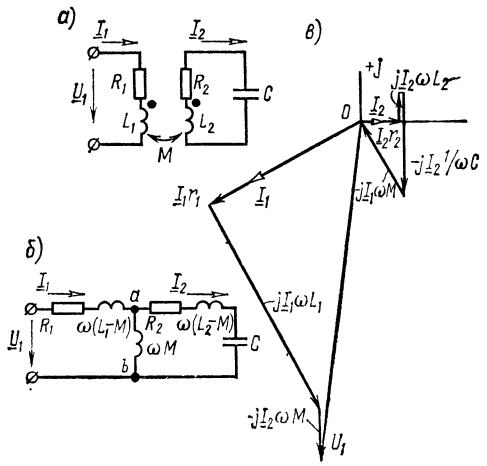


Рис. 4.18

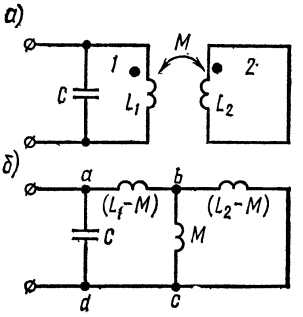


Рис. 4.19

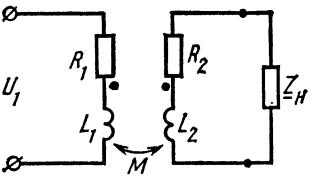


Рис. 4.20

Определить ток в первичной обмотке $\underline{I}_1$ и приложенное к ней напряжение $\underline{U}_1$.

Указание. Зная, что $k = M/\sqrt{L_1 L_2} = \omega M/\sqrt{\omega L_1 \omega L_2}$, найдем ωM.

4.17. Колебательный контур *1* без потерь индуктивно связан с короткозамкнутой цепью *2* (рис. 4.19, *а*). Чему равна резонансная частота, если $L_1 = 9$ мГн, $L_2 = 4$ мГн; $M = 2$ мГн, $C = 0{,}2$ мкФ?

Р е ш е н и е. На рис. 4.19, *б* представлена схема, эквивалентная заданной (см. рис. 4.4, *а* и *в*).

Резонанс токов наступит, когда реактивная проводимость равна нулю. Вычислим ее, начиная с определения эквивалентного комплексного сопротивления двух параллельных ветвей, подключенных к точкам *b* и *c*:

$$\underline{Z}_{bc} = \frac{j\omega M j\omega_0 (L_2 - M)}{j\omega_0 L_2} = \frac{j\omega_0 (L_2 - M)}{L_2};$$

$$\underline{Z}_{ac} = \underline{Z}_{ab} + \underline{Z}_{bc} = j\omega_0 (L_1 - M) + \frac{j\omega_0 M (L_2 - M)}{L_2} = \frac{j\omega_0 (L_1 L_2 - M^2)}{L_2};$$

$$\underline{Y}_{эк} = \underline{Y}_{ad} + \underline{Y}_{ac} = j\omega_0 C + \frac{L_2}{j\omega_0 (L_1 L_2 - M^2)} = 0,$$

или

$$\omega_0 C = \frac{L_2}{\omega_0 (L_1 L_2 - M^2)},$$

отсюда

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{L_2}{C (L_1 L_2 - M^2)}} = 2{,}5 \cdot 10^4 \text{ с}^{-1}.$$

4.18. Какое сопротивление $\underline{Z}_н$ следует подключить к вторичной обмотке трансформатора без стального сердечника (рис. 4.20), чтобы

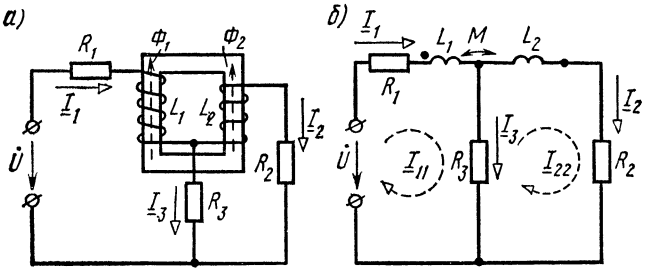


Рис. 4.21

ток на входе первичной катушки был равен 15 А и совпадал по фазе с первичным напряжением $U_1 = 120$ В? Даны: $R_1 = 2$ Ом, $\omega L_1 = 8$ Ом, $R_2 = 3$ Ом, $\omega L_2 = 15$ Ом, $\omega M = 10$ Ом.

4.19. К цепи, изображенной на рис. 4.21, *а*, подключено напряжение $U = 110$ В. Параметры цепи: $R_1 = 20$ Ом, $R_2 = 15$ Ом, $R_3 = 10$ Ом, $L_1 = 0{,}4$ Гн, $L_2 = 0{,}3$ Гн, $M = 0{,}2$ Гн. Частота тока $f = 50$ Гц. Найти все токи.

Указание. Выбрав положительные направления токов, как это указано на рис. 4.21, *а*, изобразим заданную цепь схемой, показанной на рис. 4.21, *б*.

4.20. Найти емкостное сопротивление X_C, при котором в цепи рис. 4.22 наступит резонанс напряжений, если известны $R_1 = 30$ Ом, $\omega L_1 = 20$ Ом, $R_2 = 50$ Ом, $\omega L_2 = 10$ Ом, $\omega M = 10$ Ом, $R_3 = 50$ Ом. При найденном X_C определить все токи, если $U = 120$ В.

Указание. Для того чтобы в цепи был резонанс напряжений, надо, чтобы приложенное напряжение $\underline{U}$ и ток $\underline{I}_1$ в ее неразветвленной части совпадали по фазе. Поэтому найдем $\underline{I}_1$ и вычислим отношение $\underline{U}/\underline{I}_1$, которое должно быть вещественной величиной, для этого коэффициент при мнимой части надо приравнять нулю.

4.21. Для цепи рис. 4.23 определить емкостное сопротивление X_C, при котором наступит резонанс токов. Сопротивления элементов цепи: $\underline{Z}_1 = (20 + j34)$ Ом, $\underline{Z}_2 = (12 + j10)$ Ом, $\underline{Z}_{12} = j6$ Ом, $\underline{Z}_3 = -jX_C$.

При найденном значении емкостного сопротивления найти все токи, если $U = 200$ В.

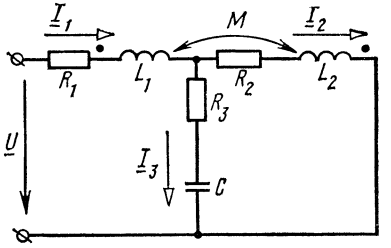


Рис. 4.22

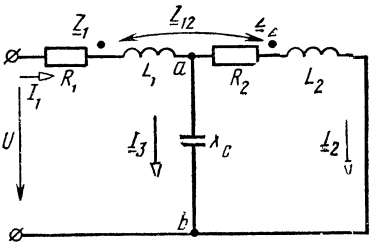


Рис. 4.23

Указание. Следует сначала определить все токи, а затем напряжение $\underline{U}_{ab}$ на участке *ab*. Разонанс токов будет при условии совпадения по фазе напряжения $\underline{U}_{ab}$ и тока $\underline{I}_1$.

По результатам вычислений должно быть получено следующее отношение:

$$\frac{\underline{U}_{ab}}{\underline{I}_1} = \frac{\underline{Z}_2\underline{Z}_3 + \underline{Z}_3\underline{Z}_{12}}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3}.$$

Мнимую часть этого отношения приравниваем нулю, откуда находим два значения емкостного сопротивления $X_{C1} = 19$ Ом и $X_{C2} = 0$. Второе значение $X_{C2} = 0$ (короткое замыкание) отбрасываем как не удовлетворяющее требованиям задачи.

4.22. При каком коэффициенте связи *k* в цепи рис. 4.23 будет резонанс токов? Даны: $R_1 = 4$ Ом, $X_1 = 6$ Ом, $R_2 = 4$ Ом, $X_2 = 6$ Ом и $X_C = 8$ Ом. Для указанного случая вычислить токи и построить векторную диаграмму, если $U = 115$ В.

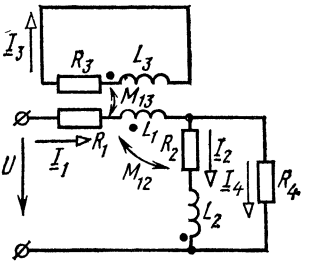


Рис. 4.24

4.23. Определить все токи, если сопротивления элементов цепи рис. 4.24 $R_1 = 8$ Ом, $\omega L_1 = 56$ Ом, $R_2 = 10$ Ом, $\omega L_2 = 20$ Ом, $R_3 = 15$ Ом, $\omega L_3 = 20$ Ом, $R_4 = 5$ Ом, $\omega M_{12} = 10$ Ом, $\omega M_{13} = 10$ Ом. Напряжение, приложенное к цепи, $U = 100$ В. Составить баланс мощностей.

Р е ш е н и е. Обозначим: $\underline{Z}_1 = (8 + j56)$ Ом; $\underline{Z}_2 = (10 + j20)$ Ом; $\underline{Z}_3 = (15 + j20)$ Ом; $\underline{Z}_4 = 5$ Ом; $\underline{Z}_{12} = j10$ Ом; $\underline{Z}_{13} = j10$ Ом.

Задавшись положительными направлениями токов, указанными на схеме, составим систему уравнений Кирхгофа.

$$\underline{I}_1(\underline{Z}_1 - \underline{Z}_{12}) + \underline{I}_2(\underline{Z}_2 - \underline{Z}_{12}) - \underline{I}_3\underline{Z}_{13} = \underline{U};$$

$$\underline{I}_2\underline{Z}_2 - \underline{I}_1\underline{Z}_{12} - \underline{I}_4\underline{Z}_4 = 0; \quad \underline{I}_3\underline{Z}_3 - \underline{I}_1\underline{Z}_{13} = 0;$$

$$\underline{I}_1 = \underline{I}_2 + \underline{I}_4.$$

Решив их, найдем:

$$\underline{I}_1 = 0{,}56 - j1{,}92 = 2e^{-j73°45'} \text{ А};$$

$$\underline{I}_2 = 0{,}4 - j0{,}8 = 0{,}894e^{-j63°30'}\ \text{А};$$

$$\underline{I}_3 = 0{,}64 - j0{,}48 = 0{,}8e^{-j36°50'}\ \text{А};$$

$$\underline{I}_4 = 0{,}16 - j1{,}12 = 1{,}13e^{-j82°}\ \text{А}.$$

Проверим баланс мощностей:

$$UI_1 \cos\varphi_1 = \operatorname{Re}\left[\underline{U}\,\underline{I}_1^*\right] = I_1^2R_1 + I_2^2R_2 + I_3^2R_3 + I_4^2R_4,$$

или

$$\operatorname{Re}\left[100\,(0{,}56 + j1{,}92)\right] = 2^2 \cdot 8 + 0{,}894^2 \cdot 10 + 0{,}8^2 \cdot 15 + 1{,}13^2 \cdot 5,$$

или

$$100 \cdot 0{,}56 = 32 + 8 + 9{,}6 + 6{,}4.$$

Получилось тождество: 56=56.

4.24. В схеме цепи рис. 4.25, *а* определить R_4 и M, при которых мост уравновешен. Даны: $R_1 = 10$ Ом, $R_2 = 20$ Ом, $R_3 = 25$ Ом, $L_1 = 4$ мГн, $L_2 = 6$ мГн. Найти входное сопротивление цепи, если $\omega = 10^4$ с$^{-1}$.

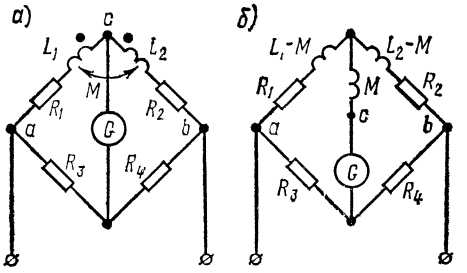


Рис. 4.25

Р е ш е н и е. Воспользовавшись развязкой индуктивных связей (см. п. 5 основных положений), преобразуем исходную схему рис. 4.25,*а* в эквивалентную, не содержащую взаимных индуктивностей (рис. 4.25, *б*); при этом следует обратить внимание на появление новой узловой точки. Для последней схемы записываем условие равновесия моста

$$[R_1 + j\omega\,(L_1 - M)]\,R_4 = [R_2 + j\omega\,(L_2 - M)]\,R_3.$$

Приравняем соответственно вещественные и мнимые составляющие:

$$R_1R_4 = R_2R_3; \quad \omega\,(L_1 - M)\,R_4 = \omega\,(L_2 - M)\,R_3.$$

Решая эти уравнения, найдем: $R_4 = 50$ Ом, $M = 2$ мГн.

Определяем входное сопротивление цепи:

$$\underline{Z}_{\text{вх}} = \frac{R_3\,[R_1 + j\omega\,(L_1 - M)]}{R_3 + R_1 + j\omega\,(L_1 - M)} + \frac{R_4\,[R_2 + j\omega\,(L_2 - M)]}{R_4 + R_2 + j\omega\,(L_2 - M)} = 41{,}5e^{j33°40'}\ \text{Ом}.$$

4.25. Вычислить входное сопротивление цепи (рис. 4.26, *а*), если $X_1 = 25$ Ом, $X_2 = 40$ Ом, $X_3 = 65$ Ом, $X_{12} = 20$ Ом, $X_{23} = 10$ Ом, $X_{31} = 25$ Ом, $X_C = 12{,}5$ Ом.

При каком сопротивлении X_C в цепи будет резонанс напряжений?

Указание. Заданная схема может быть заменена эквивалентной, представленной на рис. 4.26, *б*, в которой появились новые узловые точки *A*, *B*, *C*. В ней следует треугольник сопротивления *ABC* заменить эквивалентной звездой.

4.26. Определить емкостное сопротивление X_C, при котором в цепи (рис. 4.27) наступит: а) резонанс токов; б) резонанс напряжений. Для каждого из случаев определить показания амперметров. Даны:

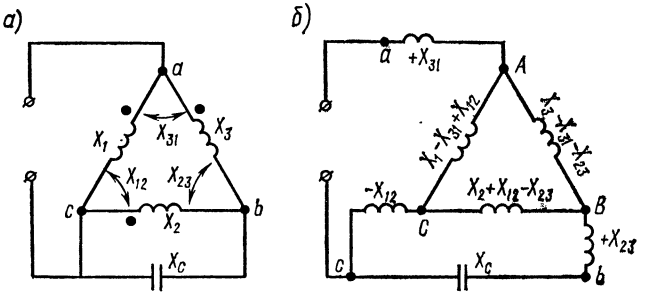


Рис. 4.26

$U = 24$ В, $R_1 = 20$ Ом, $X_1 = 4$ Ом, $X_2 = 14$ Ом, $X_3 = 18$ Ом, $X_{23} = 2$ Ом.

4.27. В цепи рис. 4.28 каждая из трех катушек индуктивно связана с двумя другими. Вычислить все токи, если $\underline{Z}_1 = R_1 + j\omega L_1 = (7 + j20)$ Ом, $\underline{Z}_2 = R_2 + j\omega L_2 = (6 + j16)$ Ом, $\underline{Z}_3 = j\omega L_3 - 1/(j\omega C_3) = j(14 - 22) = -j8$ Ом, $\underline{Z}_{12} = j4$ Ом, $\underline{Z}_{23} = j5$ Ом, $\underline{Z}_{31} = j6$ Ом; $U = 100$ В.

Точкой отмечены одноименные зажимы каждой из катушек относительно двух других.

Р е ш е н и е. Составим уравнения по методу контурных токов:

$$\underline{I}_{11}(\underline{Z}_1 + \underline{Z}_3 - 2\underline{Z}_{31}) + \underline{I}_{22}(-\underline{Z}_3 + \underline{Z}_{12} + \underline{Z}_{31} - \underline{Z}_{23}) = U;$$

$$\underline{I}_{11}(-\underline{Z}_3 + \underline{Z}_{12} + \underline{Z}_{13} - \underline{Z}_{23}) + \underline{I}_{22}(\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3 + 2\underline{Z}_{23}) = 0.$$

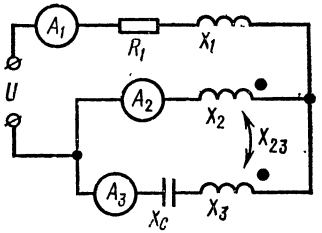


Рис. 4.27

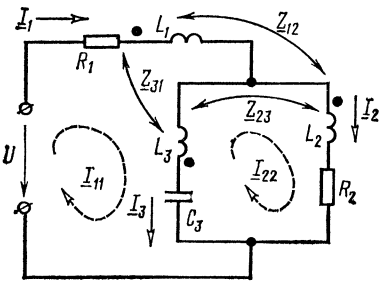


Рис. 4.28

Решая их, найдем контурные токи, а затем и токи в ветвях:

$$\underline{I}_1 = \underline{I}_{11} = 7{,}76e^{j40°45'}\ \text{А}; \qquad \underline{I}_2 = \underline{I}_{22} = 5{,}3e^{-j120°50'}\ \text{А};$$

$$\underline{I}_3 = \underline{I}_{11} - \underline{I}_{22} = 12{,}9e^{j48°10'}\ \text{А}.$$

Б. Резонансы в связанных контурах *

4.28. Даны два индуктивно связанных колебательных контура (рис. 4.5), имеющих параметры: $R_1 = 15$ Ом, $L_1 = 250$ мкГн, $R_2 = 100$ Ом, $L_2 = 300$ мкГн, $C_2 = 1150$ пФ, коэффициент связи $k = 16{,}5\%$.

При какой емкости C_1 будет выполнено условие первого частного резонанса, если частота источника $f = 600$ кГц?

Чему при этом равны токи первичного и вторичного контуров, первичная и вторичная мощности и к. п. д., если $E_1 = 50$ мВ?

4.29. В схеме цепи рис.4.5, параметры которой $R_1 = 15$ Ом, $L_1 = 250$ мкГн, $R_2 = 100$ Ом, $L_2 = 300$ мкГн, $C_2 = 1150$ пФ, путем настройки первого контура и изменением коэффициента связи k требуется обеспечить режим сложного резонанса при частоте источника $f = 600$ кГц. Чему при этом равны C_1, M, первичный и вторичный токи, мощности каждого из контуров и к. п. д., если $E_1 = 50$ мВ.

4.30. Для индуктивно связанных контуров, параметры которых $R_1 = 15$ Ом, $L_1 = 250$ мкГн, $R_2 = 100$ Ом и $L_2 = 300$ мкГн, требуется осуществить режим полного резонанса настройкой первого и второго контуров и подбором оптимальной связи при частоте $f = 600$ кГц. Определить C_1, C_2, $X_{12опт}$. Чему равны токи $I_{1max\,max}$, $I_{2max\,max}$, и мощности $P_{1max\,max}$, $P_{2max\,max}$ и к. п. д., если $E_1 = 50$ мВ.

4.31. Задана система из двух индуктивно связанных контуров (см. рис. 4.5) с параметрами: $R_1 = 12$ Ом, $L_1 = 400$ мкГн, $C_1 = 333$ пФ, $R_2 = 16$ Ом, $L_2 = 500$ мкГн и $M = 60$ мкГн.

Рассчитать емкость C_2 второго контура так, чтобы при $\omega = 3 \cdot 10^6$ рад/с было выполнено условие второго частного резонанса. Чему при этом равны P_{1IImax}, P_{2IImax} и η, если $E_1 = 20$ В?

4.32. Для двух индуктивно связанных контуров, параметры которых даны в задаче 4.31, определить C и $M_{опт}$, соответствующие режиму сложного резонанса. Вычислить при этом режиме $P_{1max\,max}$, $P_{2max\,max}$ и η, если $E_1 = 20$ В, $\omega = 3 \cdot 10^6$ рад/с.

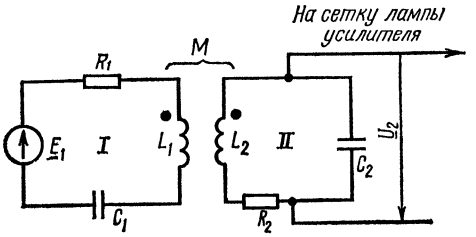


Рис. 4.29

4.33. Параметры двух индуктивно связанных контуров: $R_1 = 12$ Ом, $L_1 = 400$ мкГн, $R_2 = 16$ Ом и $L_2 = 500$ мкГн. Рассчитать C_1 и C_2 и $M_{опт}$, при которых будет ре-

* В данной теме рассматриваются высокодобротные контуры, имеющие важное практическое значение.

жим полного резонанса. Определить $P_{1\max\max}$, $P_{2\max\max}$ и η, если $E_1 = 20$ В, $\omega = 3 \cdot 10^6$ рад/с.

4.34. Антенный контур *I* (рис. 4.29) индуктивно связан с входным контуром *II* усилителя. Оба контура настроены в резонанс на частоту принимаемого сигнала $\omega = 2{,}5 \cdot 10^6$ рад/с. В антенном контуре наводится э. д. с. E_1, равная 100 мкВ. Даны: $R_1 = 10$ Ом, $L_1 = 200$ мкГн, $R_2 = 20$ Ом, $L_2 = 400$ мкГн, коэффициент связи $k = 0{,}03$.

Считая входное сопротивление усилителя бесконечным, определить: емкости C_1 и C_2; добротности Q_1 и Q_2 каждого контура; взаимную индуктивность M, ток во втором контуре I_2 и напряжение на сетке входной лампы при частоте ω_0; частоты связи ω_{I} и ω_{II}, ток I_2 и напряжение на сетке лампы при этих частотах; полосу пропускания индуктивно связанных контуров и сравнить ее с полосой пропускания каждого контура в отдельности.

Р е ш е н и е. По условию имеем

$$\omega_{01} = 1/\sqrt{L_1C_1} = \omega_{02} = 1/\sqrt{L_2C_2} = \omega_0 = 2{,}5 \cdot 10^6 \text{ с}^{-1},$$

отсюда $C_1 = 800$ пФ; $C_2 = 400$ пФ;

$$Q_1 = \sqrt{L_1/C_1}/R_1 = 50; \quad Q_2 = \sqrt{L_2/C_2}/R_2 = 50,$$

т. е. добротности контуров одинаковы.

Взаимная индуктивность

$$M = k\sqrt{L_1L_2} = 0{,}03\sqrt{200 \cdot 10^{-6} \cdot 400 \cdot 10^{-6}} \approx 8{,}5 \text{ мкГн}.$$

При $\omega = \omega_{01} = \omega_{02}$ расстройка $\xi = 0$, тогда из (4.22б) и (4.23б), учитывая, что фактор связи $A = X_{12}/\sqrt{R_1R_2} = \omega M/\sqrt{R_1R_2} = 1{,}5$, найдем

$$I_2 = \frac{E_1A}{\sqrt{R_1R_2}\sqrt{(A^2+1)^2}} = 3{,}27 \text{ мкА}; \quad U_2 = E_1T_C = 3{,}27 \text{ мВ}.$$

Частоты связи находим по формуле (4.25), учитывая, что $\delta = 1/Q = 0{,}02$ (в расчетах использовано приближенное соотношение при $\alpha \ll 1$: $1/\sqrt{1 \pm \alpha} = \mp \alpha/2$):

$$\omega_{\text{I}} = \frac{2{,}5 \cdot 10^6}{\sqrt{1+\sqrt{0{,}03^2 - 0{,}02^2}}} = \frac{2{,}5 \cdot 10^6}{\sqrt{1+2{,}24 \cdot 10^{-2}}} =$$

$$= (2{,}5 \cdot 10^6 - 2{,}8 \cdot 10)^4 \text{ с}^{-1};$$

$$\omega_{\text{II}} = \frac{2{,}5 \cdot 10^6}{\sqrt{1-\sqrt{0{,}03^2 - 0{,}02^2}}} = (2{,}5 \cdot 10^6 + 2{,}8 \cdot 10^4) \text{ с}^{-1};$$

$$\Delta\omega_{\text{II}} = 2{,}8 \cdot 10^4 \text{ с}^{-1}.$$

Обобщенная расстройка ξ контуров при этих частотах

$$\xi_{II} = -\xi = 2Q\Delta\omega_{II}/\omega_0 = 2 \cdot 50 \cdot 2{,}8 \cdot 10^4/(2{,}5 \cdot 10^6) = 1{,}12.$$

По (4.22а) и (4.23б) ток и напряжение при частотах связи

$$I_2 = \frac{EA}{\sqrt{R_1R_2}\sqrt{(A^2 + 1 - \xi_{II})^2 + 4\xi_{II}^2}} = 3{,}54 \text{ мкА};$$

$$U_2 = E_1T_C\omega_{II} = 3{,}54 \text{ мВ}.$$

Относительная полоса пропускания S_r для связи, большей критической ($k > \delta$), вычисляется по формуле (4.28):

$$S_r = 0{,}02\sqrt{\left(\frac{0{,}03}{0{,}02}\right)^2 - 1 + 2 \cdot \frac{0{,}03}{0{,}02}} = 4{,}12 \cdot 10^{-2}.$$

Она значительно превосходит относительную полосу пропускания одиночного контура:

$$S_r' = \delta = 2 \cdot 10^{-2}.$$

4.35. Решить предыдущую задачу, если коэффициент связи уменьшен до критического значения $k_{кр}$.

4.36. Два одинаковых индуктивно связанных контура, параметры которых $L_1 = L_2 = 250$ мкГ, $R_1 = R_2 = 10$ Ом, настроены порознь на одну и ту же частоту $f_0 = 5 \cdot 10^5$ Гц.

Определить: 1) полосу пропускания каждого контура; 2) полосу пропускания индуктивно-связанных контуров при критической связи; 3) максимальную полосу пропускания двух связанных контуров; 4) при каких коэффициентах связи полоса пропускания двух связанных контуров будет: а) в $\sqrt{2}$ меньше, б) в 1,2 раза больше и в) в 2 раза больше по сравнению с полосой пропускания одиночного контура.

Р е ш е н и е. Относительная полоса пропускания одиночного контура определяется затуханием контура [см. формулу (3,17)]:

$$S_r = \delta = \frac{R}{\omega_0 L} = \frac{10}{2\pi \cdot 5 \cdot 10^5 \cdot 250 \cdot 10^{-6}} = 0{,}0127,$$

тогда абсолютная полоса пропускания каждого контура

$$S_a = f_0S_r = 5 \cdot 10^5 \cdot 12{,}7 \cdot 10^{-3} = 6350 \text{ Гц}.$$

Относительная полоса пропускания двух индуктивно связанных контуров при критической связи рассчитывается по формуле (4.27):

$$S_{r\,кр} = \sqrt{2}\,d = 1{,}41 \cdot 0{,}0127 = 0{,}018.$$

При этом абсолютная полоса пропускания

$$S_{a\,кр} = f_0S_{r\,кр} = 5 \cdot 10^5 \cdot 18 \cdot 10^{-3} = 9000 \text{ Гц}.$$

Максимальная полоса пропускания двух индуктивно связанных контуров [см. формулу (4.29)]:

$$S_{r\,max} = 3{,}1\delta \cdot 0{,}0127 = 0{,}0394; \quad S_{a\,max} = f_0S_{r\,max} =$$

$$= 5 \cdot 10^5 \cdot 39{,}4 \cdot 10^{-3} = 19700 \text{ Гц}.$$

Для ответа на вопросы п. 4а и 4б данной задачи, условия которых соответствуют полосе пропускания при связи ниже критической, для которой $S_{r\,кр} = 1{,}41\delta$, нужно воспользоваться формулой (4.26):

а) $$S_r = \delta \sqrt{\left(\frac{k}{\delta}\right)^2 - 1 + \sqrt{2\left[1 + \left(\frac{k}{\delta}\right)^4\right]}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\,\delta,$$

или

$$\left(\frac{k}{\delta}\right)^2 - 1 + \sqrt{2\left[1 + \left(\frac{k}{\delta}\right)^4\right]} = 0{,}5.$$

Решая последнее уравнение относительно k, найдем $k = 3{,}6 \cdot 10^{-3}$;

б) $$S_r = \delta \sqrt{\left(\frac{k}{\delta}\right)^2 - 1 + \sqrt{2\left[1 + \left(\frac{k}{\delta}\right)^4\right]}} = 1{,}2\delta,$$

или

$$\left(\frac{k}{\delta}\right)^2 - 1 + \sqrt{2\left[1 + \left(\frac{k}{\delta}\right)^4\right]} = 1{,}44.$$

Решая это уравнение относительно k, найдем $k = 10{,}6 \cdot 10^{-3}$;

в) для ответа на вопрос п. 4в нужно воспользоваться формулой (4.28):

$$S_r = \delta \sqrt{\left(\frac{k}{\delta}\right)^2 - 1 + 2\frac{k}{2}} = 2\delta,$$

или

$$\left(\frac{k}{\delta}\right)^2 - 1 + 2\,\frac{k}{\delta} = 4.$$

Решая последнее уравнение, найдем $k = 18{,}4 \cdot 10^{-3}$.

4.37. Полосовой фильтр состоит из двух одинаковых контуров, связанных индуктивно (см. рис. 4.5).

Параметры контуров: $L_1 = L_2 = 400$ мкГн, $C_1 = C_2 = 100$ пФ, $R_1 = R_2 = 10$ Ом. Определить наибольшую полосу пропускания фильтра и коэффициент связи, при котором эта полоса обеспечивается. Найти взаимную индуктивность контуров фильтра.

4.38. Система из двух одинаковых индуктивно связанных контуров, настроенных в отдельности на частоту $\omega_0 = 10^6$ с$^{-1}$, имеет абсолютную полосу пропускания $S_a = 5{,}38 \cdot 10^3$ Гц и взаимную индуктивность $M = 340$ мкГн (см. рис. 4.5). Определить, какова связь между контурами (слабая, сильная или критическая) при $\delta = 0{,}024$ и $\delta = 0{,}03$. Найти коэффициент связи, индуктивность и активное сопротивление контуров для этих двух значений δ.

Р е ш е н и е. Относительная полоса пропускания

$$S_r = S_a/f_0 = S_a 2\pi/\omega_0 = 5{,}38 \cdot 10^3 \cdot 2\pi/10^6 = 33{,}8 \cdot 10^3.$$

Для того чтобы определить, какова связь между контурами, сравним S_r и δ:

$$S_r/\delta = 0{,}0338/0{,}024 = 1{,}41\ , \text{ или } S_r = 1{,}41\delta,$$

что согласно формуле (4.27)соответствует критической связи. При этом $k = \delta = 0{,}024$.

Вычислим индуктивности контуров при $L_1 = L_2 = L$.

Из выражения $k = M/\sqrt{L_1 L_2} = M/L$ находим

$$L = M/k = 340 \cdot 10^{-6}/0{,}024 = 14{,}2 \cdot 10^{-3}\ \text{Гн} = 14{,}2\ \text{мГн}.$$

Активные сопротивления контуров

$$R = \delta\omega_0 L = 0{,}024 \cdot 10^6 \cdot 14{,}2 \cdot 10^{-3} = 340\ \text{Ом}.$$

Для случая $\delta = 0{,}03$ соотношение

$$S_r/\delta = 0{,}0388/0{,}03 = 1{,}128,$$

т. е. $S_r = 1{,}128\ \delta$, что соответствует слабой связи.

Для определения k воспользуемся формулой (4.26), откуда $k/\delta = 0{,}78$:

$$k = 0{,}78\delta = 0{,}78 \cdot 0{,}03 = 23{,}4 \cdot 10^{-3}.$$

Рассчитаем индуктивности контуров. Из выражения $k = M/L$ находим

$$L = M/k = 340 \cdot 10^{-6}/(23{,}4 \cdot 10^{-3}) = 14{,}5\ \text{мГн}.$$

Активные сопротивления контуров

$$R = \delta\omega_0 L = 0{,}03 \cdot 10^6 \cdot 14{,}5 \cdot 10^{-3} = 435\ \text{Ом}.$$

4.39. Параметры двух одинаковых индуктивно связанных контуров: $L_1 = L_2 = L = 0{,}8$ мГн, $C_1 = C_2 = C = 750$ пФ, $R_1 = R_2 = R = 30$ Ом, $M = 50$ мкГн. Э. д. с. $E = 120$ В. Построить резонансную кривую тока во втором контуре при изменении угловой частоты от $0{,}9\ \omega_0$ до $1{,}1\omega_0$, где ω_0 — резонансная частота каждого из контуров. Определить частоты связи и полосу пропускания.

Р е ш е н и е. Определим, какова связь между контурами. Для этого вычислим ω_0, δ и k и последние величины сравним между собой:

$$\omega_0 = 1/\sqrt{LC} = 1{,}29 \cdot 10^6\ \text{с}^{-1} \quad k = M/L = 6{,}25 \cdot 10^{-2};$$

$$\delta = R/\omega_0 L = 2{,}9 \cdot 10^{-2}.$$

Отсюда видно, что $k > \delta$, следовательно, связь сильная и кривая имеет два горба.

В дальнейших расчетах необходимо знать величину добротности Q. Вычислим ее:

$$Q = \sqrt{L/C}/R = \sqrt{\frac{0{,}8 \cdot 10^{-3}}{750 \cdot 10^{-12}}}\Big/30 = 34{,}4.$$

Для построения кривой задаемся различными значениями ω, находим соответствующие им величины A и ξ, входящие в формулу (4.22а). Результаты расчетов для удобства сведены в табл. 4.1, в которой $\xi = 2Q\frac{\Delta\omega}{\omega_0}$. При выборе точек кривой в табл. 4.1 включены ре-

Таблица 4.1

ω	$\omega \cdot 10^{-6}$, $с^{-1}$	ξ	A	$A^2+1-\xi^2$	$\sqrt{(A^2+1-\xi^2)^2+\cdots+4\xi^2}$	I_2, А	$I_2/I_{2\max\max}$
$0{,}9\,\omega_0$	1,161	−6,9	1,94	−43	45	0,172	0,086
$0{,}92\omega_0$	1,187	−5,5	1,98	−25,3	27,6	0,287	0,143
$0{,}94\omega_0$	1,212	−4,13	2,02	−12	14,6	0,552	0,276
$0{,}96\omega_0$	1,238	−2,75	2,06	−2,3	5,95	1,382	0,691
ω_I	1,255	−1,87	2,09	1,86	4,18	2,0	1,0
$0{,}98\omega_0$	1,264	−1,37	2,11	3,58	4,5	1,87	0,935
ω_0	1,29	0	2,15	5,62	5,62	1,54	0,77
$1{,}02\omega_0$	1,316	1,37	2,19	3,92	4,77	1,84	0,92
ω_{II}	1,327	1,97	2,22	2,04	4,44	2,0	1,0
$1{,}04\omega_0$	1,342	2,75	2,24	−1,55	5,7	1,572	0,786
$1{,}06\omega_0$	1,367	4,13	2,28	−10,9	13,7	0,667	0,333
$1{,}08\omega_0$	1,393	5,5	2,32	−23,82	26,3	0,352	0,176
$1{,}1\,\omega_0$	1,419	6,9	2,37	−41	43,2	0,22	0,11

зонансная частота ω_0 и частоты связи ω_I и ω_{II}, которые определяются по формуле (4.25):

$$\omega_I = \frac{\omega_0}{\sqrt{1+\sqrt{k^2-k_{кр}^2}}} = \frac{1{,}29\cdot 10^6}{\sqrt{1+0{,}0556}} = 1{,}255\cdot 10^6\ с^{-1};$$

$$\omega_{II} = \frac{\omega_0}{\sqrt{1-\sqrt{k^2-k_{кр}^2}}} = \frac{1{,}29\cdot 10^6}{\sqrt{1-0{,}0556}} = 1{,}327\cdot 10^6\ с^{-1}.$$

Значение тока при частотах связи определяем по формуле (4.16):

$$I_{2\,\max\max} = \frac{E}{2\sqrt{R_1R_2}} = \frac{E}{2R} = \frac{120}{2\cdot 30} = 2\ А.$$

По результатам табл. 4.1 строим кривую рис. 4.30.

Для определения полосы пропускания проводим на графике прямую $I_2/I_{2\max\max} = 1/\sqrt{2} \approx 0{,}707$, которая определит границы полосы про-

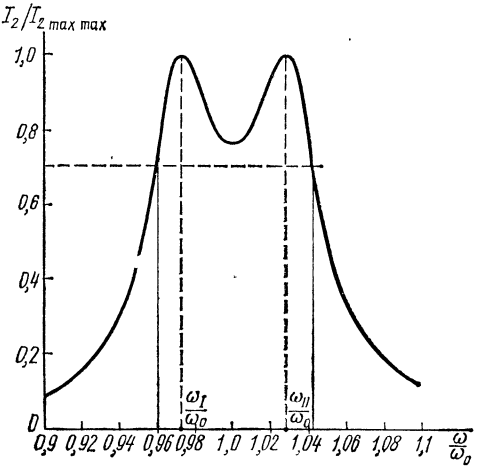


Рис. 4.30

пускания. Из рис. 4.30 находим граничные частоты

$$\omega_1 = 1{,}238 \cdot 10^6 \text{ с}^{-1} \text{ и } \omega_2 = 1{,}344 \cdot 10^6 \text{ с}^{-1},$$

а абсолютная полоса пропускания

$$S_a = \omega_2 - \omega_1 = 0{,}106 \cdot 10^6 \text{ с}^{-1}.$$

Та же полоса может быть вычислена и аналитически по формуле (4.28):

$$S_a = \omega_0 S_r = \omega_0 \delta \sqrt{\left(\frac{k}{\delta}\right)^2 - 1 + 2\left(\frac{k}{\delta}\right)^2} = 0{,}106 \cdot 10^6 \text{ с}^{-1}.$$

4.40. Два индуктивно связанных контура имеют параметры:

$$L_1 = 400 \text{ мкГн}, \quad C_1 = 500 \text{ пФ}, \quad R_1 = 20 \text{ Ом}, \quad L_2 = 360 \text{ мкГн},$$

$$C_2 = 580 \text{ пФ}, \quad R_2 = 15 \text{ Ом}, \quad M = 40 \text{ мкГн}.$$

Амплитуда э. д. с. источника $E_{1m} = 100$ В, его угловая частота $\omega = 2 \cdot 10^6$ с$^{-1}$. Определить мощности P_1 и P_2, расходуемые в первом и втором контурах, найти к. п. д. при заданной связи.

Определить оптимальную связь, токи в первом и втором контурах, а также значение максимально возможной мощности и к. п. д. во втором контуре при полном резонансе.

Р е ш е н и е. Реактивные сопротивления каждого контура:

$$X_1 = \omega L_1 - 1/\omega C_1 = -200 \text{ Ом}; \quad X_2 = \omega L_2 - 1/\omega C_2 = -140 \text{ Ом}.$$

Эквивалентные активное и реактивное сопротивления соответственно равны:

$$R_{1\text{эк}} = R_1 + R_{\text{вн}} = R_1 + \frac{(\omega M)^2}{Z_2^2} R_2 = 20 + \frac{(2 \cdot 10^6 \cdot 40 \cdot 10^{-6})^2 \cdot 15}{15^2 + 140^2} =$$

$$= 24{,}8 \text{ Ом};$$

$$X_{1\text{эк}} = X_1 + X_{\text{вн1}} = X_1 - \frac{(\omega M)^2}{Z_2^2} X_2 = -200 +$$

$$+ \frac{(2 \cdot 10^6 \cdot 40 \cdot 10^{-6})^2 \cdot 140}{15^2 + 140^2} = -155 \text{ Ом}.$$

Мощность, расходуемая в первом контуре,

$$P_1 = \frac{1}{2} I_{1m}^2 R_1 = \frac{1}{2}\left(\frac{E_{1m}}{Z_{1\text{эк}}}\right)^2 R_1 = \frac{1}{2} 0{,}636^2 \cdot 20 = 4{,}05 \text{ Вт},$$

где

$$Z_{1\text{эк}} = | R_{1\text{эк}} + jX_{1\text{эк}} | = | 24{,}8 - j155 | = 157 \text{ Ом},$$

$$I_{1m} = E_{1m}/Z_{1\text{эк}} = 0{,}636 \text{ А}.$$

Мощность, расходуемая во втором контуре,

$$P_2 = \frac{1}{2} I_{2m}^2 R_2 = \frac{1}{2} I_{1m}^2 R_{вн1} = \frac{1}{2} 0{,}636^2 \cdot 4{,}8 = 0{,}973 \text{ Вт},$$

где

$$R_{вн1} = (\omega M)^2 / Z_2^2 = 4{,}8 \text{ Ом}.$$

К. п. д.

$$\eta = P_2/(P_1 + P_2) = 0{,}194 = 19{,}4\%.$$

Оптимальную связь определим по формуле (4.19):

$$M_{опт} = \frac{X_{12\,опт}}{\omega} = \frac{\sqrt{R_1 R_2}}{\omega} = \frac{\sqrt{20 \cdot 15}}{2 \cdot 10^6} = 8{,}65 \cdot 10^{-6} = 8{,}65 \text{ мкГн}.$$

При оптимальной связи $X_{1эк} = 0$, тогда

$$Z_{1эк} = R_{1эк} = R_1 + R_{вн1} = R_1 + \frac{\omega^2 M_{опт}^2}{R_2} = 2R_1 = 40 \text{ Ом}.$$

Токи в контурах:

$$I_{1m\,max\,max} = E_{1m}/2R_1 = 2{,}5 \text{ А};$$

$$I_{2m\,max\,max} = \frac{I_{1m\,max\,max}\,\omega M_{опт}}{R_2} = \frac{I_{1m\,max\,max}\sqrt{R_1 R_2}}{R_2} = 2{,}16 \text{ А}.$$

Значение максимально возможной мощности определяется из формулы (4.34):

$$P_{2\,max\,max} = P_{1\,max\,max} = E_{1m}^2/8R_1 = 62{,}5 \text{ Вт}, \quad \eta = 0{,}5 = 50\%.$$

4.41. Пользуясь данными задачи 4.40, определить P_2 и к. п. д., если взаимная индуктивность $M = 10$ мкГн, при условии, что оба контура в отдельности настроены в резонанс с частотой источника.

4.42. В схеме цепи рис. 4.5 известны параметры $L_1 = 350$ мкГн, $C_1 = 250$ пФ, $R_1 = 10$ Ом, $L_2 = 365$ мкГн, $R_2 = 8$ Ом. Амплитуда э. д. с. источника равна 200 В. Оба контура в отдельности настроены в резонанс на одну и ту же частоту f_0.

При каком значении коэффициента связи к. п. д. схемы равен 75%? Чему при этом равна мощность второго контура P_2? На сколько эта мощность меньше максимальной?

Указание. Найти резонансную частоту, затем затухания контуров и из (4.33) коэффициент связи и взаимную индуктивность, далее эквивалентное сопротивление $Z_{1эк} = R_{1эк} = R_1 + (\omega M)^2/R_2$, затем, найдя $I_{1m} = E_m/R_{1эк}$, вычисляем P_1, а из (4.31) P_2 и, наконец, $P_{2max\,max} = E_{1m}^2/8R_1$.

В. Трансформатор со стальным сердечником

4.43. При номинальном первичном напряжении потери в стали трансформатора составляют $P_{ст} = 1$ кВт. Определить потери в стали трансформатора при повышении и понижении напряжения на 10%. Частота и форма кривой э. д. с. остаются неизменными.

4.44. Первичная обмотка трансформатора со стальным сердечником в режиме холостого хода включена на напряжение $U_1 = 100$ В и по ней проходит ток $I_1 = 5$ А, отстающий по фазе от напряжения на угол φ_1, причем $\cos\varphi_1 = 0{,}7$. Эта же катушка при том же напряжении, но без стального сердечника потребляет ток $I_2 = 10$ А, отстающий от напряжения на угол φ_2, причем $\cos\varphi_2 = 0{,}9$. Определить потери в стали и меди и построить векторную диаграмму при наличии стального сердечника. С помощью векторной диаграммы определить R_0 и X_0 в схеме замещения катушки со стальным сердечником.

Р е ш е н и е. При отсутствии сердечника катушка имеет только потери в меди:

$$I_2^2 R = U_1 I_2 \cos\varphi_2.$$

Отсюда активное сопротивление обмотки катушки

$$R = U_1 \cos\varphi_2 / I_2 = 0{,}9 \text{ Ом}.$$

При наличии стального сердечника в катушке расходуется мощность

$$P_1 = U_1 I_1 \cos\varphi_1 = 350 \text{ Вт}.$$

Часть этой мощности

$$P_м = I_1^2 R = 225 \text{ Вт}$$

идет на покрытие потерь в меди, а другая часть — на потери в стали:

$$P_{ст} = P_1 - P_м = 125 \text{ Вт}.$$

Эквивалентная последовательная схема катушки со сталью, не имеющей рассеяния, дана на рис. 4.31, *а*.

На рис. 4.31, *б* начерчена векторная диаграмма трансформатора со стальным сердечником в режиме холостого хода. Из нее следует, что активная составляющая приложенного напряжения

$$U_1 \cos\varphi_1 = I_1 (R + R_0),$$

откуда

$$R_0 = U_1 \cos\varphi_1 / I_1 - R = 100 \cdot 0{,}7/5 - 9 = 13{,}1 \text{ Ом}.$$

Из диаграммы видно, что

$$U_1 \sin\varphi_1 = I_1 X_0$$

и, следовательно,

$$X_0 = U_1 \sin\varphi_1 / I_1 = 100 \cdot 0{,}715/5 = 14{,}3 \text{ Ом}.$$

Величина э. д. с., наводимой в катушке,

$$E = I \sqrt{R_0^2 + X_0^2} = 75{,}6 \text{ В}.$$

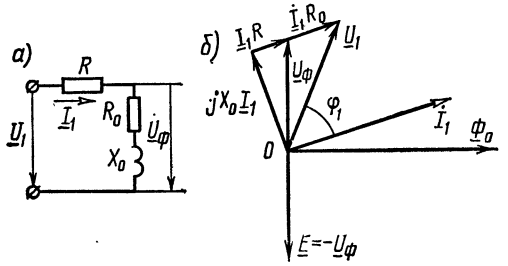


Рис. 4.31

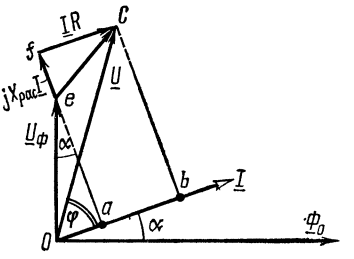


Рис. 4.32

4.45. В режиме холостого хода трансформатора со стальным сердечником расходуется мощность $P = 0{,}2$ кВт при напряжении $U =$ $= 100$ В и токе $I = 10$ А. Активное сопротивление его первичной обмотки $R_1 = 0{,}5$ Ом и реактивное сопротивление рассеяния $X_{1рас} =$ $= 1$ Ом. Частота тока $f = 50$ Гц.

Определить из схемы замещения сопротивления R_0 и X_0 (см. рис. 4.6, *в*) и составляющую приложенного напряжения U_ϕ, уравновешивающую э. д. с., которая индуктируется в обмотке катушки основным магнитным потоком, пронизывающим сердечник. При построении диаграммы предполагать, что ток изменяется по гармоническому закону.

Р е ш е н и е. Построение векторной диаграммы показано на рис. 4 32.

Из соотношения $P = UI\cos\varphi$ найдем, что $\cos\varphi = 0{,}2$.

Отрезок $Ob = I(R + R_0) = U\cos\varphi$, отсюда

$$R_0 = U\cos\varphi/I - R = 1{,}5 \text{ Ом}.$$

Отрезок $bc = U\sin\varphi = 97{,}9$ или $bc = ae + ef = IX_0 + IX_{1рас}$, отсюда $X_0 = 8{,}79$ Ом.

Теперь найдем

$$U_\phi = \sqrt{(Oa)^2 + (ae)^2} = I\sqrt{R_0^2 + X_0^2} = 88{,}5 \text{ В}.$$

Реактивный ток

$$I_р = I\cos\alpha = 10 \cdot 87{,}9/88{,}5 = 9{,}94 \text{ А}.$$

4.46. Однофазный трансформатор $U_1/U_2 = 6600/220$ В с номинальной мощностью $P = 50$ кВ · А имеет потери холостого хода $P_х =$ $= 380$ Вт и к. п. д. при полной нагрузке $\eta = 96{,}15\%$ с $\cos\varphi = 0{,}8$. Определить активное сопротивление первичной и вторичной обмоток, считая, что первичные и вторичные потери в меди одинаковы.

Р е ш е н и е. Известно, что ток холостого хода имеет незначительную величину по сравнению с номинальным током. Поэтому при холостом ходе можно пренебречь потерями в обмотке (потерями в меди) и считать, что потери холостого хода приблизительно равны потерям в стали: $P_х \approx P_{ст} \approx 380$ Вт.

Общие потери мощности при нагрузке трансформатора

$$P_м + P_{ст} = (1 - \eta P \cos \varphi_2)/100 = 1540 \text{ Вт}.$$

Отсюда

$$P_м = 1540 - 380 = 1160 \text{ Вт}, \quad P_1 = P_2 = 1160/2 = 580 \text{ Вт}.$$

Номинальный ток в первичной цепи при нагрузке:

$$I_1 = P/U_1 = 7{,}6 \text{ А};$$

активное сопротивление первичной обмотки:

$$R_1 = P_1/I_1^2 = 10{,}1 \text{ Ом}.$$

Так как по условию активное сопротивление первичной обмотки равно приведенному сопротивлению вторичной

$$R_1 = R_2' = R_2 n^2,$$

где

$$n = w_1/w_2 = 6600/220 = 30,$$

то

$$R_2 = 10{,}1/30^2 = 0{,}011 \text{ Ом}.$$

4.47. Опыты холостого хода и короткого замыкания однофазного трансформатора дали следующие результаты:

$$U_{1х} = 400 \text{ В}, \quad I_{1х} = 0{,}4 \text{ А}; \quad P_{1х} = 20 \text{ Вт}; \quad U_{1к} = 32 \text{ В}; \quad I_{1к} = 5 \text{ А};$$

$$P_{1к} = 80 \text{ Вт}.$$

Данный трансформатор — повышающий и его коэффициент трансформации $n = w_1/w_2 = 1/15$.

Предполагая, что активное и реактивное сопротивления рассеяния первичной обмотки равны соответственным приведенным сопротивлениям вторичной обмотки ($R_1 = R_2'$, $X_{1рас} = X_{2рас}' = X_2$), определить их величины.

При холостом ходе можно пренебречь падением напряжения в первичной обмотке, а при коротком замыкании — намагничивающей составляющей первичного тока.

Р е ш е н и е. На рис. 4.6, *в* изображена эквивалентная схема трансформатора.

Из опыта холостого хода, пренебрегая падением напряжения в первичной обмотке, имеем

$$Z_х = U_{1х}/I_{1х} = 1000 \text{ Ом};$$

$$\cos \varphi_х = P_{1х}/U_{1х}I_{1х} = 0{,}125 \text{ Ом};$$

$$X_х = Z_х \sin \varphi_х = 992 \text{ Ом};$$

$$R_х = Z_х \cos \varphi_х = 125 \text{ Ом}.$$

Если пренебречь составляющей тока I_0, эквивалентная схема транс-

форматора при коротком замыкании примет вид, изображенный на рис. 4.33, и тогда

$$Z_к = U_{1к}/I_{1к} = 6{,}4 \text{ Ом}; \quad \cos\varphi_{1к} = P_{1к}/U_{1к}I_{1к} = 0{,}5,$$

$$R_1 + R_2' = Z_к \cos\varphi_{1к} = 3{,}2 \text{ Ом};$$

$$X_{1\,рас} + X_{2\,рас}' = Z_к \sin\varphi_{1к} = 5{,}54 \text{ Ом}.$$

Так как

$$R_1 = R_2', \quad X_{1\,рас} = X_{2\,рас}',$$

то

$$R_1 = 1{,}6 \text{ Ом}; \quad R_2 = R_2'/n^2 = 360 \text{ Ом};$$

$$X_{1\,рас} = 2{,}77 \text{ Ом}; \quad X_{2\,рас} = X_{2\,рас}'/n^2 = 623 \text{ Ом}.$$

4.48. Ко вторичным зажимам трансформатора предыдущей задачи подключен приемник энергии, имеющий $\cos\varphi_2 = 0{,}92$ ($\varphi_2 > 0$), при этом напряжение на вторичных зажимах $U_2 = 6000$ В, ток во вторичной цепи $I_2 = 0{,}25$ А. Найти напряжение U_1 на первичных зажимах, ток I_1 в первичной обмотке, к. п. д. η и коэффициент мощности $\cos\varphi_1$. Найти потери в стали и меди при нагрузке трансформатора.

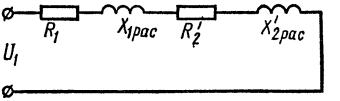


Рис. 4.33

Р е ш е н и е. Задачу проще всего решить, если применить символический метод к эквивалентной схеме трансформатора (см. рис. 4.6,*в*).

Приведенные величины вторичного напряжения, тока и сопротивлений:

$$U_2' = U_2 n = 400 \text{ В}; \quad I_2' = I_2/n^2 = 3{,}75 \text{ А};$$

$$Z_{2н}' = U_2'/I_2' = 106{,}6 \text{ Ом}; \quad R_{2н}' = Z_{2н}' \cos\varphi_2 = 98 \text{ Ом};$$

$$X_{2н}' = Z_{2н}' \sin\varphi_2 = 41{,}6 \text{ Ом}.$$

На параллельных ветвях напряжение

$$\underline{U}_ф = \underline{I}_2'[(R_{2н}' + R_2') + j(X_{2н}' + X_{2\,рас}')] = (374 + j167) \text{ В},$$

где $\underline{I}_2'$ направлено по вещественной оси, и, следовательно,

$$\underline{I}_2' = I_2' = 3{,}75 \text{ А}.$$

В режиме холостого хода сопротивление поперечной ветви

$$\underline{Z}_0 = R_х + jX_х = (125 + j\,992) \text{ Ом}.$$

Ток холостого хода

$$\underline{I}_0 = \frac{\underline{U}_\Phi}{Z_0} = \frac{374 + j\,167}{125 + j\,992} = 0{,}41e^{-j58°50'} = (0{,}21 - j\,0{,}35)\ \text{А};$$

$$\underline{I}_1 = \underline{I}'_2 + \underline{I}_0 = 3{,}96 - j\,0{,}35 = 3{,}96e^{-j5°5'}\ \text{А}.$$

Приложенное напряжение

$$\underline{U}_1 = \underline{I}_1 \underline{Z}_1 + \underline{U}_\Phi = 383{,}5 + j\,175 = 420e^{-j24°15'}\ \text{В}.$$

Сдвиг фаз между напряжением на входе трансформатора и первичным током

$$\varphi_1 = 24°15' - (-5°5') = 29°20'.$$

Мощность, подводимая к трансформатору,

$$P_1 = U_1 I_1 \cos\varphi_1 = 1450\ \text{Вт}.$$

Мощность, расходуемая в приемнике энергии,

$$P_2 = U_2 I_2 \cos\varphi_2 = 1380\ \text{Вт}.$$

К. п. д. трансформатора

$$\eta = P_2/P_1 = 0{,}95.$$

Потери в стали при нагрузке трансформатора

$$P_{ст} = I_0^2 R_0 = 21\ \text{Вт}.$$

Потери меди при нагрузке трансформатора

$$P_м = P_1 - P_2 - P_{ст} = 49\ \text{Вт}.$$

4.49. К трансформатору, рассмотренному в задаче 4.48, приложено напряжение $U_1 = 420$ В. Найти величину напряжения U_2 на вторичных зажимах при холостом ходе, пренебрегая при этом падением напряжения в первичной обмотке. Показать возможность такого пренебрежения.

Р е ш е н и е. При холостом ходе можно положить $U_1 \approx U_\Phi = 420$ В. Тогда

$$U_2 = U_1/n = 6300\ \text{В}.$$

Пренебречь падением напряжения в первичной обмотке можно, так как $\frac{I_0 Z_1}{U_1} = \frac{0{,}41 \cdot 3{,}2}{420} = 0{,}003$, т. е. падение напряжения в первичной обмотке составляет всего 0,3% от приложенного напряжения.

ГЛАВА ПЯТАЯ

ЦЕПИ ПРИ ПЕРИОДИЧЕСКИХ НЕСИНУСОИДАЛЬНЫХ ВОЗДЕЙСТВИЯХ

ОСНОВНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ И СООТНОШЕНИЯ

1. Разложение периодических кривых в ряд Фурье. Всякая периодическая функция $f(t)$ с периодом T, удовлетворяющая условиям Дирихле (т. е. ограниченная функция, имеющая за период конечное число разрывов первого рода и конечное число максимумов и минимумов), может быть разложена в тригонометрический ряд.

Разложение периодической функции в тригонометрический ряд может быть записано в двух формах:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega_1 t + b_n \sin n\omega_1 t); \tag{5.1}$$

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin (n\omega_1 t + \psi_n). \tag{5.2}$$

Коэффициенты ряда (5.1) равны:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{a_0}{2} = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\,dt; \quad a_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos n\omega_1 t\,dt; \\ &b_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin n\omega_1 t\,dt. \end{aligned}\right\} \tag{5.3}$$

Переход от первой формы ряда (5.1) ко второй форме ряда (5.2) осуществляется с помощью формул

$$c_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}; \quad \operatorname{tg}\psi_n = a_n/b_n, \tag{5.4}$$

а обратный переход

$$b_n = c_n \cos\psi_n, \quad a_n = c_n \sin\psi_n. \tag{5.5}$$

Обращаем внимание на то, что при определении угла ψ_n по формулам (5.4) по знакам коэффициентов a_n и b_n надо установить, в какой четверти этот угол находится. Так, если b_n положительно, а a_n отрицательно, то угол ψ_n лежит в четвертой четверти; если $b_n < 0$ и $a_n < 0$, то ψ_n — в третьей четверти, если $b_n < 0$, а $a_n > 0$, то ψ_n — во второй четверти. Проверкой этого служат формулы (5.5).

При использовании первой формы разложения в тригонометрический ряд [см. формулу (5.1)] коэффициенты a_n и b_n зависят от выбора начала отсчета, а при использовании второй формы разложения [см. формулу (5.2)] амплитуды гармоник c_n не зависят от выбора начала отсчета и определяются только видом кривой; аргументы ψ_n зависят от начала отсчета. При сдвиге начала отсчета вдоль оси времени t на t_c амплитуды c_n сохраняются, а фазы ψ_n получают приращение $\pm\ \omega_n t_c$.

Ряду (5.1) можно придать более компактный вид, если условно ввести отрицательные частоты и перейти к суммированию по n от $-\infty$ до $+\infty$ (в этом случае каждая гармоника, кроме нулевой, входит под знак суммы дважды):

$$f(t) = \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (a_n \cos n\omega_1 t + b_n \sin n\omega_1 t). \qquad (5.6)$$

Тригонометрическая форма ряда Фурье может быть преобразована в комплексную:

$$f(t) = \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \underline{F}_n e^{jn\omega_1 t}, \qquad (5.7)$$

где комплексный коэффициент

$$\underline{F}_n = a_n - jb_n = F_n e^{-j\xi_n} = F_n e^{-j\left(\frac{\pi}{2} - \psi_n\right)}.$$

Для наглядности часто составляющие несинусоидальной периодической функции изображаются в виде линейчатого (дискретного прерывного) спектра. Он представляет собой график, на оси абсцисс которого отложены значения частоты (или порядковые номера гармоник) и из этих точек восставлены перпендикуляры, длины которых соответствуют значениям модулей комплексных амплитуд F_n (или $\frac{1}{2} F_n$, если откладывать отрезки как для положительных, так и для отрицательных частот).

2. **Случаи симметрии периодических кривых**. Если периодическая кривая обладает тем или иным видом симметрии, то при ее разложении в ряд Фурье отсутствуют некоторые составляющие. В табл. 5.1 дается соответствующая сводка.

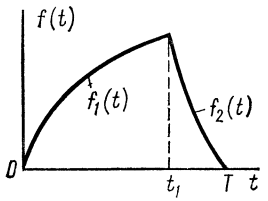
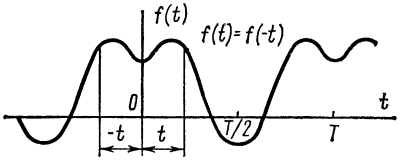
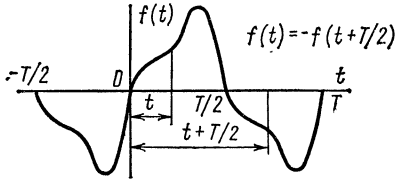
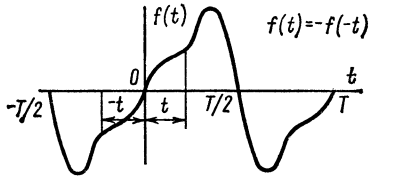
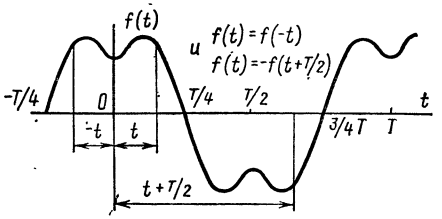
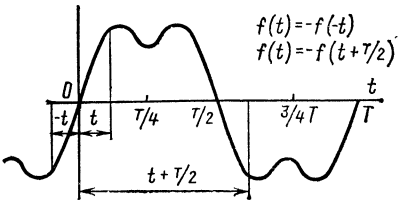


Рис. 5.1

3. **Разложение в ряд Фурье при различных аналитических выражениях частей периодической кривой**. В тех случаях, когда периодическая кривая в пределах периода имеет не одно аналитическое выражение, а разным частям периода соответствуют различные аналитические выражения, например (рис. 5.1) при расчете коэффициентов ряда, интегрирование производится по отдельным час-

Таблица 5.1

№ п.п.	Кривая симметрична относительно	Математическое условие симметрии	Особенности разложения
1.	Оси ординат (четная функция) 	$f(t) = f(-t)$	Отсутствуют синусоидальные ($b_n = 0$) составляющие
2.	Начала координат (нечетная функция) 	$f(t) = -f(-t)$	Отсутствуют постоянная составляющая и косинусоидальные составляющие ($a_0 = a_n = 0$)
3.	Оси абсцисс при совмещении двух полупериодов 	$f(t) = -f(t + T/2)$	Отсутствуют постоянная составляющая и четные синусоидальные и косинусоидальные составляющие ($a_0 = a_{2n} = b_{2n} = c_{2n} = 0$)
4.	Оси ординат и оси абцисс при совмещении полупериодов 	$f(t) = f(-t) = -f(t + T/2)$	Отсутствуют постоянная составляющая и синусоидальные составляющие, а также четные косинусоидальные составляющие ($a_0 = b_n = a_{2n} = c_{2n} = 0$)
5.	Начала координат и оси абсцисс при совмещении двух полупериодов 	$f(t) = -f(-t) = -f(t + T/2)$	Отсутствуют постоянная составляющая и все косинусоидальные составляющие, а также четные синусоидальные составляющие ($a_0 = a_n = b_{2n} = c_{2n} = 0$)

тям периода, соответствующим различным аналитическим выражениям (пример приведен в задаче 5.2).

4. Действующее значение периодической величины $f(t)$

$$F = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T [f(t)]^2\,dt}. \qquad (5.8)$$

Действующие значения периодических величин, например э. д. с. (или напряжений, токов), не зависят от начальных фаз гармоник и определяются по действующим значениям их гармонических составляющих:

$$E = \sqrt{E_0^2 + E_1^2 + E_2^2 + \cdots} = \sqrt{E_0^2 + \frac{E_{1m}^2}{2} + \frac{E_{2m}^2}{2} + \cdots}, \qquad (5.9)$$

5. Расчет токов в сложных цепях. Если периодическое несинусоидальное напряжение подключено к какой угодно разветвленной или неразветвленной линейной цепи, то расчет токов производится для каждой из гармоник в отдельности по методам расчета цепей переменного тока. При этом индуктивные и емкостные сопротивления для n-й гармоники равны соответственно $n\omega_1 L$ и $\frac{1}{n\omega_1 C}$. Расчет постоянной составляющей тока производится по методам расчета цепей постоянного тока. После этого можно подсчитать действующие значения токов, проходящих в отдельных ветвях, и действующие значения напряжения на отдельных участках цепи по формуле (5.9).

В простейшем случае неразветвленной RLC-цепи с сопротивлением для n-й гармоники $\underline{Z}_n = Z_n e^{j\varphi_n} = R + j(n\omega_1 L - \frac{1}{n\omega_1 C})$, к которой подключено периодическое напряжение

$$u = U_0 + \sum_{n=1}^{\infty} U_{nm} \sin(n\omega_1 t + \psi_n),$$

в цепи устанавливается периодический ток

$$i = I_0 + \sum_{n=1}^{\infty} I_{nm} \sin(n\omega_1 t + \psi_n - \varphi_n).$$

В цепи будет постоянная составляющая тока I_0, если нет конденсатора.

Комплексные амплитуды гармоник тока и напряжения связаны соотношением

$$\underline{I}_{nm} = I_{nm} e^{j(\psi_n - \varphi_n)} = \underline{U}_{nm}/\underline{Z}_n. \qquad (5.10)$$

Примеры приведены в задачах 5.7 и 5.10.

6. Активная P, реактивная Q и полная S мощности

$$P = \sum_{n=0}^{\infty} U_n I_n \cos \varphi_n; \tag{5.11 а}$$

$$Q = \sum_{n=0}^{\infty} U_n I_n \sin \varphi_n; \tag{5.11 б}$$

$$S = UI = \sqrt{\sum_{n=0}^{\infty} U_n^2 \sum_{n=0}^{\infty} I_n^2}. \tag{5.11 в}$$

7. Характеристики формы периодических несинусоидальных кривых. Коэффициент формы кривой $f(t)$ есть отношение действующего значения F к среднему по модулю значению за период $|F_{ср}|$:

$$k_ф = \frac{F}{|F_{ср}|} = \frac{\sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T [f(t)]^2\, dt}}{\frac{1}{T}\int_0^T |f(t)|\, dt}. \tag{5.12}$$

Коэффициент амплитуды — отношение максимального значения F_{max} к действующему значению функции $f(t)$:

$$k_а = \frac{F_{max}}{F} = \frac{F_{max}}{\sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T [f(t)]^2\, dt}}. \tag{5.13}$$

Коэффициент искажения — отношение действующего значения основной гармоники к действующему значению всей функции:

$$k_и = \frac{F_1}{F} = \frac{F_1}{\sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T [f(t)]^2\, dt}}. \tag{5.14}$$

Коэффициент гармоник — отношение действующего значения высших гармоник к действующему значению основной гармоники:

$$k_г = \frac{\sqrt{\sum_{n=2}^{\infty} F_n^2}}{F_1}. \tag{5.15}$$

Пример приведен в задаче 5.20.

А. Аналитический метод разложения периодических кривых в ряд Фурье

5.1. Разложить в тригонометрический ряд периодическую функцию напряжения, выражаемую кривой, симметричной относительно точки перехода через нуль (рис. 5.2, *а*, *б* и *в*). Расчеты проделать для: 1) $t_1 = T/4$, 2) $t_1 = 0$, 3) $t_1 = T/2$. Для каждого случая на основе разложения в ряд построить линейный спектр частот.

Указание. Из табл. 5.1 использовать № 2 и 5.

5.2. Разложить в тригонометрический ряд функцию, выражаемую кривой периодических импульсов напряжения постоянной амплитуды U_m длительностью $t_и$ (рис. 5.3, *а*). Даны: $U_m = 10$ В, $t_и = 0{,}2$ мс, $T = 1$ мс.

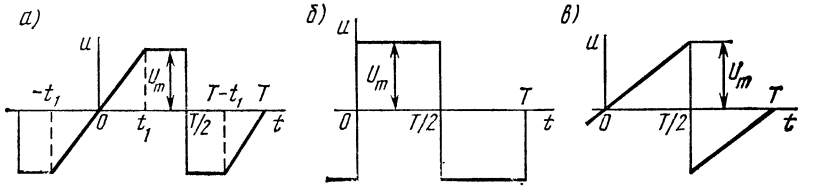


Рис. 5.2

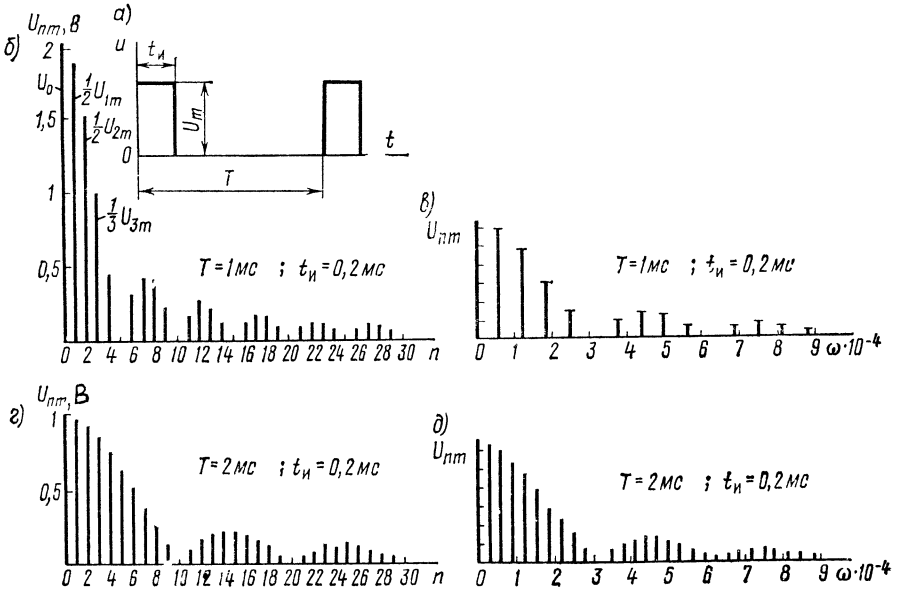


Рис. 5.3

Полученную функцию представить также в виде комплексного ряда Фурье. Построить линейчатый спектр частот в зависимости от: а) номера гармоники n и б) угловой частоты ω. Такие же спектры построить, если $T = 2$ мс, остальные данные те же.

Р е ш е н и е. Уравнение заданной кривой: в интервале от $t = 0$ до $t_и$ $f_1(t) = U_m$; в интервале от $t = t_и$ до $t = T$ $f_2(t) = 0$.

Разбивая область интегрирования на два участка [см. п. 3 основных положений, с помощью формул (5.3), учитывая, что $f_1(t) = U_m$, $f_2(t) = 0$], находим коэффициенты ряда и начальные фазы гармоник:

$$\frac{a_0}{2} = \frac{1}{T}\left[\int_0^{t_и} f_1(t)\,dt + \int_{t_и}^{T} f_2(t)\,dt\right] = \frac{1}{T}\int_0^{t_и} U_m dt = U_m\frac{t_и}{T},$$

$$\frac{a_0}{2} = 10\,\frac{0{,}2}{1} = 2; \qquad (1)$$

$$a_n = \frac{2}{T}\left[\int_0^{t_и} f_1(t)\cos n\omega_1 dt + \int_{t_и}^{T} f_2(t)\cos n\omega_1 t\,dt\right] =$$

$$= \frac{2}{T}\int_0^{t_и} U_m \cos n\omega_1 t\,dt = \frac{2U_m}{n\omega_1 T}\sin n\omega_1 t_и = \frac{U_m}{\pi n}\sin n\omega_1 t_и. \qquad (2)$$

$$b_n = \frac{2}{T}\left[\int_0^{t_и} f_1(t)\sin n\omega_1 t\,dt + \int_{t_и}^{T} f_2(t)\sin n\omega_1 t\,dt\right] =$$

$$= \frac{2}{T}\int_0^{t_и} U_m \sin n\omega_1 t\,dt = -\frac{2U_m}{n\omega_1 T}\left[\cos n\omega_1 t\Big|_0^{t_и}\right] = \frac{U_m}{\pi n}(1 - \cos n\omega_1 t_и). \qquad (3)$$

$$U_{nm} = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} = \frac{U_m}{\pi n}\sqrt{\sin^2 n\omega_1 t_и + (1 - \cos n\omega_1 t_и)^2} =$$

$$= \frac{2U_m}{\pi n}\sin\frac{n\omega_1 t_и}{2}; \qquad (4)$$

$$\operatorname{tg}\psi_n = \frac{a_n}{b_n} = \frac{\sin n\omega_1 t_и}{1 - \cos n\omega_1 t_и} = \operatorname{ctg}\frac{n\omega_1 t_и}{2} = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{n\omega_1 t_и}{2}\right);$$

$$\psi_n = \frac{\pi}{2} - \frac{n\omega_1 t_и}{2}. \qquad (5)$$

Вычисляем коэффициенты ряда и начальные фазы гармоник. При этом имеем в виду, что

$$\omega_1 = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{1\cdot 10^{-3}} = 2\pi\cdot 10^3\ \text{с}^{-1};\quad \omega_1 t_и = 2\pi\cdot 10^3\cdot 0{,}2\cdot 10^{-3} =$$

$$= 0{,}4\pi\ \text{рад}.$$

Для удобства расчеты сведены в табл. 5.2.

Таблица 5.2

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\omega_n = n\omega_1$	0	$2\pi\cdot10^3$	$4\pi\cdot10^3$	$6\pi\cdot10^3$	$8\pi\cdot10^3$	$10\pi10^3$	$12\pi10^3$	$14\pi10^3$	$16\pi10^3$	$18\pi10^3$	$20\pi10^3$
$\omega_n t_и/2 = \omega_n 10^{-4}$	0	$0{,}2\pi$	$0{,}4\pi$	$0{,}6\pi$	$0{,}8\pi$	π	$1{,}2\pi$	$1{,}4\pi$	$1{,}6\pi$	$1{,}8\pi$	2π
$\sin\frac{n\omega_1 t_и}{2}$	0	0,588	0,951	0,951	0,588	0	−0,588	−0,951	−0,951	−0,588	0
U_{nm}, В	2	3,74	3,03	2,02	0,935	0	−0,624	−0,866	−0,757	−0,416	0
ψ_n, рад	—	$0{,}3\pi$	$0{,}1\pi$	$-0{,}1\pi$	$-0{,}3\pi$	—	$-0{,}7\pi$	$-0{,}9\pi$	$-1{,}1\pi$	$-1{,}3\pi$	—

Искомый ряд

$$u = [2 + 3{,}74\sin(\omega_1 t + 0{,}3\pi) + 3{,}03\sin(2\omega_1 t + 0{,}1\pi) + 2{,}02\sin(3\omega_1 t - 0{,}1\pi) + 0{,}935\sin(4\omega_1 t - 0{,}3\pi) - 0{,}624\sin(6\omega_1 t - 0{,}7\pi) - 0{,}866\sin(7\omega_1 t - 0{,}9\pi) - 0{,}757\sin(8\omega_1 t - 1{,}1\pi) - 0{,}416\sin(9\omega_1 t - 1{,}3\pi) + \cdots] \text{ В},$$

или, учитывая, что $-\sin(n\omega_1 t - \psi_n) = \sin(n\omega_1 t - \psi_n \pm \pi)$, получим окончательно

$$u = [2 + 3{,}74\sin(\omega_1 t + 0{,}3\pi) + 3{,}03\sin(2\omega_1 t + 0{,}1\pi) + 2{,}02\sin(3\omega_1 t - 0{,}1\pi) + 0{,}935\sin(4\omega_1 t - 0{,}3\pi) + 0{,}624\sin(6\omega_1 t + 0{,}3\pi) + 0{,}866\sin(7\omega_1 t + 0{,}1\pi) + 0{,}757\sin(8\omega_1 t - 0{,}1\pi) + 0{,}416\sin(9\omega_1 t - 0{,}3\pi) + \cdots] \text{ В}.$$

Для определения ряда Фурье в комплексной форме [см. формулу (5.7)] находим комплексные амплитуды

$$\underline{F}_n = a_n - jb_n = \frac{U_m}{\pi n}[\sin n\omega_1 t_и - j(1 - \cos n\omega_1 t_и)] =$$

$$= \frac{2U_m}{\pi n}\sin\frac{n\omega_1 t_и}{2} e^{-j\frac{n\omega_1 t_и}{2}}.$$

Таким образом, комплексная форма ряда Фурье

$$u(t) = \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \frac{2U_m}{\pi n} \sin \frac{n\omega_1 t_и}{2} \, e^{j\omega_1 n \left(t - \frac{t_и}{2}\right)}.$$

На основе полученных результатов на рис. 5.3, *б* изображен линейчатый спектр напряжения в зависимости от номера гармоники n (расчеты для n от 1 до 10 даны в табл. 5.2; аналогичные расчеты для $n = 11 \div 30$ рекомендуется проделать самостоятельно).

По данным табл. 5.2 на рис. 5.3, *в* построен линейчатый спектр в зависимости от $\omega_n = n\omega_1$. Для построения графика выбраны масштабы: по оси абсцисс одному делению соответствует $1 \cdot 10^{-4}$ с$^{-1}$; по оси ординат в одном делении $100 \cdot 10^{-6}$ В · с (при построении последнего графика спектральные амплитуды приведены к нормированному масштабу путем деления на $\omega_1 = 2\pi/T$).

На рис. 5.3, *г* построен линейчатый спектр в зависимости от n при $T = 2$ мс, а на рис. 5.3, *д* спектр изображен в нормированном масштабе в зависимости от ω_n (расчеты рекомендуется проделать самостоятельно).

Из рис. 5.5, *в* и *д* видно, что спектральные характеристики импульсов одной и той же длительности $t_и$ зависят от периода T следования импульсов, и чем он больше, тем гуще располагаются спектральные линии, а амплитуды соседних гармоник близки по величине.

На рис. 5.3, *б*—*д* отложены значения $\frac{1}{2} U_n$, соответствующие положительным частотам. Полный спектр может быть получен, если построить такой же график симметрично относительно вертикальной оси (т. е. отложить соответствующие отрезки для отрицательных частот).

5.3. Кривая напряжения содержит четыре гармоники:

$$u = (80 \cos \omega_1 t + 60 \cos 2\omega_1 t - 15 \cos 3\omega_1 t - 12 \cos 4\omega_1 t +$$
$$+ 100 \sin \omega_1 t - 20 \sin 2\omega_1 t + 30 \sin 3\omega_1 t - 8 \sin 4\omega_1 t) \text{ В}.$$

Записать эту кривую в форме ряда (5.1), содержащего только синусоиды с начальными фазами, и в комплексной форме [см. формулу (5.7)]. Начертить линейчатый спектр частот (амплитуд и фаз) в зависимости от номера гармоники.

5.4. Разложить в тригонометрический ряд функцию тока, график которой выражает телеграфные сигналы при периодической передаче точек (рис. 5.4).

5.5. Разложить в тригонометрический ряд функцию напряжения, выражаемую кривой пилообразного напряжения (рис. 5.5). Сравнить

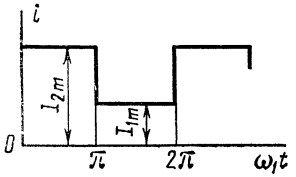


Рис. 5.4

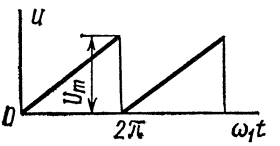


Рис. 5.5

полученный результат с разложением в ряд функции, указанной в п. 3 задачи 5.1. По найденному выражению построить кривую, составленную только из постоянной составляющей и первой гармоники разложения функции, и выяснить графически, насколько пилообразная кривая отличается от синтезируемой кривой. То же, при добавлении

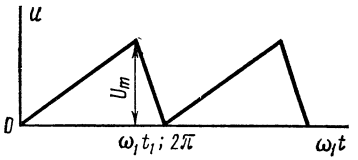


Рис. 5.6

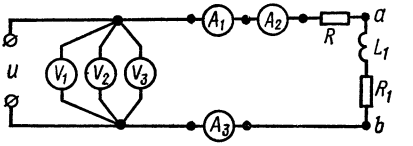


Рис. 5.7

к постоянной составляющей первой и второй гармоники; то же — при добавлении к предыдущему и третьей гармоники.

5.6. Напряжение на сетке лампы имеет вид периодически ломаной линии, изображенной на рис. 5.6. Разложить в тригонометрический ряд функцию напряжения, выражаемую указанной кривой.

Указание. Уравнение кривой в интервале от 0 до $\omega_1 t_1$

$$u_1 = \frac{U_m}{\omega_1 t_1}\,\omega_1 t,$$

а в интервале от $\omega_1 t_1$ до 2π

$$u_2 = \frac{U_m}{2\pi - \omega_1 t_1}\,(2\pi - \omega_1 t).$$

Из общего выражения следует получить частные случаи: 1) $\omega_1 t_1 = 2\pi$ (сравнить полученные выражения с результатами задачи 5.5); 2) $\omega_1 t_1 = \pi$; 3) $\omega_1 t_1 = 3\pi/2$.

Б. Расчет цепей при несинусоидальных периодических воздействиях

5.7. К зажимам цепи рис. 5.7, параметры которой $R = 30$ Ом, $L_1 = 60$ мГн; $R_1 = 18$ Ом, приложено напряжение

$$u = [120 + 200 \sin \omega_1 t + 50 \sin (3\omega_1 t + 30°)] \text{ В}.$$

Частота основной гармоники $f = 50$ Гц. Написать выражения мгновенных значений тока i, напряжения u_{ab} на участке ab. Определить показания приборов, если A_1 и V_1 — приборы магнитоэлектрической системы без выпрямления — показывают среднее значение, A_2 и V_2 — приборы индукционной системы — показывают действующее значение переменной составляющей, A_3 и V_3 — приборы тепловой системы — показывают действующее значение тока и напряжения. Вычислить активную мощность, расходуемую в цепи.

Р е ш е н и е. Постоянные составляющие тока и напряжения на участке ab:

$$I_{(0)} = U_0/(R + R_1) = 120/(30 + 18) = 2{,}5 \text{ А};$$

$$U_{ab\,(0)} = R_1 I_{(0)} = 45 \text{ В}.$$

Расчет для первой гармоники

$$\underline{I}_{m\,(1)} = \underline{U}_{m\,(1)} / \underline{Z}_{(1)} = 200/(R + R_1 + j\omega_1 L_1) = 3{,}88e^{-j21°25'} \text{ А}.$$

Напряжение на участке ab

$$U_{abm\,(1)} = \underline{I}_{m\,(1)}\,\underline{Z}_{ab\,(1)} = \underline{I}_{m\,(1)}\,(R_1 + j\omega L_1) =$$

$$= 3{,}88e^{-j21°25'} \cdot 26{,}1e^{j46°20'} = 101e^{j24°55'} \text{ В}.$$

Расчет для третьей гармоники:

$$\underline{I}_{m\,(3)} = \frac{\underline{U}_{m\,(3)}}{\underline{Z}_{(3)}} = \frac{50e^{j30°}}{R + R_1 + j3\omega_1 L_1} = 0{,}674e^{-j19°40'} \text{ А};$$

$$\underline{U}_{abm\,(3)} = \underline{I}_{m\,(3)}\,\underline{Z}_{(3)} = \underline{I}_{m\,(3)}\,(R_1 + j3\omega_1 L_1) = 40e^{j52°46'} \text{ В}.$$

Уравнения для i и u_{ab}:

$$i = [2{,}5 + 3{,}88 \sin(\omega_1 t - 21°25') + 0{,}674 \sin(3\omega_1 t - 19°40')] \text{ А};$$

$$u_{ab} = [45 + 101 \sin(\omega_1 t + 24°55') + 40 \sin(3\omega_1 t + 52°40')] \text{ В}.$$

Найдем показания приборов:
амперметр A_1 $I_0 = 2{,}5$ А;
вольтметр V_1 $U_0 = 120$ В;

амперметр A_2 $I_2 = \sqrt{\frac{3{,}88^2}{2} + \frac{0{,}674^2}{2}} = 2{,}78$ А;

вольтметр V_2 $U_2 = \sqrt{\frac{200^2}{2} + \frac{50^2}{2}} = 146$ В;

амперметр A_3 $I_3 = \sqrt{2{,}5^2 + \frac{3{,}88^2}{2} + \frac{0{,}674^2}{2}} = 3{,}74$ А;

вольтметр V_3 $U_3 = \sqrt{120^2 + \frac{200^2}{2} + \frac{50^2}{2}} = 189$ В.

Мощность, расходуемая в цепи, определяется по формуле (5.11а):

$$P = U_{(0)} I_{(0)} + U_{(1)} I_{(1)} \cos\varphi_{(1)} + U_{(3)} I_{(3)} \cos\varphi_{(3)} =$$

$$= 120 \cdot 2{,}5 + \frac{200}{\sqrt{2}} \cdot \frac{3{,}88}{\sqrt{2}} \cos 21°25' + \frac{50}{\sqrt{2}} \cdot \frac{0{,}674}{\sqrt{2}} \cos 49°40' =$$

$$= 670 \text{ Вт}.$$

5.8. Цепь, состоящая из последовательно соединенных $R = 8$ Ом и $L = 15$ мГн, подключена к периодическому напряжению с действующим значением 220 В, в разложении которого отсутствуют четные гармоники. Действующие значения гармоник связаны соотношениями $U_{(3)} = 0{,}4U_{(1)}$, $U_{(5)} = 0{,}2U_{(1)}$ и $U_{(7)} = 0{,}05U_{(1)}$.

Гармониками порядка выше седьмого можно пренебречь. Найти действующее значение тока и коэффициент мощности цепи. Частота первой гармоники $f = 50$ Гц.

5.9. Цепь, составленная из последовательно соединенных резистора и конденсатора, находится под действием напряжения

$$u = \left[100 + 200\sin\omega_1 t + 30\sin\left(3\omega_1 t - \frac{\pi}{2}\right)\right] \text{ В}.$$

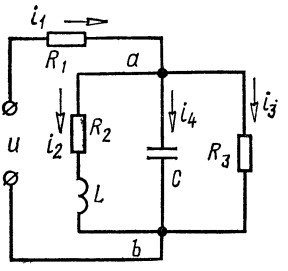


Рис. 5.8

Параметры цепи $R = 5$ Ом, $1/\omega_1 C = 3$ Ом.

Выразить ток i и напряжение на зажимах конденсатора u_C как функции времени. Вычислить действующие значения напряжения, тока и мощность, расходуемую в цепи. Определить показание вольтметра, подключенного к конденсатору, если это прибор: а) магнитоэлектрической (без выпрямления) и б) электродинамической систем.

5.10. На рис. 5.8 изображена схема цепи, параметры которой при основной частоте имеют $\omega_1 L = 12$ Ом и $1/\omega_1 C = 30$ Ом, а активные сопротивления: $R_1 = 6$ Ом, $R_2 = 5$ Ом, $R_3 = 20$ Ом. Приложенное к цепи напряжение $u = U_0 + U_{m(1)}\sin\omega_1 t + U_{m(3)}\sin(3\omega_1 t + \psi_{(3)})$, где $U_0 = 30$ В, $U_{m(1)} = 100$ В, $U_{m(3)} = 40$ В и $\psi_{(3)} = 20°$.

Записать уравнение мгновенного значения тока неразветвленного участка цепи. Определить действующее значение каждого тока. Вычислить мощность, расходуемую в цепи.

Р е ш е н и е. Расчет постоянной составляющей.

Эквивалентное сопротивление цепи и величины постоянного тока в неразветвленной части цепи и в ветвях с сопротивлениями R_2 и R_3 определяются по формулам

$$R_{\text{эк }(0)} = R_1 + \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3} = 10 \text{ Ом}; \quad I_{1\,(0)} = U_{(0)}/R_{\text{эк }(0)} = 30/10 = 3 \text{ А};$$

$$I_{2\,(0)} = I_{1\,(0)}\frac{R_2}{R_2 + R_3} = 2{,}4 \text{ А}; \quad I_{3\,(0)} = I_{1\,(0)} - I_{2\,(0)} = 0{,}6 \text{ А};$$

$$I_{4\,(0)} = 0.$$

Расчет для первой гармоники. Определим комплексное сопротивление трех параллельных ветвей

$$1/\underline{Z}_{ab\,(1)} = 1/\underline{Z}_{2\,(1)} + 1/\underline{Z}_{3\,(1)} + 1/\underline{Z}_{4\,(1)} = 1/(5 + j12) + 1/20 +$$

$$+ 1/(-j30) = (79{,}6 - j37{,}7)\ 10^{-3}\ \text{См},$$

отсюда

$$\underline{Z}_{ab\ (1)} = \frac{1}{(79{,}6 - j37{,}7)\cdot 10^{-3}} = 11{,}4e^{j25°20'} = (10{,}25 + j\,4{,}83)\ \text{Ом}.$$

Комплексное сопротивление всей цепи

$$\underline{Z}_{эк\ (1)} = R_1 + \underline{Z}_{ab\ (1)} = 16{,}25 + j4{,}83 = 17e^{j16°30'}\ \text{Ом}.$$

Комплексные (максимальные) токи в неразветвленной части цепи, напряжение на параллельных ветвях и токи в них:

$$\underline{I}_{1m\ (1)} = 100/17e^{j16°30'} = 5{,}88e^{-j16°30'}\ \text{А};$$

$$\underline{U}_{abm\ (1)} = \underline{I}_{1m\ (1)}\,\underline{Z}_{ab\ (1)} = 5{,}88e^{-j16°30'}\cdot 11{,}4e^{j25°20'} = 67e^{j8°50'}\ \text{В}.$$

$$\underline{I}_{2m\ (1)} = \underline{U}_{abm\ (1)}/\underline{Z}_{2\ (1)} = 67e^{j8°50'}/(5 + j12) = 5{,}15e^{-j58°30'}\ \text{А};$$

$$\underline{I}_{3m\ (1)} = \underline{U}_{abm\ (1)}/\underline{Z}_{3\ (1)} = 67e^{j8°50'}/20 = 3{,}35e^{j8°50'}\ \text{А};$$

$$\underline{I}_{4m\ (1)} = \underline{U}_{abm\ (1)}/\underline{Z}_{4\ (1)} = 67e^{j8°50'}/(-j30) = 2{,}23e^{j98°50'}\ \text{А}.$$

Расчет для третьей гармоники проводится аналогично:

$$\underline{Z}_{1\ (3)} = 6\ \text{Ом};\quad \underline{Z}_{2\ (3)} = R_2 + j3\omega_1 L = 5 + j36 = 36{,}5e^{j82°10'}\ \text{Ом};$$

$$\underline{Z}_{3\ (3)} = 20\ \text{Ом};\quad \underline{Z}_{4\ (3)} = -j1/3\omega_1 C = -j\cdot\frac{1}{3}\cdot 30 = -j10\ \text{Ом};$$

$$1/\underline{Z}_{ab\ (3)} = 1/(5 + j36) + 1/20 + 1/(-j10) = (53{,}77 + j72{,}8)\cdot 10^{-3}\ \text{См};$$

$$\underline{Z}_{ab\ (3)} = 6{,}56 - j8{,}9 = 11{,}05e^{-j53°35'}\ \text{Ом};$$

$$\underline{Z}_{эк\ (3)} = \underline{Z}_{1\ (3)} + \underline{Z}_{ab\ (3)} = 12{,}56 - j8{,}9 = 15{,}35e^{-j35°5'}\ \text{Ом};$$

$$\underline{I}_{1m\ (3)} = 40e^{j20°}/15{,}35e^{-j35°5'} = 2{,}6e^{j55°5'}\ \text{А};$$

$$\underline{U}_{abm\ (3)} = 2{,}6e^{j55°5'}\cdot 11{,}05e^{-j53°35'} = 28{,}7e^{j1°30'}\ \text{А};$$

$$\underline{I}_{2m\ (3)} = \underline{U}_{abm\ (3)}/\underline{Z}_{2\ (3)} = 0{,}79e^{-j80°40'}\ \text{А};$$

$$\underline{I}_{3m\ (3)} = \underline{U}_{abm\ (3)}/\underline{Z}_{3\ (3)} = 1{,}44e^{j1°30'}\ \text{А};$$

$$\underline{I}_{4m\ (3)} = \underline{U}_{abm\ (3)}/\underline{Z}_{4\ (3)} = 2{,}87e^{j91°30'}\ \text{А}.$$

Уравнение тока в неразветвленной части цепи имеет вид

$$i_1 = [3 + 5{,}88\sin(\omega_1 t - 16°30') + 2{,}6\sin(3\omega_1 t + 55°5')\ \text{А}.$$

Действующее значение каждого тока определяется по формуле (5.9):

$$I_1 = \sqrt{3^2 + \frac{5{,}88^2 + 2{,}6^2}{2}} = 5{,}45 \text{ А};$$

$$I_2 = \sqrt{2{,}4^2 + \frac{5{,}15^2 + 0{,}79^2}{2}} = 4{,}4 \text{ А};$$

$$I_3 = \sqrt{0{,}6^2 + \frac{3{,}52^2 + 1{,}44^2}{2}} = 2{,}64 \text{ А};$$

$$I_4 = \sqrt{\frac{2{,}23^2 + 2{,}87^2}{2}} = 2{,}57 \text{ А}.$$

Мощность, расходуемая в цепи, определяется по формуле (5.11а):

$$P = 30 \cdot 3 + \frac{1}{2} \cdot 100 \cdot 5{,}88 \cos 16°30' + \frac{1}{2} \cdot 40 \cdot 2{,}6 \cos 33°5' =$$
$$= 415 \text{ Вт}.$$

Проверка:

$$P = I_1^2 R_1 + I_2^2 R_2 + I_3^2 R_3 = 5{,}45^2 \cdot 6 + 4{,}4^2 \cdot 5 + 2{,}64^2 \cdot 20 =$$
$$= 178 + 97 + 140 = 415 \text{ Вт}.$$

5.11. В схеме цепи рис. 5.9 ток, проходящий по ветви, содержащей индуктивность, имеет постоянную составляющую $I_{2(0)} = 1$ А, основную гармонику $I_{2(1)} = 0{,}8$ А и третью гармонику $I_{2(3)} = 0{,}3$ А. Найти действующее значение приложенного к цепи напряжения и мощность, расходуемую в ней, если $R_1 = 100$ Ом, $R_2 = 80$ Ом, $L_2 = 0{,}2$ Гн и $C_3 = 1$ мкФ. Частота основной гармоники $f = 800$ Гц.

5.12. Найти токи, проходящие в отдельных ветвях цепи (рис. 5.10), если к цепи приложено напряжение $u = (150 + 100 \sin \omega_1 t + 50 \sin 3\omega_1 t)$ В. Даны: $R_1 = 500$ Ом, $\omega_1 L_1 = 1000$ Ом, $R_2 = 1000$ Ом, $\omega_1 L_2 = 500$ Ом, $1/(\omega_1 C_3) = 400$ Ом. Чему равна мощность, расходуемая в цепи?

5.13. Для питания нагрузочного сопротивления $R_2 = 600$ Ом от источника двухполупериодного выпрямленного синусоидального на-

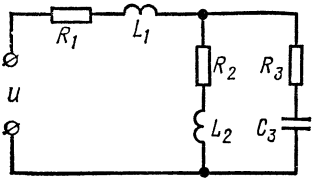


Рис. 5.9

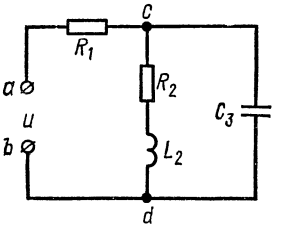


Рис. 5.10

пряжения (рис. 5.11, *а*) применен фильтр, сопротивления элементов которого при частоте ω_1 равны $R_1 = 100$ Ом, $\omega_1 L_1 = 3000$ Ом, $1/(\omega_1 C) = 20$ Ом.

Определить отношение постоянной составляющей тока, проходящего через резистор, сопротивление которого R_2, к действующему значению всего тока, проходящего через тот же резистор при под-

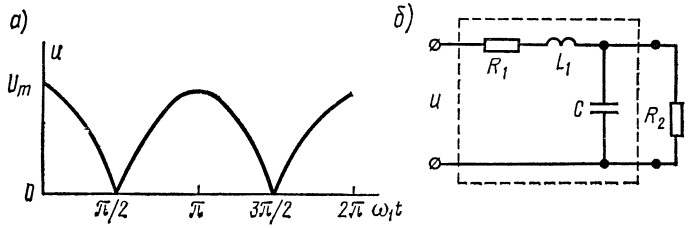


Рис. 5.11

ключении нагрузочного сопротивления через фильтр (рис. 5.11, *б*), и сравнить с отношением тех же величин при непосредственном подключении R_2 к источнику однофазного двухполупериодного выпрямленного напряжения.

Разложение в ряд заданной кривой имеет вид

$$u = \frac{4U_m}{\pi}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{1\cdot 3}\cos 2\omega_1 t - \frac{1}{3\cdot 5}\cos 4\omega_1 t + \frac{1}{5\cdot 7}\cos 6\omega_1 t - \ldots\right).$$

5.14. Подобрать емкости конденсаторов C_1 и C_2 так, чтобы цепь рис. 5.12 была настроена в резонанс напряжений для основной гармоники и не пропускала ток третьей гармоники. Угловая частота тока основной гармоники $\omega_1 = 5000$ с$^{-1}$. Параметры цепи: $R_1 = 50$ Ом и $L = 2$ мГн. Написать выражения мгновенных значений токов и напряжения на параллельном участке цепи, если к цепи приложено напряжение $u = (20\sin\omega_1 t + 10\sin 3\omega_1 t)$ В. Подсчитать действующие значения токов, напряжение на параллельном участке и мощность, расходуемую в цепи.

5.15. К цепи рис. 5.13 подведено напряжение $u = (50\sin\omega_1 t + 22\sin 2\omega_1 t)$ В. Сопротивления элементов цепи (для основной гармоники) равны $R_1 = 12$ Ом, $1/(\omega_1 C_1) = 10$ Ом, $R_2 = 12$ Ом, $\omega_1 L_2 = 8$ Ом.

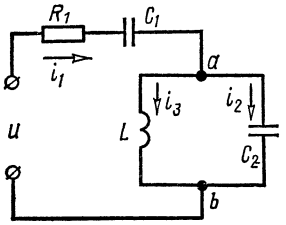


Рис. 5.12

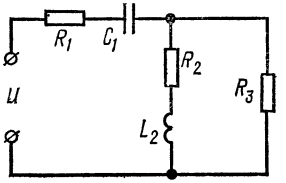


Рис. 5.13

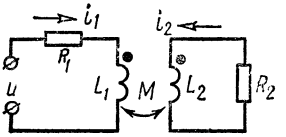


Рис. 5.14

Определить сопротивление R_3 и действующее значение тока в каждой ветви, если известно, что на второй гармонике цепь находится в режиме резонанса.

5.16. Напряжение, приложенное к двум индуктивно связанным контурам (рис. 5.14), изменяется по закону $u = (100 + 70{,}7 \sin \omega_1 t)$ В. Параметры контуров: $R_1 = 40$ Ом, $R_2 = 60$ Ом, $\omega_1 L_1 = 30$ Ом,

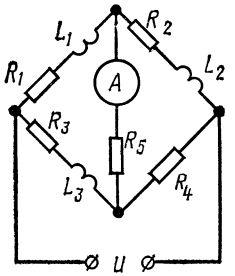


Рис. 5.15

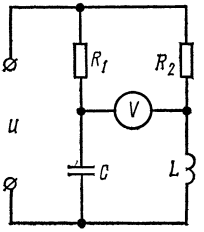


Рис. 5.16

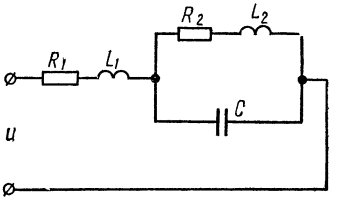


Рис. 5.17

$\omega_1 L_2 = 60$ Ом, $\omega_1 M = 20$ Ом. Найти выражения мгновенных токов в каждом из контуров.

Указание. Все токи по величине и фазе определяются для каждой гармоники в отдельности. Постоянная составляющая тока, проходящая в первом контуре, во вторичной контуре э. д. с. не наводит.

5.17. Определить показание амперметра тепловой системы, включенного в диагональ моста (рис. 5.15), если приложенное напряжение $u = (30 + 60\sin\omega_1 t + 15\sin 3\omega_1 t)$ В, а сопротивления элементов цепи для основной частоты: $R_1 = 30$ Ом, $\omega_1 L_1 = 50$ Ом, $R_4 = 30$ Ом, $\omega_1 L_2 = 30$ Ом, $R_3 = 40$ Ом, $\omega_1 L_3 = 10$ Ом, $R_4 = 30$ Ом, $R_5 = 60$ Ом.

5.18. В схеме цепи рис. 5.16 известны $R_1 = 12$ Ом, $1/(\omega_1 C) = 18$ Ом, $R_2 = 14$ Ом, $\omega_1 L = 8$ Ом. Определить показания вольтметра электродинамической системы, если

$$u = [50 + 80 \cos \omega_1 t - 30 \sin (2\omega_1 t + 60°)] \text{ В}.$$

Считать, что сопротивление вольтметра во много раз превышает сопротивление каждого из элементов цепи. Что покажет амперметр электродинамической системы, если он включен к тем же зажимам, что и вольтметр?

5.19. В цепи рис. 5.17 на частоте $\omega_1 = 9600$ с$^{-1}$ имеет место резонанс токов, а на третьей гармонике наступает резонанс напряжений. Определить индуктивности катушек L_1 и L_2, если $R_1 = 10$ Ом, $R_2 = 5$ Ом и $C = 2{,}5$ мкФ.

В. Коэффициенты, характеризующие форму периодической несинусоидальной кривой

5.20. Вычислить коэффициенты формы, амплитуды и искажения кривой напряжения, уравнение которой

$$u = U_{1m} \sin \omega_1 t + U_{2m} \sin 2\omega_1 t \ (U_{1m} = 100 \text{ В и } U_{2m} = 30 \text{ В}).$$

Р е ш е н и е. Сначала вычислим действующее значение напряжения по формуле (5.9):

$$U = \sqrt{\frac{100^2}{2} + \frac{30^2}{2}} = 73{,}8 \text{ В}.$$

Затем найдем среднее по модулю значение напряжения. Ввиду симметрии кривой u и положительности ее значений за половину периода (рис. 5.18) для его определения достаточно ограничиться половиной периода:

$$U_{ср} = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} (U_{1m} \sin \omega_1 t + U_{2m} \sin 2\omega_1 t)\, d(\omega_1 t) =$$

$$= -\frac{1}{\pi} \left[U_{1m} \cos \omega_1 t + \frac{U_{2m}}{2} \cos 2\omega_1 t \right]_{\omega_1 t = 0}^{\omega_1 t = \pi} = \frac{2U_{1m}}{\pi} = 63{,}7 \text{ В}.$$

Теперь определим максимальную ординату кривой u:

$$\frac{du}{d(\omega_1 t)} = U_{1m} \cos \omega_1 t + 2U_m \cos 2\omega_1 t = 0,$$

или так как $\cos 2\omega t = 2\cos^2 \omega_1 t - 1$, то

$$4U_{2m} \cos^2 \omega_1 t + U_{1m} \cos \omega_1 t - 2 = 0,$$

$$120 \cos^2 \omega_1 t + 100 \cos \omega_1 t - 2 = 0,$$

откуда, решая квадратное уравнение, получим

$\cos \omega_1 t = 0{,}404$; $\omega_1 t = 66°10'$ (знак минус перед корнем не ставят, так как в этом случае косинус окажется больше единицы), а

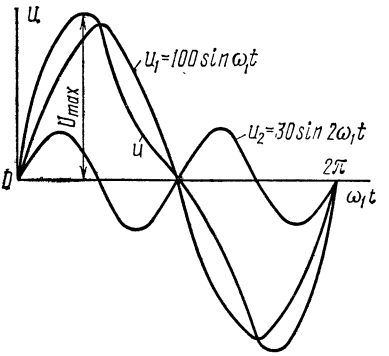


Рис. 5.18

$$U_{max} = [100 \sin \omega_1 t + 30 \sin 2\omega_1 t]_{\omega_1 t = 66°10'} = 116{,}7 \text{ В}.$$

Наконец, по формулам (5.12)—(5.14) вычислим искомые коэффициенты:

$$k_ф = 73{,}8/63{,}7 = 1{,}16; \quad k_а = 116{,}7/73{,}8 = 1{,}58;$$

$$k_и = \sqrt{2}/73{,}8 = 0{,}96.$$

5.21. Найти коэффициенты формы, амплитуды и искажения кривой напряжения $u = U_{1m} \sin \omega_1 t - U_{3m} \sin 3\omega_1 t (U_{1m} = 100 \text{ В}; U_{3m} = 30 \text{В})$.

ГЛАВА ШЕСТАЯ

КЛАССИЧЕСКИЙ МЕТОД РАСЧЕТА ПЕРЕХОДНЫХ ПРОЦЕССОВ В ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЯХ С СОСРЕДОТОЧЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

ОСНОВНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ И СООТНОШЕНИЯ

Классический метод решения задач на переходные процессы в разветвленных цепях с постоянными параметрами, в которых осуществляется коммутация (включение, выключение, переключение, изменение параметров цепи и т. п.), сводится к следующему.

1. Искомый ток (или напряжение). Его представляют в виде суммы составляющих установившегося и свободного режимов цепи:

$$i = i_{\text{у}} + i_{\text{св}} \text{ или } u = u_{\text{у}} + u_{\text{св}}. \tag{6.1}$$

Установившийся режим цепи обусловлен действием источников энергии, а поэтому составляющая $i_{\text{у}}$ (или $u_{\text{у}}$) в случае постоянного или синусоидального напряжения может быть найдена обычными методами расчета установившегося процесса в цепи после коммутации. Вид функции $i_{\text{у}} = F_1(t)$ [или $u_{\text{у}} = F_1(t)$] зависит как от формы э. д. с. или токов источников энергии, так и от характера самой цепи.

Свободный режим цепи обусловлен несоответствием запаса электромагнитной энергии цепи в момент коммутации тому его значению, которое должно быть после коммутации.

Вид функции $i_{\text{св}}(t) = F_2(t)$ [или $u_{\text{св}} = F_2(t)$] зависит только от характера самой цепи.

2. Общая формула свободного тока $i_{\text{св}}(t) = F_2(t)$. Она имеет вид

$$i_{\text{св}} = \sum_{k=1}^{n} A_k \mathrm{e}^{p_k t}, \tag{6.2}$$

где n — порядок характеристического уравнения цепи; p_k — значения корней характеристического уравнения; A_k — постоянные интегрирования.

3. Характеристическое уравнение. Наиболее простой способ составления характеристического уравнения цепи состоит в следующем: а) записывают формулу входного сопротивления цепи в комплексной форме; б) в формуле $\underline{Z}$ производят замену сомножителя $j\omega$ на p; в) полученное выражение $\underline{Z}(p)$ приравнивают нулю:

$$\underline{Z}(p) = 0. \tag{6.3}$$

Характеристическое уравнение может быть получено путем приравнивания нулю входного сопротивления $\underline{Z}(p)$ относительно любой

ветви цепи. В тех случаях, когда разветвленная цепь имеет лишь один накопитель энергии, удобнее рассматривать формулу входного сопротивления относительно ветви с накопителем энергии.

Если в схеме имеется источник тока, характеристическое сопротивление нельзя рассматривать относительно ветви с источником тока. Его следует рассчитывать относительно любой другой ветви схемы, полагая при этом ветвь с источником тока разомкнутой.

4. Свободный ток. Выражение свободного тока определяется видом корней характеристического уравнения.

При различных вещественных корнях выражение свободного тока имеет вид

$$i_{св} = A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t} + \cdots + A_n e^{p_n t}. \qquad (6.4\,а)$$

Если корни характеристического уравнения равны между собой (т. е. корень p имеет кратность m), то

$$i_{св} = A_0 e^{pt} + A_1 t e^{pt} + A_2 t^2 e^{pt} + \cdots + A_m t^m e^{pt}. \qquad (6.4\,б)$$

В случае пары комплексно-сопряженных корней $p_{1,2} = -\delta \pm j\omega_{св}$ (δ — собственное затухание, $\omega_{св}$ — частота свободных колебаний)

$$i_{св} = A e^{-\delta t} \sin(\omega_{св} t + \psi). \qquad (6.4\,в)$$

В последнем случае постоянными интегрирования являются A и ψ.

5. Начальные условия. Для определения постоянных интегрирования используются начальные условия. В качестве независимых начальных условий берут величины токов индуктивных катушек $i_L(0_-)$ и напряжений на конденсаторах $u_C(0_-)$ к моменту коммутации. Если коммутация происходит мгновенно в момент времени $t = 0$ и если мощность обмена энергией между отдельными элементами цепи остается конечной, то все величины, определяющие энергию элементов цепи, изменяются непрерывно. В этом случае выполняются следующие законы коммутации: токи в индуктивных катушках и напряжения на конденсаторах в момент коммутации не изменяются скачками, т. е. они являются непрерывными функциями времени:

$$i_L(0_-) = i_L(0_+), \quad u_C(0_-) = u_C(0_+)^*. \qquad (6.5)$$

Начальные значения токов в ветвях без индуктивных катушек или напряжений на элементах, не являющихся конденсаторами, могут в момент коммутации изменяться скачком. Эти начальные значения токов и напряжений (зависимые начальные условия) определяются по законам Кирхгофа с применением законов коммутации.

6. Постоянные интегрирования. Определяют постоянные интегрирования следующим образом.

---

* Случаи, когда токи в индуктивных элементах и напряжения на конденсаторах изменяются скачком, рассмотрены в задачах 6.43; 6.45; 6.47.

а. В случае цепи первого порядка постоянную интегрирования находят из выражения $i(t)$, рассматриваемого при $t = 0_+$:

$$i(0_+) = i_y(0_+) + A. \tag{6.6}$$

б. В случае цепи второго порядка для определения постоянных интегрирования используют уравнения $i(0)$ и $i'(0)$:

$$\left.\begin{aligned} i(0_+) &= i_y(0_+) + A_1 + A_2, \\ i'(0_+) &= i'_y(0_+) + p_1A_1 + p_2A_2, \end{aligned}\right\} \tag{6.7 а}$$

или

$$\left.\begin{aligned} i(0_+) &= i_y(0_+) + A\sin\psi, \\ i'(0_+) &= i'_y(0_+) + \omega A\cos\psi - aA\sin\psi. \end{aligned}\right. \tag{6.7б}$$

Значения $i(0_+)$ и $i'(0_+)$ в общем случае могут быть найдены путем решения уравнений, составленных для цепи по законам Кирхгофа, и первых производных этих уравнений, рассматриваемых при $t = 0_+$.

Если в цепи имеется ветвь с конденсатором емкостью C, целесообразно начинать расчет с определения u_C. Это облегчает определение постоянных интегрирования, поскольку значения $u_C(0_+)$ и $u'_C(0_+) = i_C(0_+)/C$ легко выявляются из начальных условий.

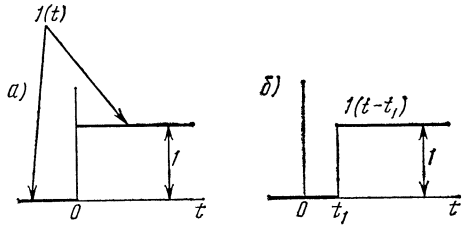


Рис. 6.1

в. В случае цепи высшего порядка приходится многократно дифференцировать уравнение $i(t)$ и уравнения, составленные по законам Кирхгофа.

Примеры даны в задачах 6.4; 6.9; 6.10; 6.12; 6.20; 6.23; 6.26; 6.30.

7. Единичная ступенчатая функция. Единичная импульсная функция. Единичная ступенчатая функция, или единичная функция (единичный скачок или функция Хевисайда), равна нулю при $t < 0$ и равна единице при $t \geqslant 0$. Ее обозначение $1(t)$. Математическая запись единичной функции

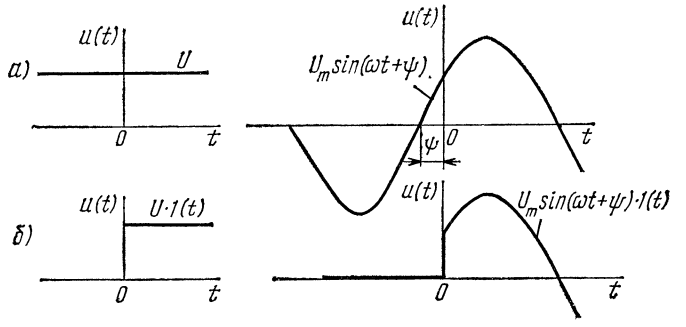


Рис. 6.2

$$1(t) = \begin{cases} 0 \text{ при } t < 0, \\ 1 \text{ при } t \geqslant 0. \end{cases} \tag{6.8}$$

Единичная функция изображена на рис. 6.1, *а*.

Любая функция времени $f(t)$, действие которой начинается в момент $t = 0$, может быть записана в виде произведения $1(t)f(t)$. Так, например, на рис. 6.2, *а* изображены постоянная функция U и синусоидальная функция $u = U_m \sin(\omega t + \psi)$, а на рис. 6.2, *б* произведение $1(t)U$ и $1(t)U_m \sin(\omega t + \psi)$.

Если единичное воздействие начинается не в момент $t = 0$, а в более поздний момент t_1, то его можно записать с помощью единичной функции с запаздывающим аргументом в виде $1(t - t_1)$. Эта функция равна нулю при $t < t_1$ и равна единице при $t \geqslant t_1$ (см. рис. 6.1, *б*). Умножение $f(t)$ на $1(t - t_1)$ означает, что эта функция равна нулю при $t < t_1$ и равна $f(t)$ при $t \geqslant t_1$.

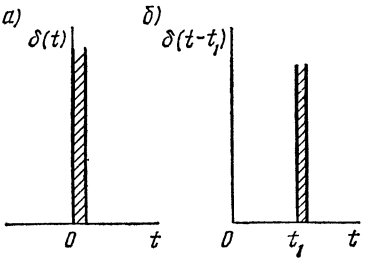


Рис. 6.3

Единичная импульсная функция (дельта-функция или функция Дирака) — функция, которая неограниченно возрастает, когда ее аргумент обращается в нуль ($t = 0$), а при любых значениях аргумента, не равных нулю, она равняется нулю (рис. 6.3, *а*). Интеграл от этой функции равен единице при условии, что нулевое значение аргумента лежит внутри пределов интегрирования. Запись импульсной функции следующая:

$$\delta(t) = \begin{cases} 0 \text{ при } t < 0 \text{ и } t > 0, \\ \infty \text{ при } t = 0. \end{cases} \tag{6.9а}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\, dt = 1.$$

Если единичная импульсная функция принимает бесконечно большое значение не в момент $t = 0$, а при $t = t_1 > 0$ (рис. 6.3, *б*), а при всех $t \neq t_1$ она равна нулю, то она записывается в виде $\delta(t - t_1)$:

$$\delta(t - t_1) = \begin{cases} 0 \text{ при } t < t_1 \text{ и } t > t_1, \\ \infty \text{ при } t = t_1. \end{cases} \tag{6.9б}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_1)\, dt = 1.$$

Единичная функция и единичная импульсная функция связаны между собой соотношением

$$\delta(t) = \frac{d1(t)}{dt} = 1'(t); \quad \delta(t - t_1) = \frac{d}{dt} 1(t - t_1). \tag{6.10}$$

А. Расчет цепей, содержащих RL- или RC-элементы

6.1. Цепь, содержащая последовательно соединенные резистор с сопротивлением $R = 100$ Ом и катушку, индуктивность которой $L = 0{,}2$ Гн, включается на постоянное напряжение $U = 120$ В. Чему равна постоянная времени цепи? С какой скоростью нарастает ток в начальный момент? Определить, через какой промежуток времени ток станет равным 99% тока установившегося режима. Найти закон изменения э. д. с. самоиндукции, наводимой при включении, и вычислить, через какой промежуток времени после включения скорость нарастания энергии (т. е. мощность $p_м$) в магнитном поле будет максимальна. Построить кривые зависимостей от времени i, $w_м$ и $p_м$.

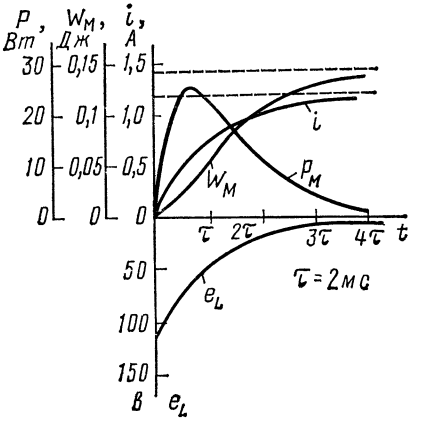


Рис. 6.4

Указание. По результатам расчетов на рис. 6.4 изображены требуемые кривые.

6.2. Сопротивление катушки 1,2 Ом, ее индуктивность 9 Гн. В момент, когда через индуктивную катушку проходит ток 50 А, она замыкается накоротко. С какой скоростью начнет убывать ток в катушке? Чему равна скорость убывания тока в момент, когда ток равен 25 А?

6.3. Катушка с $R = 50$ Ом и $L = 125$ мГн находится под постоянным напряжением $U = 150$ В. После практически полного установления тока катушка посредством ключа с переходным контактом быстро отключается от источника электрической энергии и замыкается на резистивное сопротивление $R_1 = 12{,}5$ Ом. Найти ток в катушке (рис. 6.5). Показать, что энергия, выделившаяся в цепи после переключения в виде тепла, равна первоначальному запасу энергии магнитного поля.

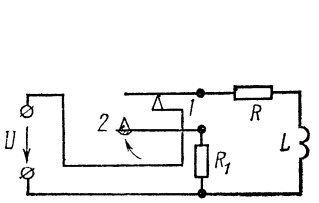


Рис. 6.5

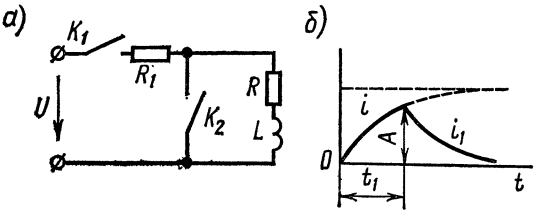


Рис. 6.6

6.4. При замыкании контакта K_1 и разомкнутом контакте K_2 к источнику постоянного напряжения подключается индуктивная катушка R, L, последовательно с которой соединен реостат сопротивлением R_1 (рис. 6.6, *а*). Через t_1 после замыкания K_1 замыкается K_2, который остается в таком состоянии продолжительное время.

Построить кривую изменения тока в катушке с момента замыкания контакта K_1 до момента практически полного затухания тока в катушке (например, до 1% от максимального значения тока).

Р е ш е н и е. При замыкании K_1 и разомкнутом K_2 переходный ток в катушке

$$i = \frac{U}{R_1 + R}\left(1 - e^{-\frac{R_1+R}{L}t}\right). \qquad (1)$$

К моменту включения K_2 ток в катушке достигнет величины

$$i_{t=t_1} = \frac{U}{R_1 + R}\left(1 - e^{-\frac{R_1+R}{L}t_1}\right) = A. \qquad (2)$$

Второй закон Кирхгофа для контура катушки, замкнутой контактом K_2 (при $t \geqslant t_1$), будет

$$L\frac{di_1}{dt} + i_1 R = 0.$$

Решение этого уравнения дает

$$i_1 = Ae^{-\frac{R}{L}(t-t_1)}. \qquad (3)$$

Постоянную интегрирования A найдем из начального условия, согласно которому для момента $t = t_1$ ток $i = i_1$. Ток по формуле (3):

$$i_1 = \frac{U}{R_1 + R}\left(1 - e^{-\frac{R_1+R}{L}t_1}\right)e^{-\frac{R}{L}(t-t_1)}.$$

На рис. 6.6, *б* построены кривые изменения тока.

6.5. Цепь постоянного тока состоит из катушки, индуктивность которой $L = 0{,}1$ Гн, и двух резисторов с сопротивлениями $R = 10$ Ом и $R_1 = 30$ Ом (рис. 6.7, *а*). Приложенное напряжение $U = 120$ В. Резистор R_1 внезапно замыкается накоротко. Найти выражение

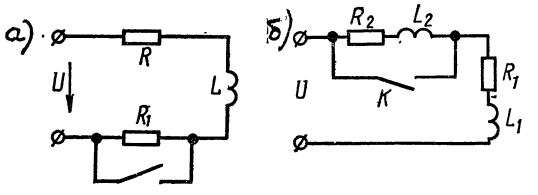


Рис. 6.7

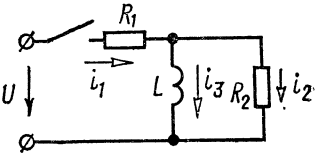


Рис. 6.8

тока в катушке после замыкания контакта; начертить график его изменения по времени.

6.6. В цепи рис. 6.7, *б* контакт замкнут. Найти выражение тока после внезапного размыкания контакта, вводящего в цепь добавочное сопротивление R_1. Даны: $U = 120$ В; $R_1 = R_2 = 30$ Ом, $L_1 = L_2 = 0{,}1$ Гн.

6.7. Телеграфная цепь состоит из батареи, э. д. с. которой 10 В и внутреннее сопротивление 2 Ом, линии, имеющей активное сопротивление 51,6 Ом, и реле, активное сопротивление которого 21,4 Ом, а индуктивность 1,25 Гн. Если якорь реле не притягивается до тех пор, пока ток не станет равным 0,05 А, то сколько времени пройдет после замыкания цепи до начала работы реле?

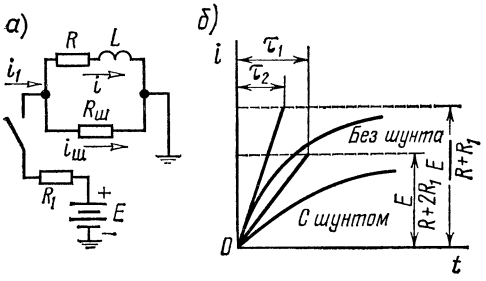


Рис. 6.9

6.8. Цепь рис. 6.8 включается под действие постоянного напряжения $U = 120$ В. Найти выражения токов i_1, i_2 и i_3 и изобразить их графически: $R_1 = 20$ Ом, $R_2 = 30$ Ом, $L = 0{,}3$ Гн.

6.9. Для замедления скорости нарастания тока в электромагните R, L его шунтируют активным сопротивлением $R_ш$ (рис. 6.9, *а*). Найти ток i в электромагните и сравнить скорость его нарастания со скоростью нарастания тока электромагнита при отсутствии шунта.

Для упрощения положить $R = R_ш$.

Р е ш е н и е. Ток в катушке ищем в виде суммы установившегося и свободного токов:

$$i = i_у + i_{св}. \tag{1}$$

Установившийся ток — это постоянный ток, который рассчитываем по методу расчета цепей постоянного тока:

$$i_у = I_{1у}\frac{R_ш}{R + R_ш} = \frac{E}{R_1 + \dfrac{RR_ш}{R + R_ш}} \cdot \frac{R_ш}{R + R_ш} =$$

$$= \frac{ER_ш}{R_1R + R_1R_ш + RR_ш}. \tag{2}$$

Свободный ток ищем в виде

$$i_{св} = Ae^{pt}, \tag{3}$$

где p — корень следующего характеристического уравнения:

$$Z(p) = R_1 + \frac{R_ш(R + pL)}{R_ш + R + pL} = \frac{R_1R + R_1R_ш + RR_ш + pL(R_1 + R_ш)}{R_ш + R + pL} = 0,$$

отсюда находим

$$p = p_1 = -\frac{R_1R + R_1R_{ш} + RR_{ш}}{L\,(R_1 + R_{ш})}. \tag{4}$$

Постоянная времени цепи

$$\tau = \frac{1}{|\,p_1\,|} = \frac{L\,(R_1 + R_{ш})}{R_1R + R_1R_{ш} + RR_{ш}}. \tag{5}$$

Подставляем (2) и (3) в (1):

$$i = \frac{ER_{ш}}{R_1R + R_1R_{ш} + RR_{ш}} + Ae^{pt}. \tag{6}$$

Для определения постоянной A используем начальное условие (6.5), согласно которому при $t = 0$ ток $i(0_-) = i(0_+) = 0$

$$\frac{ER_{ш}}{R_1R + R_1R_{ш} + RR_{ш}} + A = 0,$$

отсюда

$$A = -\frac{ER_{ш}}{R_1R + R_1R_{ш} + RR_{ш}}.$$

Подставляя это выражение в (6), получим искомый ток

$$i = \frac{ER_{ш}}{R_1R + R_1R_{ш} + RR_{ш}}\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right). \tag{7}$$

В частном случае при $R_{ш} = R$ ток

$$i = \frac{E}{R + 2R_1}\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau_1}}\right), \tag{8}$$

где

$$\tau = \frac{L\,(R + R_1)}{R\,(R + 2R_1)} = \frac{L}{R + \dfrac{R_1}{1 + \dfrac{R_1}{R}}}. \tag{9}$$

Если же шунт снять, то, полагая в (7) $R_{ш} = \infty$, получим

$$i = \frac{E}{R + R_1}\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau_2}}\right), \tag{10}$$

где

$$\tau_2 = \frac{L}{R + R_1}. \tag{11}$$

Сравнивая выражения (9) и (11), устанавливаем, что $\tau_1 > \tau_2$, т. е. постоянная времени при наличии шунта больше, чем без него.

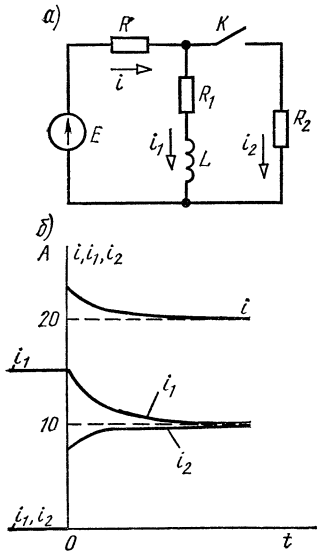


Рис. 6.10

Вычислим начальную скорость нарастания тока. При наличии шунта из формулы (8) имеем

$$\left.\frac{di}{dt}\right|_{t=0_+} = \frac{E}{\tau_1 (R + 2R_1)}, \qquad (12)$$

а без шунта из формулы (10) получим

$$\left.\frac{di}{dt}\right|_{t=0_+} = \frac{E}{\tau_2 (R + R_1)}. \qquad (13)$$

Сравнивая выражения (12) и (13), устанавливаем, что при наличии шунта скорость нарастания тока меньше, чем без него. На рис. 6.9, *б* по уравнениям (8) и (10) построены кривые токов.

6.10. В цепи рис. 6.10, *а* даны: $E = 12$ В, $R = R_1 = R_2 = 4$ Ом, $L = 0{,}1$ Гн. Найти токи после внезапного замыкания контакта (до коммутации в цепи был установившийся режим). Построить кривые изменения этих величин.

Р е ш е н и е. *Расчет токов в докоммутационном режиме* (контакт разомкнут):

$$i = i_1 = E/(R_1 + R_2) = 15 \text{ А}, \quad i_2 = 0.$$

Расчет установившегося режима после коммутации (контакт замкнут):

$$i_{\text{у}} = \frac{E}{R + \dfrac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}} = 20 \text{ А}; \quad i_{1\text{у}} = i_{\text{у}} \frac{R_2}{R_1 + R_2} = 10 \text{ А};$$

$$i_{2\text{у}} = i_{\text{у}} - i_{1\text{у}} = 10 \text{ А}.$$

Расчет переходного режима. Решение целесообразно начать с отыскания тока i_1 в ветви с индуктивным элементом, так как при этом наиболее просто воспользоваться начальным условием. Ток ищем в виде

$$i_1 = i_{1\text{у}} + i_{1\text{св}},$$

Свободная составляющая этого тока

$$i_{1\text{св}} = Ae^{p_1 t},$$

где p_1 — корень характеристического уравнения, которое наиболее просто составить относительно ветви с индуктивностью

$$Z(p) = R_1 + pL + R_1 R_2/(R_1 + R_2) = 0.$$

Отсюда

$$p = p_1 = -\frac{RR_1 + RR_2 + R_1R_2}{L(R + R_2)} = -60 \text{ с}^{-1}.$$

Подставляя в выражение i_1 найденные значения установившегося $i_{1у}$ и свободного $i_{1св}$ токов, будем иметь

$$i_1 = 10 + Ae^{-60t}.$$

Постоянную A определяем из начального условия:

$$i_1(0_+) = i_1(0_-) \text{ или } 10 + A = 15,$$

отсюда $A = 5$.

Итак

$$i_1 = 10 + 5e^{-60t} \text{ А}.$$

Для отыскания тока i_2 вначале найдем напряжение на параллельном участке

$$u_{ab} = i_1R_1 + L\frac{di_1}{dt} = \left(40 - 10e^{-60t}\right) \text{ В}.$$

Наконец вычисляем искомые токи:

$$i_2 = u_{ab}/R_2 = \left(10 - 2{,}5e^{-60t}\right) \text{ А},$$

$$i = i_1 + i_2 = \left(20 + 2{,}5e^{-60t}\right) \text{ А}.$$

Отметим, что в ветвях с R_1 и R_2 в момент коммутации имеет место скачкообразное изменение токов; это возможно, так как в этих ветвях нет накопителей энергии и поэтому оно не связано с внезапным изменением в них запаса электромагнитной энергии и становится физически осуществимым.

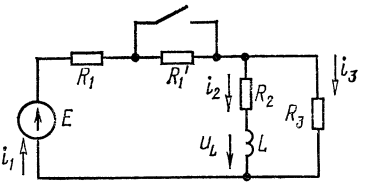


Рис. 6.11

На рис. 6.10, *б* построены кривые токов в докоммутационном и послекоммутационном режимах.

6.11. В схеме рис. 6.11 до замыкания контакта был установившийся режим. Даны: $R_1 = 8$ Ом, $R_1' = 10$ Ом, $R_2 = 10$ Ом, $L = 25$ мГн, $R_3 = 30$ Ом, $E = 60$ В.

Требуется: 1. Найти свободные составляющие $i_{1св}(0_+)$, $i_{2св}(0_+)$, $i_{3св}(0)$ и $i_{Lсв}(0_+)$, $\left.\frac{du_{Lсв}}{dt}\right|_{t=0_+}$. 2. Определить законы изменения всех токов в цепи после замыкания контакта.

6.12. Найти ток в индуктивной катушке (рис. 6.12, *а*) после включения источника постоянного тока J (т. е. при размыкании контакта K).

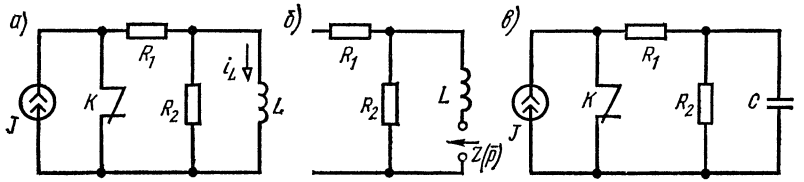


Рис. 6.12

Р е ш е н и е. Искомый ток i_L ищем в виде суммы установившегося и свободного токов:

$$i_L = i_{Ly} + i_{L\,св.} \tag{1}$$

Из схемы очевидно, что при установившемся режиме ток

$$i_{Ly} = J. \tag{2}$$

Для определения вида свободного тока составляем выражение характеристического сопротивления относительно ветви с индуктивностью (рис. 16.12, *б*; при этом согласно п. 3 основных положений и соотношений ветвь с источником тока должна быть разомкнута), которое приравниваем нулю:

$$Z(p) = pL + R_2 = 0, \text{ отсюда } p_1 = -R_2/L.$$

Таким образом, свободный ток ищем в виде

$$i_{L\,св} = Ae^{p_1 t} = Ae^{-\frac{R_2}{L}t}. \tag{3}$$

Подставляем (2) и (3) в (1), получим

$$i_L = J + Ae^{-\frac{R_2}{L}t}. \tag{4}$$

Постоянную интегрирования A находим из начального условия (6.5)

$$i_L(0_-) = \left| J + Ae^{-\frac{R_2}{R}t} \right|_{t=0} = i_L(0_+) = 0.$$

Отсюда находим $A = -J$, подставляем в (4) и окончательно получаем

$$i_L = J\left(1 - e^{-\frac{R_2}{L}t}\right).$$

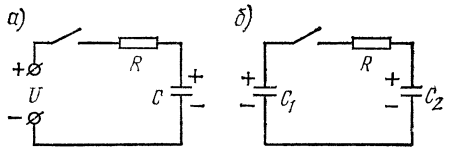


Рис. 6.13

6.13. Найти выражение напряжения на конденсаторе после включения источника постоянного тока (рис. 6.12, *в*).

6.14. При полном разряде конденсатора емкостью $C = 200$ мкФ на сопротивлении резистора выделяется в виде тепловой энергии 1 Дж. Спустя 0,06 с после начала разряда напряжение на обкладках конденсатора равнялось 5 В. а. До какого напряжения был заряжен конденсатор и какова величина сопротивления, через которое он разряжается? б. Через какой промежуток времени после начала разряда напряжение конденсатора упадет до 0,001% своего первоначального значения?

6.15. Конденсатор еккостью 45 мкФ заряжается через резистор, сопротивление которого 10 кОм от источника энергии с напряжением

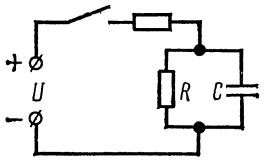


Рис. 6.14

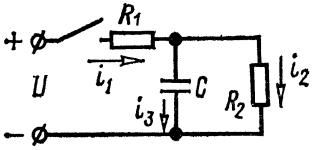


Рис. 6.15

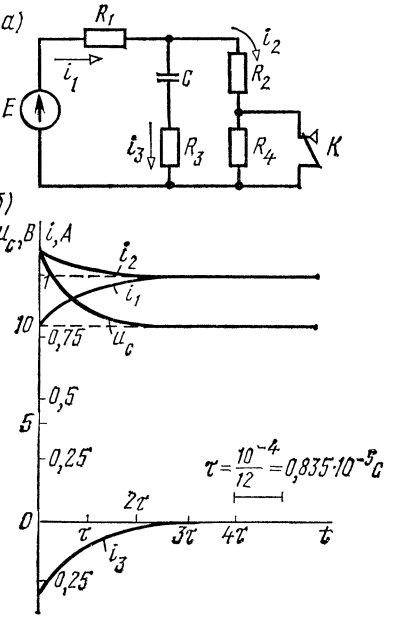


Рис. 6.16

500 В. Чему равен заряд конденсатора, когда ток составляет половину своей начальной величины? С какой скоростью нарастает заряд в этот момент? Чему равна ошибка в процентах, если принять, что конденсатор зарядится полностью в конце десятой секунды?

6.16. Конденсатор емкостью C, предварительно заряженный до напряжения U_0, подключается через сопротивление к источнику постоянного напряжения U (рис. 6.13, *а*). Найти законы изменения напряжения на обкладках конденсатора и тока, проходящего в цепи при замыкании контакта.

6.17. Конденсатор $C_1 = 10$ мкФ, заряженный до напряжения $U_1 = 100$ В, замыкается на цепь, состоящую из последовательно соединенных активного сопротивления $R = 125$ Ом и заряженного до напряжения $U_2 = 20$ В конденсатора $C_2 = 40$ мкФ (рис. 6.13, *б*). Найти как функцию времени ток в цепи и напряжение на обкладках каждого конденсатора, а также построить графики найденных функций. Найти величину энергии электрического поля до замыкания контакта и по окончании переходного процесса.

6.18. Конденсатор с утечкой, параметры которого $C = 2$ мкФ и $R = 50$ кОм, отключается от источника постоянного тока с напряжением $U = 120$ В (рис. 6.14). Определить напряжение на конденсаторе через $t_1 = 0{,}1$ с после отключения.

6.19. Цепь рис. 6.15 включается на постоянное напряжение. Найти токи и начертить кривые изменения их во времени. Данные цепи: $U = 10$ В, $R_1 = 40$ Ом, $R_2 = 10$ Ом, $C = 25$ пФ.

6.20. Цепь рис. 6.16, *а*, параметры которой $R_1 = 5$ Ом, $R_2 = 10$ Ом, $R_3 = 5$ Ом, $R_4 = 15$ Ом, $C = 1$ мкФ, при разомкнутом контакте K находится в установившемся режиме под воздействием постоянной э. д. с. $E = 15$ В.

Требуется после включения определить: 1) начальные значения переходных токов и напряжения на конденсаторе, а также начальные значения их установившихся и свободных составляющих и производную свободной составляющей напряжения на конденсаторе в момент начала переходного процесса; 2) законы изменения во времени всех токов и напряжения на конденсаторе.

Р е ш е н и е. *Расчет режима до коммутации* (контакт разомкнут). Токи в ветвях и напряжение на конденсаторе равны:

$$i_1 = i_2 = E/(R_1 + R_2 + R_4) = 0{,}5 \text{ А}; \quad i_3 = 0;$$

$$u_C = (R_2 + R_4)\, i_2 = 25 \cdot 0{,}5 = 12{,}5 \text{ В}.$$

Расчет установившегося режима после коммутации (контакт замкнут). Напряжение на конденсаторе и токи

$$u_{C\text{у}} = R_2 i_{2\text{у}} = 10 \cdot 1 = 10 \text{ В}; \quad i_{1\text{у}} = i_{2\text{у}} = E/(R_1 + R_2) = 1 \text{ А}; \quad i_{3\text{у}} = 0.$$

Определение законов изменения во времени искомых величин.

Расчет свободного процесса. Составим для послекоммутационной схемы характеристическое уравнение сопротивления и приравняем его нулю. Наиболее просто составить его относительно ветви с конденсатором:

$$Z(p) = 1/pC + R_3 + R_1R_2/(R_1 + R_2) = 0.$$

Корень этого уравнения

$$p = p_1 = -\frac{R_1 + R_2}{C\,(R_1R_2 + R_1R_3 + R_2R_3)} = -12 \cdot 10^{-4} \text{ с}^{-1}.$$

Так как характеристическое сопротивление имеет только один корень, свободная составляющая каждой искомой величины имеет вид $Ae^{p_1 t}$.

Решение ищем в виде

$$u_C = u_{C\text{у}} + u_{C\text{ св}} = 10 + Ae^{p_1 t}.$$

Постоянную A определяем из начального условия:

$$u_C(0_-) = u_C(0_+), \text{ или } 12{,}5 = 10 + A,$$

откуда $A = 2{,}5$.

Таким образом,

$$u_C = (10 + 2{,}5e^{-12\cdot 10^4 t})\ \text{В}.$$

Находим токи

$$i_3 = C\frac{du_C}{dt} = -0{,}3e^{-12\cdot 10^4 t}\ \text{А}.$$

$$i_2 = \frac{u_C + i_3 R_3}{R_2} = (1 + 0{,}1e^{-12\cdot 10^4 t})\ \text{А}.$$

Графики найденных величин изображены на рис. 6.16, *б*.

6.21. В схеме рис. 6.17 до коммутации (контакт K замкнут) был установившийся режим. Даны: $R_1 = 50$ Ом, $R_2 = 30$ Ом, $R_3 = 20$ Ом, $C = 10$ мкФ, $U = 80$ В. Определить после размыкания контакта: 1) начальные значения переходных токов и напряжения на конденсаторе и их установившиеся и свободные составляющие; 2) выражения токов и напряжения на конденсаторе.

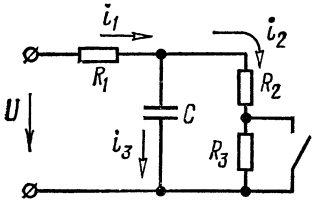


Рис. 6.17

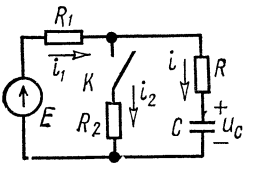


Рис. 6.18

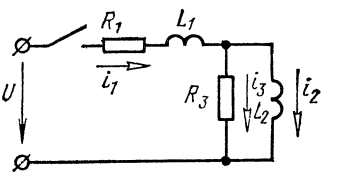


Рис. 6.19

6.22. Определить напряжение на конденсаторе и токи при замыкании контакта K (рис. 6.18) и построить их кривые. Даны: $E = 24$ В, $R = 20$ Ом, $R_1 = 50$ Ом, $R_2 = 100$ Ом, $C = 3$ мкФ.

6.23. Цепь рис. 6.19 включается под действие постоянного напряжения $U = 48$ В. Найти токи i_1, i_2 и i_3 и изобразить их графически, если $R_1 = 160$ Ом, $L_1 = 100$ мГн, $R_3 = 90$ Ом, $L_2 = 36$ мГн.

Указание. Решение будет наиболее простым, если его начать с отыскания тока i_2 в виде $i_2 = i_{2y} + i_{2св}$ (1). Для расчета свободного режима надо найти корни p_1 и p_2 характеристического уравнения $Z(p) = R_1 + pL_1 + pL_2R_3/(pL_2 + R_3) = 0$. Тогда $i_2 = i_{2y} + A_1e^{p_1 t} + A_2e^{p_2 t}$. Затем найти $i_3 = L\frac{di_2}{dt}/R_3$ и $i_1 = i_2 + i_3$ (2). Для определения постоянных интегрирования A_1 и A_2 следует использовать начальные условия: на основании закона коммутации в момент коммутации токи i_1 и i_2 не могут измениться скачком, т. е. $i_1(0_-) = i_1(0_+) = 0$, $i_2(0_-) = i_2(0_+) = 0$, и их подставить в (1) и (2).

6.24. Цепь рис. 6.20 включается на постоянное напряжение $U = 100$ В. Найти выражение для напряжения на конденсаторе C_2, если $C_1 = 100$ мкФ, $C_2 = 20$ мкФ, $R_1 = 10$ Ом, $R_2 = 100$ Ом.

6.25. Индуктивная катушка ($R = 10$ Ом, $L = 364$ мГн) включается в момент $t = 0$ под действием синусоидального напряжения $u = 160 \sin(\omega t + \pi/3)$ В.

Определить значение тока через два периода после момента включения. Частота переменного тока $f = 50$ Гц.

6.26. В схеме рис. 6.21 до замыкания контакта был установившийся режим. Даны: $R_1' = R_1 = 40$ Ом, $R_2 = 32$ Ом, $C = 22{,}5$ мкФ, $f = 100$ Гц, $e = 25\sin\omega t$ В. Найти напряжение на конденсаторе и ток в неразветвленной части цепи после замыкания контакта.

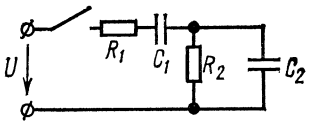


Рис. 6.20

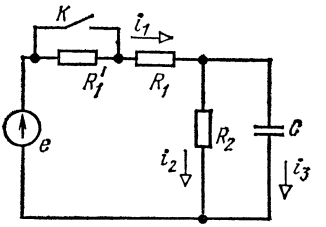


Рис. 6.21

Р е ш е н и е. Вначале вычислим сопротивление конденсатора, необходимое для дальнейших расчетов:

$$X_C = 1/\omega C = 1/(2\pi \cdot 100 \cdot 22{,}5 \cdot 10^{-6}) = 70{,}8 \text{ Ом}.$$

Расчет режима до коммутации. Сначала найдем комплексные амплитуды тока $\underline{I}_{1m}$ и напряжения на конденсаторе $\underline{U}_{Cm}$:

$$\underline{I}_{1m} = \frac{E}{R_1' + R_1 - j\dfrac{X_C R_2}{R_2 - jX_C}} = \frac{25}{80 - j\dfrac{32 \cdot 70{,}8}{32 - j70{,}8}} = 0{,}233e^{j6°25'} \text{ А};$$

$$\underline{U}_{Cm} = \underline{E}_m - \underline{I}_{1m}(R_1' + R_1) = 25 - 0{,}233e^{j6°25'} \cdot 80 = 6{,}77e^{-j17°55'} \text{ В}.$$

Соответствующие мгновенные значения:

$$i_1 = 0{,}233\sin(\omega t + 6°25') \text{ А}, \quad u_C = 6{,}77\sin(\omega t - 17°55') \text{ В}.$$

Расчет комплексных амплитуд тока и напряжения на конденсаторе в установившемся режиме после коммутации:

$$\underline{I}_{1ym} = \frac{\underline{E}_m}{R_1 - j\dfrac{X_C R_2}{R_2 - jX_C}} = 0{,}37e^{j10°15'} \text{ А};$$

$$\underline{U}_{Cym} = \underline{E} - \underline{I}_{1ym}R_1 = 10{,}8e^{-j13°55'} \text{ В}.$$

Соответствующие мгновенные значения:

$$i_1 = 0{,}37\sin(\omega t + 10°15') \text{ А}; \quad u_C = 10{,}8\sin(\omega t - 13°55') \text{ В}.$$

Расчет свободного процесса. Для послекоммутационной схемы наиболее просто составить характеристическое сопротивление отно-

сительно ветви с емкостью. Для нахождения корня приравниваем сопротивление нулю:

$$Z(\bar{p}) = 1/(pC) + R_1R_2/(R_1 + R_2) = 0,$$

отсюда

$$p = p_1 = -\frac{R_1 + R_2}{R_1R_2C} = -\frac{72}{40 \cdot 32 \cdot 22{,}5 \cdot 10^{-6}} = -2500 \text{ с}^{-1}.$$

Свободное напряжение на конденсаторе ищем в виде: $u_{Cсв} = Ae^{p_1t}$.

Расчет переходного процесса после коммутации. Напряжение на конденсаторе находим в виде

$$u_C = u_{Cу} + u_{C\,св} = 10{,}8 \sin(\omega t - 13°55') + Ae^{p_1t}.$$

Постоянную интегрирования A находим из начального условия, согласно второму закону коммутации

$$u_C(0_-) = u_C(0_+), \text{ или } -6{,}77 \sin 17°55' = -10 \sin 13°55' + A,$$

отсюда $A = 0{,}5$.

Итак, напряжение на конденсаторе

$$u_C = 10{,}8 \sin(\omega t - 13°55') + 0{,}5e^{-2500t} \text{ В}.$$

Находим ток в неразветвленной части цепи:

$$i_1 = i_2 + i_3,$$

где

$$i_2 = u_C/R_2, \quad i_3 = C\frac{du_C}{dt}.$$

6.27. К цепи рис. 6.22 подключается напряжение $u = U_m \sin(\omega t + \psi)$. Включение происходит в момент, когда приложенное напряжение имеет положительный максимум. Найти закон изменения напряжения между обкладками конденсатора, если $U_m = 65$ мВ, $R_1 = 12$ Ом, $R_2 = 3$ Ом, $1/(\omega C) = 1$ Ом и $\omega = 2 \cdot 10^5$ с$^{-1}$.

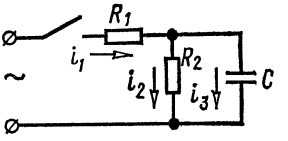


Рис. 6.22

Б. Расчет цепей, содержащих элементы R, L, C

6.28. Конденсатор емкостью $C = 50$ мкФ, заряженный предварительно до напряжения $U = 500$ В, разряжается через цепь, активное сопротивление которой $R = 100$ Ом и индуктивность $L = 10$ мГн. Определить, через какой промежуток времени, считая от начального момента разряда, ток в цепи достигнет максимального значения и какова величина последнего. Вычислить, в какой момент времени в индуктивной катушке наведется максимальная э. д.с.; найти ее величину.

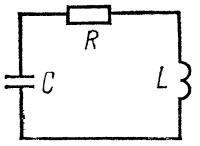


Рис. 6.23

6.29. Подсчитать частоту ω_1 собственных колебаний и частоту ω_0 свободных колебаний контура, изображенного на рис. 6.23, если $L = 25$ мГн, $C = 2500$ пФ и $R = 4000$ Ом.

6.30. Сколько потребуется периодов колебаний, чтобы в контуре, имеющем логарифмический декремент затухания $\Theta = 0{,}02$, амплитуда тока уменьшилась до 1% от своей первоначальной величины?

6.31. Цепь рис. 6.24, *а* включается на постоянное напряжение $U = 125$ В.

Найти выражение напряжения на конденсаторе для трех случаев: 1) $R = 250$ Ом, $L = 667$ мГн, $C = 2$ мкФ, 2) $R = 100$ Ом, $L = 40$ мГн, $C = 1$ мкФ; 3) $R = 100$ Ом, $L = 40$ мГн, $C = 5$ мкФ.

Р е ш е н и е. Наметим план решения задачи. Напряжение на конденсаторе находим в виде суммы устанавившегося и свободного значений:

$$u_C = u_{C\,\text{у}} + u_{C\,\text{св}}. \qquad (1)$$

Установившееся значение напряжения на конденсаторе равно ну-

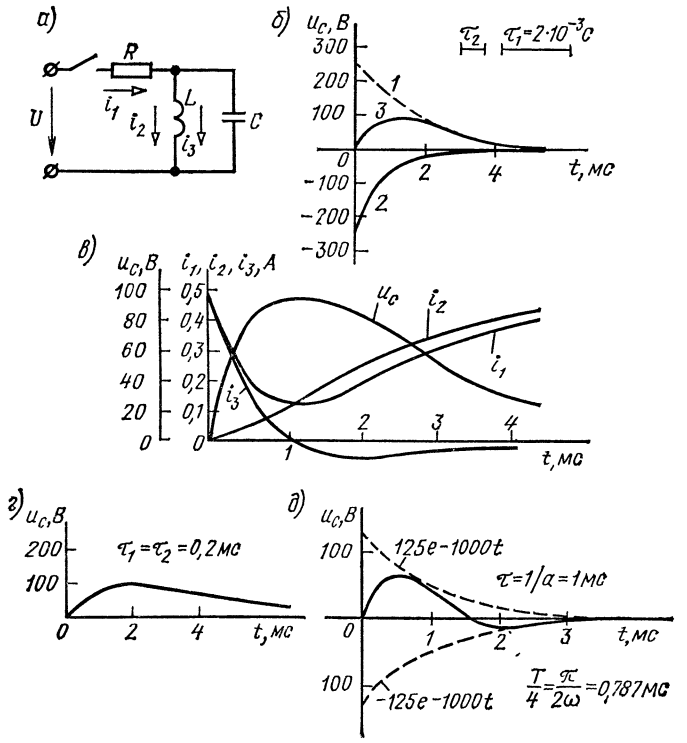


Рис. 6.24

лю ($u_{Cy} = 0$), так как при установившемся режиме конденсатор шунтирован индуктивностью катушки накоротко.

Для нахождения вида решения свободной составляющей составим характеристическое входное сопротивление цепи и приравняем его нулю:

$$Z(p) = R + \frac{pL\,\frac{1}{RC}}{pL + \frac{1}{pC}} = \frac{RLCp^2 + Lp + R}{p^2LC + 1} = 0. \qquad (2)$$

Это уравнение второго порядка и, следовательно, оно имеет два корня:

$$p_{1,2} = -\frac{1}{2RC} \pm \sqrt{\frac{1}{4R^2C^2} - \frac{1}{LC}}\,. \qquad (3)$$

Для каждого из трех заданных случаев по уравнению (3) определим вид корней (действительные разные, действительные кратные или комплексно-сопряженные) и в соответствии с ним находим свободное решение $u_{Cсв}$ по одной из формул, указанной в п. 4 основных положений. Заметим, что свободная составляющая напряжения на конденсаторе содержит две постоянные интегрирования.

Для определения постоянных интегрирования поступим так. Составим уравнения по законам Кирхгофа

$$\begin{aligned} i_1 &= i_2 + i_3, \\ U &= R_1 i_1 + u_C. \end{aligned} \qquad (4)$$

Запишем независимые начальные условия

$$u_C(0_-) = u_C(0_+) = 0, \quad \text{(I)} \quad i_2(0_-) = i_2(0_+) = 0. \qquad \text{(II)}$$

Подставим их в уравнения (4) для начального момента времени (после коммутации):

$$i_1(0_+) = i_2(0_+) + i_3(0)_+, \quad U = Ri_1(0_+) + u_C(0_+). \qquad (5)$$

Решив их, находим $i_3(0_+)$. Затем, используя зависимость $i_3 = C\frac{du_C}{dt}$ для момента $t = 0_+$, получим

$$i_3(0_+) = C\left.\frac{du_C}{dt}\right|_{t=0_+}. \qquad (6)$$

Наконец, определим две неизвестные постоянные интегрирования из уравнения (1), в которое подставляем найденные u_{Cy} и $u_{Cсв}$, и из уравнения (6).

Конкретное применение указанной методики расчета рассмотрим для каждого из трех заданных случаев.

1. Подставим в уравнение (3) числовые значения первого случая

$$p_{1,2} = -\frac{1}{2 \cdot 250 \cdot 2 \cdot 10^{-6}} \pm$$

$$\pm \sqrt{\left(\frac{1}{2 \cdot 250 \cdot 2 \cdot 10^{-6}}\right)^2 - \frac{1}{667 \cdot 10^{-3} \cdot 2 \cdot 10^{-6}}} = (-1000 \pm 500)\ \text{с}^{-1},$$

т. е.

$$p_1 = -500\ \text{с}^{-1}; \quad p_2 = -1500\ \text{с}^{-1}.$$

Получены корни действительные и различные, следовательно, свободная составляющая напряжения на конденсаторе

$$u_{C\,\text{св}} = A_1 e^{-500t} + A_2 e^{-1500t}. \qquad (7)$$

Далее из уравнений (5) с учетом начальных условий (I) и (II) получим

$$i_1(0_+) = i_2(0_+) + i_3(0_+) = 0 + i_3(0_+); \quad U = Ri_1(0_+) + u_C(0_+) =$$
$$= 250i(0_+) + 0 = 125.$$

Решая эту систему уравнений, находим $i_3(0_+) = 0{,}5$ А. Подставив в равенство (1) и в выражение тока i_3 уравнение (7), получим

$$u_C = u_{C\text{у}} + u_{C\,\text{св}} = 0 + A_1 e^{-500t} + A_2 e^{-1500t};$$

$$i_3 = C\frac{du_C}{dt} = 2 \cdot 10^{-6}\left(-500 A_1 e^{-500t} - 1500 A_2 e^{-1500t}\right).$$

Перепишем эти уравнения для момента $t = 0_+$ и затем, подставляя в них $u_C(0_+) = 0$ и $i_3(0_+) = 0{,}5$ А, получим

$$0 = A_1 + A_2; \quad 0{,}5 = -10^{-3}A_1 - 3 \cdot 10^{-3} A_2.$$

Отсюда $A_1 = A_2 = 250$. Таким образом, согласно (1) и (7) искомое напряжение

$$u_C = u_{C\,\text{св}} = \left(250e^{-500t} - 250e^{-1500t}\right)\text{В}.$$

Графики отдельных составляющих решения и суммарного значения напряжения на конденсаторе построены на рис. 6.24, *б*: на нем кривая

$$1 - 250e^{-500t}; \quad 2 - 250e^{-1500t}; \quad 3 - u_C(t) = u_{C\,\text{св}}(t).$$

Для упражнения вычислим также все токи и построим их графики:

$$i_3 = C\frac{du_C}{dt} = 2 \cdot 10^{-6}\frac{d}{dt}\left(250e^{-500t} - 250e^{-1500t}\right) =$$

$$= \left(0{,}75e^{-1500t} - 0{,}25e^{-500t}\right)\text{А};$$

$$i_1 = \frac{U - u_C}{R} = \frac{125 - \left(250e^{-500t} - 250e^{-1500t}\right)}{250} =$$

$$= (0{,}5 - e^{-500t} + e^{-1500t})\ \text{А};$$

$$i_2 = i_1 - i_3 = (0{,}5 - 0{,}75e^{-500t} + 0{,}25e^{-1500t})\ \text{А}.$$

Графики токов и напряжения даны на рис. 6.24, *в*.

2. Подставим в формулу (3) числовые значения второго случая:

$$p_{1,2} = -\sqrt{\frac{1}{2 \cdot 100 \cdot 1 \cdot 10^{-6}}} \pm$$

$$\pm \sqrt{\left(\frac{1}{2 \cdot 100 \cdot 1 \cdot 10^{-6}}\right)^2 - \frac{1}{40 \cdot 10^{-3} \cdot 1 \cdot 10^{-6}}} = -5 \cdot 10^3\ \text{с}^{-1}.$$

Корень — двукратный, следовательно, решение ищем в виде (см. п. 4 основных положений)

$$u_{C\,\text{св}} = B_1 e^{-5000t} + B_2 t e^{-5000t}. \qquad (8)$$

Далее, как и в первом случае, из уравнений (5) с учетом начальных условий (I) и (II) найдем $i_3(0_+) = 1{,}25$ А.

Подставив в уравнение (1) и в выражение i_3 уравнение (8), получим

$$u_C = u_{C\text{у}} + u_{C\,\text{св}} = 0 + B_1 e^{-5000t} + B_2 t e^{-5000t};$$

$$i_3 = C\frac{du_C}{dt} = 10^{-6}(B_2 - 5000B_1 - 5000B_2 t)\, e^{-5000t}.$$

Переписывая эти уравнения для момента $t = 0_+$ и подставляя в них $u_C(0_+) = 0$ и $i_3(0_+) = 1{,}25$ А, получим

$$0 = B_1;\quad 1{,}25 = 10^{-6}(B_2 - 5000B_1).$$

Следовательно, $B_1 = 0$, $B_2 = 1{,}25 \cdot 10^6$. Таким образом, искомое напряжение согласно (1) и (8)

$$u_C = u_{C\,\text{св}} = 1{,}25 \cdot 10^6 t e^{-5000t}\ \text{В}.$$

График напряжения u_C построен на рис. 6.24, *г*.

3. Наконец, рассмотрим третий случай числовых значений параметров схемы рис. 6.24, *а*.

Подставляя эти значения в уравнение (3), находим

$$p_{1,2} = \frac{1}{2 \cdot 100 \cdot 5 \cdot 10^{-6}} \pm \sqrt{\left(\frac{1}{2 \cdot 100 \cdot 5 \cdot 10^{-6}}\right)^2 - \frac{1}{40 \cdot 10^{-3} \cdot 5 \cdot 10^{-6}}} =$$

$$= (-1000 \pm j2000)\ \text{с}^{-1}.$$

Корни характеристического уравнения образуют комплексно-сопряженную пару чисел ($p_{1,2} = -\delta \pm j\omega$), следовательно, свободную составляющую напряжения на конденсаторе следует искать в виде (см. п. 4 основных положений)

$$u_{C\,\text{св}} = Ae^{-\delta t}\sin(\omega t + \psi) = Ae^{-1000t}\sin(2000t + \psi). \qquad (9)$$

По аналогии с предыдущими случаями из уравнений (5) с учетом начальных условий (I) и (II) получим $i_3(0_+) = 1{,}25$ А.

Подставив в (1) и в выражение i_3 уравнение (9), получим

$$u_C = u_{C\text{у}} + u_{C\text{ св}} = 0 + Ae^{-1000t}\sin(2000t + \psi);$$

$$i_3 = C\frac{du_C}{dt} = 5 \cdot 10^{-6}\, A\,[2000\cos(2000t + \psi) -$$

$$- 1000\sin(2000t + \psi)]\, e^{-1000t}.$$

Переписывая эти уравнения для момента $t = 0_+$ и подставляя в них $u_C(0_+) = 0$ и $i_3(0_+) = 1{,}25$ А, имеем:

$$0 = 5 \cdot 10^{-6}\, A\sin\psi; \quad 1{,}25 = 5 \cdot 10^{-6}(2000\, A\cos\psi - 1000A\sin\psi).$$

Решая их, находим $\psi = 0$, $A = 125$. Таким образом, согласно (1) и (9) искомое напряжение

$$u_C = 125e^{-1000t}\sin 2000t \text{ В}.$$

График напряжения построен на рис. 6.24, *д*.

6.32. Цепь рис. 6.25 включается на постоянное напряжение $U = 30$ В. Найти выражения всех токов и напряжения на конденсаторе, если $C = 16$ мкФ, $R = 100$ Ом и $L = 1$ Гн. Построить кривые токов и напряжения на конденсаторе. Выяснить предельное значение сопротивления, при котором процесс сохраняет еще колебательный характер.

6.33. Цепь рис. 6.26 включается на постоянное напряжение $U = 120$ В. Ее элементы $R_1 = R_2 = R = 40$ Ом, $L = 0{,}08$ Гн. Показать, что если $C = L/R^2$, то ток i в неразветвленной части цепи в любой момент времени имеет постоянное значение, равное U/R.

Замечание. При заданном выборе параметров данная цепь имеет резонанс токов при любой частоте.

6.34. Схема рис. 6.26 включается под действием э. д. с. $e = E_m\sin(\omega t + \psi)$. Полагая, что $R_1 = R_2 = R = 40$ Ом, $L = 0{,}8$ Гн, $C = L/R^2$, $E = 120$ В, $\omega = 314$ с$^{-1}$ и $\psi = \pi/6$, найти все токи.

6.35. Цепь, состоящая из последовательно соединенных R, L и C, конденсатор которой закорочен, включена на постоянное напряжение $U = 120$ В. При установившемся режиме внезапным размыканием контакта K конденсатор вводится в цепь (рис. 6.27). Найти

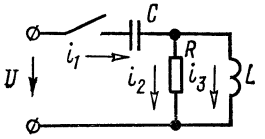


Рис. 6.25

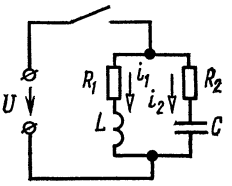


Рис. 6.26

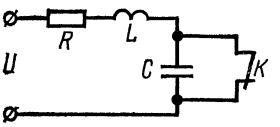


Рис. 6.27

напряжение на обкладках конденсатора и ток в двух случаях: 1) $R = 100$ Ом, $L = 40$ мГн, $C = 25$ мкФ; 2) $R = 80$ Ом, $L = 40$ мГн, $C = 20$ мкФ. Начертить кривые u_C и i.

6.36. До замыкания контакта K в цепи (рис. 6.28, *а*) имел место установившийся режим постоянного тока. Конденсатор разряжен. В момент $t = 0$ контакт K замыкается. Определить начальные значе-

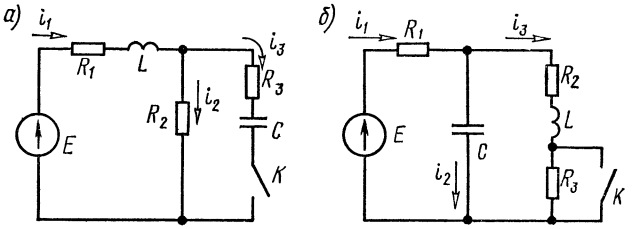


Рис. 6.28

ния тока в индуктивной катушке, напряжения на конденсаторе и их первые производные. Найти ток i_2 и напряжение на конденсаторе после коммутации. Даны: $E = 60$ В, $R_1 = 20$ Ом, $L = 1$ мГн, $R_2 = 10$ Ом, $R_3 = 20$ Ом, $C = 1$ мкФ.

6.37. В цепи рис. 6.28, *б* до замыкания контакта K был установившийся режим постоянного тока. Найти выражение напряжения на конденсаторе после замыкания контакта, если $E = 60$ В, $R_1 = 20$ Ом, $R_2 = 40$ Ом, $R_3 = 40$ Ом, $L = 0{,}2$ мГн и $C = 1$ мкФ.

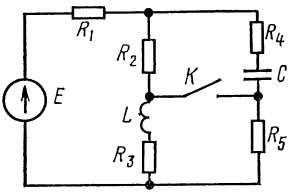


Рис. 6.29

6.38. До замыкания контакта K в цепи рис. 6.29 имел место установившийся режим постоянного тока. Определить: 1) напряжение на R_2, на L и на C для $t = 0_+$ и $t = \infty$; 2) первые производные напряжений на R_2, на L и на C по времени для $t = 0_+$. Даны: $C = 1$ мкФ, $L = 10$ мГн, $R_1 = R_2 = R_4 = 100$ Ом, $R_3 = R_5 = 200$ Ом и $E = 120$ В.

6.39. Для каждой из схем рис. 6.30, *а — в* (не составляя уравнений) определить степень n характеристического уравнения, описывающего свободный процесс после соответствующей коммутации. Дополнительные условия: для схемы рис. 6.30, *в*: $R_2 = 2R_1$, $L_2 = 2L_1$.

Р е ш е н и е. Как известно из теории, степень характеристического уравнения, описывающего переходные процессы, равна числу независимых начальных условий в послекоммутационной схеме цепи.

Рассмотрим схему рис. 6.30, *а*. Она содержит пять реактивных элементов, которые определяют четыре начальных значения тока, протекающих через индуктивные катушки, и одно начальное значение напряжения на конденсаторе. Однако не все эти пять начальных значений являются независимыми. Определим число основных независимых начальных условий. Так, например, если в качестве основных неза-

висимых начальных условий принять значения токов, протекающих через L_2 и L_4, то ток через L_3 будет не основным, ибо его начальное значение определяется первым законом Кирхгофа, примененным к узлу A. Таким образом, схема рис. 6.30, *а* содержит четыре независимых начальных условия, а следовательно, характеристическое уравнение будет иметь порядок $n = 4$.

В схеме рис. 6.30, *б* пять реактивных элементов, однако число независимых начальных условий равно 3. В самом деле, если, например, в качестве основных принять начальные значения напряжений на конденсаторах C_1 и C_3, то из второго закона Кирхгофа, примененного к контуру, состоящему из C_1, C_3, C_4, напряжение на конденсаторе C_4 будет их следствием. Аналогично из рассмотрения уравнения

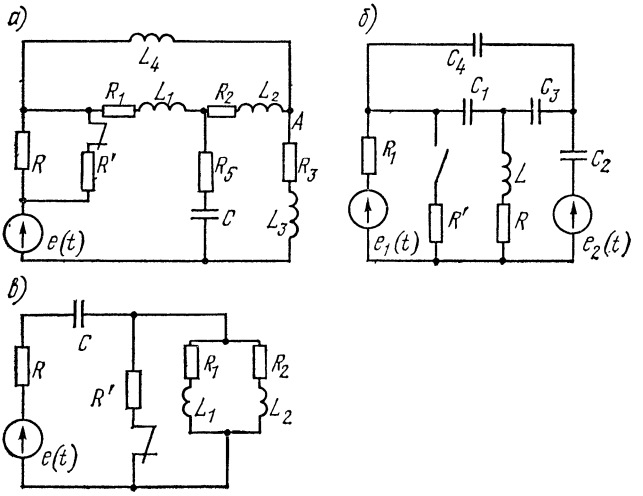


Рис. 6.30

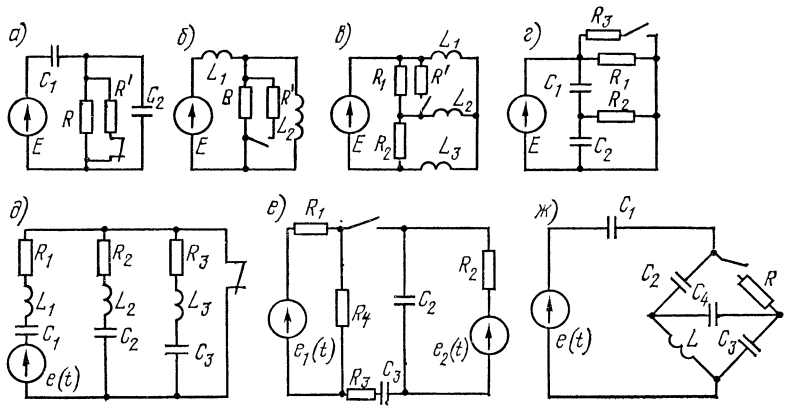


Рис. 6.31

Кирхгофа, составленного для контура $C_4C_2R_1$, можно установить, что напряжение на конденсаторе C_2 не будет являться независимым условием. Итак, $n = 3$.

В схеме рис. 6.30, *в* три реактивных элемента, но число основных независимых условий равно двум. Это определяется подобием параллельных ветвей ($R_1/L_1 = R_2/L_2$), эквивалентное сопротивление которых будет иметь не второй, а первый порядок, а поэтому характеристическое сопротивление всей схемы будет иметь второй порядок ($n = 2$).

6.40. Определить степень n характеристического уравнения, описывающего свободный процесс в каждой из схем цепей рис. 6.31, *а* — *ж*, рассматриваемой после коммутации.

Указание. Учесть, что степень характеристического уравнения определяется из рассмотрения послекоммутационной схемы, в которой э. д. с. закорочены, а ветви с источниками тока разомкнуты.

В. Переходные процессы при импульсных воздействиях

6.41. Цепь, состоящая из последовательно соединенных $R = 5$ Ом и $L = 2{,}5$ Гн, включается под действие напряжения $u = U_0e^{-at}$ ($U_0 = 10$ В, $a = 4$ с$^{-1}$). Найти ток в цепи и построить его кривую.

Р е ш е н и е. Составляем дифференциальное уравнение по второму закону Кирхгофа:

$$L\frac{di}{dt} + Ri = Ue^{-at}. \tag{1}$$

Решение его

$$i = i_{пр} + i_{св}, \tag{2}$$

где $i_{св} = Ae^{-\frac{R}{L}t}$ — общий интеграл уравнения (1) без правой части; $i_{пр}$ — частное решение уравнения (1).

Найдем $i_{пр}$. Как известно из курса математики, частное решение рассматриваемого линейного дифференциального уравнения определяется в форме показательной функции

$$i_{пр} = Be^{-at}. \tag{3}$$

Подставляя это значение в (1), получим

$$BLae^{-at} + BRe^{-at} = U_0e^{-at},$$

откуда

$$B = U_0/(R - La).$$

Подставляя значение B в (3), получим

$$i_{пр} = U_0/(R - La)\, e^{-at}. \tag{4}$$

Переходный ток [см. формулу (2)]

$$i = Ae^{-\frac{R}{L}t} + \frac{U_0}{R - La}e^{-at}. \tag{5}$$

Для определения постоянной интегрирования A используем начальное условие $i(0_-) = i(0_+) = 0$:

$$i(0_+) = \left| Ae^{-\frac{R}{L}t} + \frac{U_0}{R - La} e^{-at} \right|_{t=0_+} = A + \frac{U_0}{R - La} = 0,$$

отсюда

$$A = -U_0/(R - La).$$

Таким образом,

$$i = \frac{U_0}{R - La}\left(e^{-at} - e^{-\frac{R}{L}t}\right) = 2\left(e^{-2t} - e^{-4t}\right) \text{ А}. \qquad (6)$$

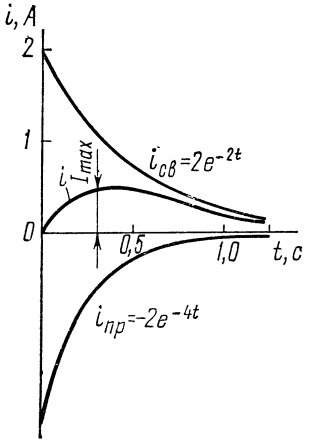


Рис. 6.32

Кривая тока изображена на рис. 6.32. Ток имеет максимум. Найдем его:

$$\frac{di}{dt} = 2\left(-2e^{-2t} + 4e^{-4t}\right).$$

Приравнивая эту производную нулю, получим момент времени $t = t_m$, при котором величина тока максимальна:

$$e^{-2t_m} = 2e^{-4t_m},$$

отсюда

$$t_m = \ln 2/2 = 0{,}693/2 = 0{,}347 \text{ с}.$$

Подставив это значение в формулу (6), найдем

$$I_{max} = 2\left(e^{-0{,}693} - e^{-1{,}386}\right) = 0{,}5 \text{ А}.$$

6.42. Цепь, состоящая из последовательно соединенных R и L, включается на прямоугольный импульс напряжения U, действующий в течение времени $t_и$ (рис. 6.33, *а*). Найти выражение тока i и напряжение на индуктивной катушке u_L в зависимости от времени. Построить кривые i и u_L.

Р е ш е н и е. а. *Классический способ.* Для интервала времени от $t = 0$ до $t = t_и$ ток определяется так же, как и при включении той же цепи на постоянное напряжение U:

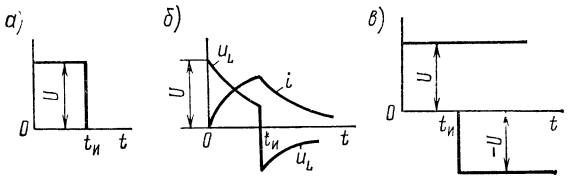


Рис. 6.33

$$i = \frac{U}{R}\left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right). \qquad (1)$$

Напряжение на индуктивной катушке

$$u_L = L\frac{di}{dt} = Ue^{-\frac{R}{L}t}. \qquad (2)$$

При $t > t_1$ воздействие на цепь отсутствует, поэтому ток содержит только свободную составляющую. Она определяется энергией, накопленной в магнитном поле за время от 0 до $t_и$. Итак, для $t > t_и$, когда $u = 0$, уравнение второго закона Кирхгофа

$$Ri + L\frac{di}{dt} = 0.$$

Его решение

$$i = Ae^{-\frac{R}{L}t}. \qquad (3)$$

Постоянную интегрирования A определим из того, что в момент $t = t_и$ ток в цепи, содержащей индуктивную катушку, не может измениться скачкообразно:

$$i\Big|_{t=t_и} = \frac{U}{R}\left(1 - e^{-\frac{R}{L}t_и}\right) = Ae^{-\frac{R}{L}t_и},$$

отсюда

$$A = \frac{U}{R}\left(e^{\frac{R}{L}t_и} - 1\right).$$

Подставляя значение A в уравнение (3), получим выражение тока при $t_и \leqslant t \leqslant \infty$:

$$i = \frac{U}{R}\left(e^{\frac{R}{L}t_и} - 1\right)e^{-\frac{R}{L}t}.$$

Выражение для напряжения на индуктивной катушке при $t_и \leqslant t \leqslant \infty$

$$u_L = L\frac{di}{dt} = U\left(1 - e^{\frac{R}{L}t_и}\right)e^{-\frac{R}{L}t} \qquad (4)$$

По уравнениям (1) — (4) на рис. 6.33, *б* построены графики. Отметим, что в момент $t = 0_+$ напряжение на индуктивной катушке изменяется скачком на величину, равную U. Скачок напряжения на индуктивности имеет место и при $t = t_и$.

б. *Метод наложения.* Прямоугольный импульс может быть рассмотрен как результат действия двух постоянных напряжений: на-

пряжения U, включаемого в момент $t = 0$ и действующего неограниченно долго, и отрицательного напряжения, равного $-U$, вступающего в действие в момент $t = t_и$ и также действующего неограниченно долго (рис. 6.33, *в*).

Итак, для $0 \leqslant t \leqslant t_и$ ток определяется, как и раньше, по формуле (1).

Для $t_и \leqslant t \leqslant \infty$

$$i = i_1 + i_2 = \frac{U}{R}\left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right) + \frac{-U}{R}\left(1 - e^{-\frac{R}{L}(t-t_и)}\right) =$$

$$= \frac{U}{R}\left(e^{\frac{R}{L}t_и} - 1\right)e^{-\frac{R}{L}t}.$$

Г. Решение задач с «некорректно» поставленными начальными условиями*

6.43. В схеме рис. 6.34 найти закон изменения тока источника э. д. с. при замыкании контакта. Даны: $E = 60$ В, $R_1 = R_2 = 1$ кОм, $C_1 = 1$ мкФ и $C_2 = 2$ мкФ.

Р е ш е н и е. Контур, образованный конденсаторами, емкости которых C_1 и C_2, не содержит активных сопротивлений и индуктивностей. Поэтому напряжение конденсаторов может изменяться скачком за счет мгновенного переброса заряда в этом контуре. До коммутации заряжен только конденсатор C_1 до напряжения $U_{C1}(0_-) = E = 60$ В. Заряд его $q_1(0_-) = C_1 u_{C1}(0_-) = 6 \cdot 10^{-5}$ Кл в начальный момент после коммутации перераспределится между конденсаторами так, что будет выполняться второй закон Кирхгофа

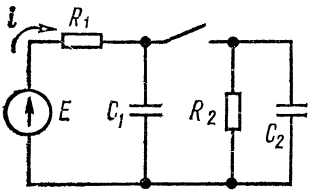


Рис. 6.34

$$u_{C1}(0_+) = u_{C2}(0_+). \qquad (1)$$

При этом суммарный заряд на конденсаторах в начальный момент не изменится:

$$C_1 u_{C1}(0_+) + C_2 u_{C2}(0_+) = 6 \cdot 10^{-5} \text{ Кл}. \qquad (2)$$

Подставляя численные значения и решая уравнения (1)—(2), находим начальные значения напряжений на конденсаторах

$$u_{C1}(0_+) = u_{C2}(0_+) = 20 \text{ В}. \qquad (3)$$

Ток источника э. д. с. находим в виде наложения установившейся и свободной составляющих

---

* При решении задач такого типа можно пользоваться обобщенными законами коммутации: 1) законом сохранения заряда $q(0_+) = q(0_-)$ и 2) законом сохранения потокосцепления $\Psi(0_+) = \Psi(0_-)$.

$$i = i_{\text{у}} + i_{\text{св}}. \tag{4}$$

Установившееся значение тока в схеме после коммутации

$$i_{\text{у}} = E/(R_1 + R_2) = 60/(2 \cdot 10^3) = 3 \cdot 10^{-2} \text{ А}. \tag{5}$$

Для нахождения свободной составляющей тока напишем характеристическое уравнение, приравнивая нулю характеристическое входное сопротивление схемы цепи:

$$Z(p) = R_1 + 1 \Big/ \left(pC_1 + pC_2 + \frac{1}{R_2}\right) = 0.$$

Это уравнение преобразуем к виду

$$p(C_1 + C_2) + 1/R_2 + 1/R_1 = 0.$$

Единственный корень характеристического уравнения

$$p_1 = -\frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2 (C_1 + C_2)} = -\frac{2 \cdot 10^3}{10^6 \cdot 3 \cdot 10^{-6}} = -6{,}67 \cdot 10^2 \text{ с}^{-1}.$$

Следовательно,

$$i_{\text{св}} = Ae^{-6{,}67 \cdot 10^2 t}. \tag{6}$$

Для вычисления постоянной интегрирования запишем для начального момента времени

$$i(0_+) = i_{\text{у}}(0_+) + i_{\text{св}}(0_+) = 3 \cdot 10^{-2} + A. \tag{7}$$

Начальное значение тока находим по второму закону Кирхгофа:

$$E = Ri(0_+) + u_{C1}(0_+) = i(0_+) \cdot 10^3 + 20 = 60, \tag{8}$$

откуда

$$i(0_+) = (60 - 20)/10^3 = 4 \cdot 10^{-2} \text{ А}. \tag{9}$$

Подставляя найденное начальное значение в формулу (7), определяем значение $A = 10^{-2}$ и, следовательно, искомое значение тока [см. формулу (4)] источника э. д. с. после коммутации

$$i = (3 \cdot 10^{-2} + 10^{-2} e^{-6{,}67 \cdot 10^2 t}) \text{ А}. \tag{10}$$

6.44. Вычислить начальные значения напряжения на конденсаторе до и после коммутации в схеме рис. 6.35. Даны: $E_1 = 120$ В, $E_2 = 100$ В, $R_1 = 20$ Ом и $R_2 = 80$ Ом.

6.45. Определить начальное значение тока во вторичной обмотке трансформатора (рис. 6.36) после мгновенного выключения цепи первичной обмотки. Даны: $E = 100$ В, $R_1 = 10$ Ом, $R_2 = 2$ Ом, $L_1 = L_2 = 0{,}02$ Гн и $M = 0{,}01$ Гн.

Р е ш е н и е. Схема содержит идеальный выключатель, на зажимах которого в процессе выключения может наводиться произвольно большое напряжение. Следовательно, возможны скачки тока в индуктивных катушках.

До коммутации токи цепи

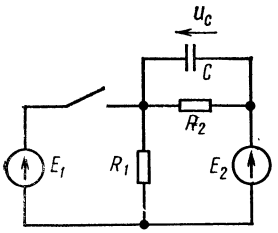


Рис. 6.35

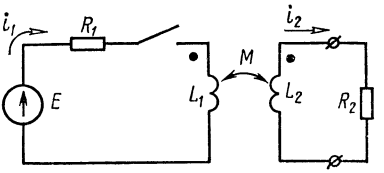


Рис. 6.36

$$i_1 = E/R_1 = 10 \text{ А}, \quad i_2 = 0.$$

После коммутации

$$i_1(0_+) = 0,$$

т. е. скачок тока в первичной обмотке

$$\Delta i_1(0_+) = -10 \text{ А}.$$

Для нахождения начального значения тока $i_2(0_+)$ после коммутации используем уравнение второго закона Кирхгофа для контура вторичной обмотки в момент коммутации (ограничиваемся бесконечными слагаемыми и пренебрежем конечной величиной i_2R_2):

$$-M\frac{di_1}{dt} + L\frac{di_2}{dt} = 0$$

и проинтегрируем его по «времени начального скачка»:

$$-M\int\limits_{t=0_-}^{t=0_+}\frac{di_1}{dt}\,dt + L\int\limits_{t=0_-}^{t=0_+}\frac{di_2}{dt}\,dt = -M\int\limits_{t=0_-}^{t=0_+}di_1 + L\int\limits_{t=0_-}^{t=0_+}di_2 = 0,$$

т. е.

$$-M\Delta i_1 + L\Delta i_2 = 0.$$

Из последнего уравнения определим искомое начальное значение тока во вторичной обмотке трансформатора:

$$i_2(0_+) = \Delta i_2 = M\Delta i_1/L = -5 \text{ А}.$$

6.46. Рассчитать ток источника э. д. с. схемы цепи (рис. 6.37) до переключения контакта K и в начальный момент после мгновенного переключения его из положения *1* в положение *2*. Даны: $E = 100$ В, $L_1 = 1$ мГн, $L_2 = L_3 = 3$ мГн и $R_2 = R_3 = 10$ Ом.

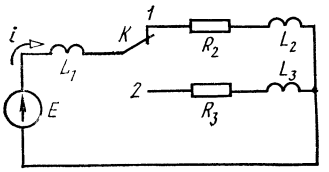


Рис. 6.37

6.47. В цепи рис. 6.38 действует источник ступенчатого тока $i_1(t) = 0$ при $t < 0$, $i_1(t) = J_1$ при $t \geqslant 0$. Рассчитать все токи в переходном режиме.

Р е ш е н и е. Определяем ток в ин-

дуктивной катушке в виде наложения принужденного и свободного токов:

$$i = i_{\text{пр}} + i_{\text{св}}.$$

В установившемся режиме $u_{ab\text{пр}} = 0$ ток $i_{\text{пр}} = J_1$. Форма свободного тока определяется видом корней характеристического уравне-

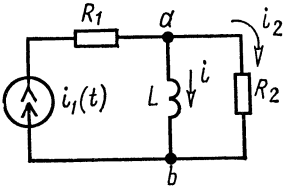


Рис. 6.38

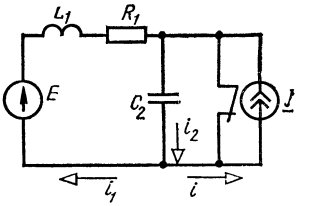


Рис. 6.39

ния, которое составляем, приравнивая нулю входное операторное сопротивление относительно ветви с индуктивностью:

$$pL + R_2 = 0.$$

Здесь учтено, что входное сопротивление источника тока равно бесконечности. Единственному корню характеристического уравнения $p = -R_2/L$ соответствует свободный ток $i_{\text{св}} = Ae^{-\frac{R_2 t}{L}}$ с постоянной интегрирования $A = -J_1$. При этом удовлетворяется начальное значение тока в индуктивной катушке $i(0_+) = i(0_-) = 0$. Окончательно при $t \geqslant 0$ ток индуктивности

$$i = J_1\left(1 - e^{-\frac{R_2}{L}t}\right).$$

Напряжение

$$u_{ab} = L\frac{di}{dt} = J_1 R_2 e^{-\frac{R_2}{L}t},$$

ток

$$i_2 = u_{ab}/R_2 = J_1 e^{-\frac{R_2}{L}t}.$$

6.48. В цепи рис. 6.39 действует источник постоянной э. д. с. $E = 20$ В и источник постоянного тока $J = 0{,}1$ А. Включение источника тока на схеме соответствует размыканию контакта. Параметры цепи: $R_1 = 0{,}5$ кОм, $L = 1$ мГн, $C_2 = 0{,}02$ мкФ. Рассчитать переходное напряжение на конденсаторе.

6.49. Записать с помощью единичной функции напряжения $u(t)$, показанные на рис. 6.40, *а* и *б*.

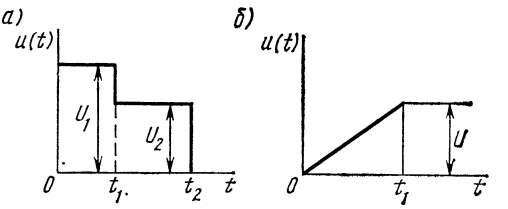


Рис. 6.40

ГЛАВА СЕДЬМАЯ

ОПЕРАТОРНЫЙ МЕТОД РАСЧЕТА ПЕРЕХОДНЫХ ПРОЦЕССОВ В ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЯХ С СОСРЕДОТОЧЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

ОСНОВНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ И СООТНОШЕНИЯ

1. Преобразование Лапласа. В основу операторного метода положено следующее. Функция $f(t)$ [обычно ток $i(t)$ или напряжение $u(t)$] вещественного переменного t (времени), называемая оригиналом, заменяется соответствующей ей функцией $F(\overline{p})$ комплексного переменного p, называемой изображением.

Эти функции связаны соотношением

$$F(\overline{p}) = \int_0^\infty f(t)\, e^{-pt}\, dt, \tag{7.1}$$

называемым прямым преобразованием Лапласа.

Эту связь сокращенно записывают в виде

$$F(\overline{p}) \doteqdot f(t).$$

В табл. 7.1 приводятся оригиналы простейших функций и их изображения, полученные по формуле (7.1) и используемые при решении задач на переходные процессы.

2. Операторное сопротивление. Операторные сопротивления цепей записывают так же, как и сопротивления для тех же цепей в комплексной форме, в которых $j\omega$ заменено на p. Так, для цепи, состоящей из последовательно соединенных элементов R, L и C, операторное сопротивление имеет вид

$$Z(\overline{p}) = R + pL + 1/(pC). \tag{7.2}$$

3. Операторная схема замещения. Уравнения для изображений тока и напряжения произвольной цепи могут быть получены по законам электрических цепей (Ома и Кирхгофа), записанным для операторных схем замещения. Операторная схема замещения произвольной ветви (рис. 7.1, *а*) показана на рис. 7.1, *б*. При ее составлении, во-первых, все переменные величины заменяются их операторными изображениями [$i(t)$ на $I(\overline{p})$, $u(t)$ и $e(t)$ соответственно на $U(\overline{p})$ и $E(\overline{p})$]; во-вторых, индуктивности L заменяются последовательными схемами, состоящими из операторного сопротивления pL и источника напряжения с э. д. с. $Li(0_-)$, где $i(0_-)$ — начальное значение тока в индуктивности; в-третьих, емкости C заменяются последовательными схемами, состоящими из операторного сопротивления $1/pC$ и источ-

Таблица 7.1

№ п.п.	Оригинал*	Изображение	№ п.п.	Оригинал	Изображение
1	$\delta(t)$	1	13	$\frac{1}{a-b}(e^{-bt}-e^{-at})$	$\frac{1}{(p+a)(p+b)}$
2	1	$1/p$			
3	t	$1/p^2$	14	$\frac{ae^{-at}-be^{-bt}}{a-b}$	$\frac{p}{(p+a)(p+b)}$
4	t^n n — целое положительное число	$\frac{n!}{p^{n+1}}$	15	$\cos\omega_0 t$	$\frac{p}{p^2+\omega_0^2}$
5	$e^{\mp at}$	$\frac{1}{p\mp a}$	16	$\sin\omega_0 t$	$\frac{\omega_0}{p^2+\omega_0^2}$
6	$\delta(t)-a^{-at}$	$\frac{p}{p+a}$	17	$\sin(\omega_0 t+\psi)$	$\frac{p\sin\psi+\omega_0\cos\psi}{p^2+\omega_0^2}$
7	$e^{\mp j\omega_0 t}$	$\frac{1}{p\mp j\omega_0}$	18	$e^{-at}\sin\omega_0 t$	$\frac{\omega_0}{(p+a)^2+\omega_0^2}$
8	$e^{j(\omega_0 t+\psi)}$	$\frac{e^{j\psi}}{p-j\omega_0}$	19	$e^{-at}\cos\omega_0 t$	$\frac{p+a}{(p+a)^2+\omega_0^2}$
9	te^{-at}	$\frac{1}{(p+a)^2}$	20	$\operatorname{sh} at$	$\frac{a}{p^2-a^2}$
10	$(1-at)e^{-at}$	$\frac{p}{(p+a)^2}$	21	$\operatorname{ch} at$	$\frac{p}{p^2-a^2}$
11	$\frac{1}{a}(1-e^{-at})$	$\frac{1}{p(p+a)}$	22	$\frac{1}{ab}+\frac{1}{b-a}\left(\frac{e^{-bt}}{b}-\frac{e^{-at}}{a}\right)$	$\frac{1}{p(p+a)(p+b)}$
12	$\frac{1}{a^2}[1-e^{-at}(1+at)]$	$\frac{1}{p(p+a)^2}$			

* В таблице для сокращения записи под каждой из функций оригиналов $f(t)$ следует понимать $f(t)\cdot 1(t)$.

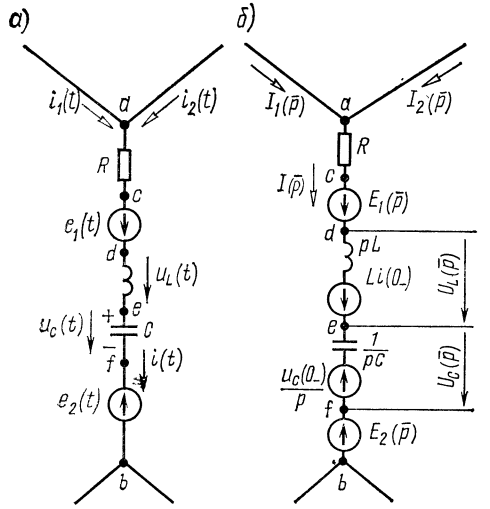


Рис. 7.1

ника напряжения с э. д. с. $u_C(0_-)/p$, где $u_C(0_-)$ — начальное значение напряжения на емкости. Э. д. с. $Li(0_-)$ имеет направление, совпадающее с током $i(t)$, а э. д. с. $u_C(0_-)/p$ направлена против напряжения на емкости. Следует заметить, что показанные на рис. 7.1, *б* операторные напряжения на индуктивности и емкости при нулевых начальных условиях определяются по формулам

$$U_L(\bar{p}) = pLI(\bar{p}) - Li(0_-);$$

$$U_C(\bar{p}) = \frac{1}{pC} I(\bar{p}) + \frac{u_C(0_-)}{p}.$$

На рис. 7.2, *а* показана часть электрической цепи, а соответствующая ей операторная схема замещения — на рис. 7.2, *б*.

На рис. 7.3, *а* изображено несколько участков индуктивно связанных цепей, а соответствующие им схемы замещения — на рис. 7.3, *б*. При этом верхние рисунки даны для случая объединения одноименных зажимов, средние — при соединении разноименных зажимов. На нижних рисунках дана схема трансформатора и соответствующая ему схема замещения.

Замечание. Обращаем внимание на то, что указанные на рис. 7.2, *б* и 7.3, *б* направления э. д. с. $Li_3(0_-)$, $L_1i_1(0_-)$, $L_2i_2(0_-)$, $Mi_1(0_-)$, $Mi_2(0_-)$, $u_C(0_-)/p$ соответствуют направлениям положительных токов и напряжениям на конденсаторе, данным на рис. 7.2, *а* и 7.3, *а*.

4. Закон Ома для ветви в операторной форме (с учетом ненулевых начальных условий). На рис. 7.1 изображена ветвь *ab*, содержащая последовательно соединенные элементы R, L, C и источники э. д. с. $e_1(t)$ и $e_2(t)$, являющиеся частью сложной цепи.

Изображение тока $I(\bar{p})$ в ветви *ab* связано с изображением напряжения $U_{ab}(\bar{p})$, приложенного к зажимам *a* и *b* ветви, законом Ома в операторной форме (рис. 7.1, *б*):

$$I(\bar{p}) = \frac{U_{ab}(\bar{p}) + E_1(\bar{p}) + Li(0_-) - \frac{u_C(0_-)}{p} - E_2(\bar{p})}{Z(\bar{p})}, \qquad (7.3)$$

где $E_1(\bar{p})$ и $E_2(\bar{p})$ — изображения э. д. с. $e_1(t)$ и $e_2(t)$; $i(0_-)$ и $u_C(0_-)$ — значения тока в индуктивной катушке и напряжения на конденсаторе в начальный момент времени (положительное направление напряжения на конденсаторе $u_C = u_{ef} = -u_{fe}$ следует принимать совпадающим с выбранным положительным направлением тока, как показано на рис. 7.1, *а*).

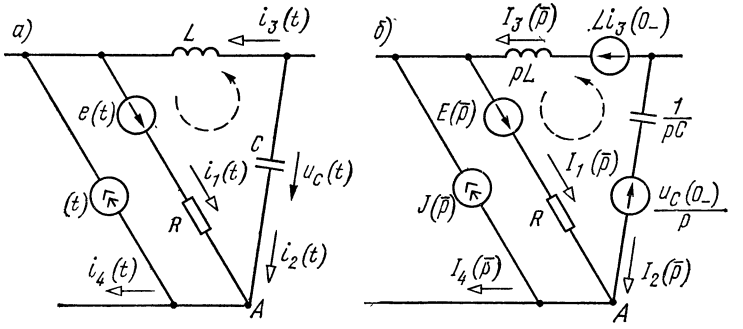


Рис. 7.2

5. Закон Кирхгофа в операторной форме. Первый закон

$$\sum_{k=1}^{m} I_k(\bar{p}) = 0. \tag{7.4}$$

Второй закон. В общем случае при ненулевых начальных условиях для какого-либо контура, содержащего $N_в$ ветвей,

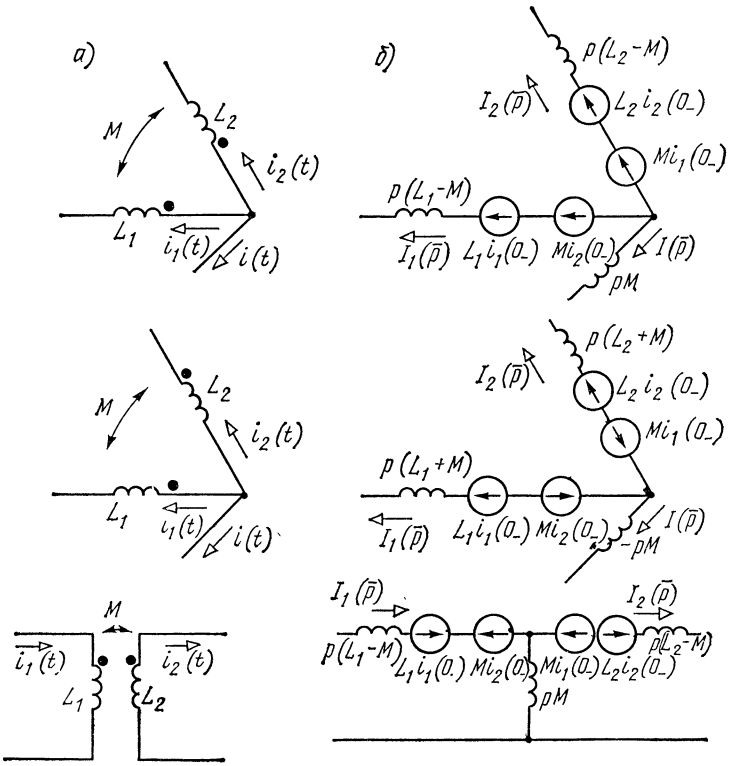


Рис. 7.3

$$\sum_{k=1}^{N_в}\left[E_k\,(\overline{p}) + L_k i_k\,(0_-) - \frac{u_{Ck}\,(0_-)}{p}\right] = \sum_{k=1}^{N_в} I_k\,(\overline{p})\,Z_k\,(\overline{p}), \quad (7.5а)$$

где $i_k(0_-)$ и $u_{Ck}(0_-)$ — начальные значения тока, проходящего через катушку индуктивности, и напряжения на конденсаторе в ветви k; $Z_k(\overline{p}) = R_k + pL_k + 1/(pC_k)$ — операторное сопротивление ветви k.

Пример. Для узла A (см. рис. 7.2, *б*) первый закон Кирхгофа в операторной форме имеет вид

$$I_1\,(\overline{p}) + I_2\,(\overline{p}) = I_4\,(\overline{p}) + J\,(\overline{p}).$$

Для контура, показанного штриховой стрелкой на рис. 7.2, *а* и *б*, второй закон Кирхгофа в операторной форме имеет вид

$$E\,(\overline{p}) + Li_3\,(0_-) + \frac{u_C\,(0_-)}{p} = pLI_3\,(\overline{p}) + RI_1\,(\overline{p}) - \frac{1}{pC}\,I_2\,(\overline{p}).$$

При нулевых начальных условиях формула (7.5а) примет вид

$$\sum_{k=1}^{N_в} E_k\,(\overline{p}) = \sum_{k=1}^{N_в} I_k\,(\overline{p})\,Z_k\,(\overline{p}). \quad (7.5б)$$

6. Теорема разложения. Если изображение искомого тока или напряжения имеет вид рациональной дроби

$$\frac{F_1\,(\overline{p})}{F_2\,(\overline{p})} = \frac{a_m p^m + a_{m-1}p^{m-1} + \cdots + a_1 p + a_0}{b_n p^n + b_{n-1}p^{n-1} + \cdots + b_1 p + b_0} = \\ = \frac{a_m p^m + a_{m-1}p^{m-1} + \cdots + a_1 p + a_0}{b_n\,(p - p_1)\,(p - p_2)\,\ldots\,(p - p_n)}, \quad (7.6)$$

причем многочлены (относительно p) $F_1(\overline{p})$ и $F_2(\overline{p})$ удовлетворяют следующим условиям: степень $F_1(\overline{p})$ ниже степени $F_2(\overline{p})$, a_k и b_k — вещественные числа, а корни p_1, p_2,..., p_n уравнения $F_2(\overline{p}) = 0$ различны, то оригинал определяется выражением

$$\frac{F_1\,(\overline{p})}{F_2\,(\overline{p})} \doteqdot \sum_{k=1}^{n} \frac{F_1\,(\overline{p}_k)}{F_2'\,(\overline{p}_k)}\,e^{p_k t}. \quad (7.7)$$

Если знаменатель уравнения $F_2(\overline{p}) = 0$ имеет один корень, равный нулю, т. е. $F_2(\overline{p}) = pF_3(\overline{p})$, то оригинал находится по формуле

$$\frac{F_1\,(\overline{p})}{F_2\,(\overline{p})} = \frac{F_1\,(\overline{p})}{pF_3\,(\overline{p})} \doteqdot \frac{F_1\,(0)}{F_3\,(0)} + \sum_{k=1}^{n} \frac{F_1\,(\overline{p}_k)}{p_k F'\,(\overline{p}_k)}\,e^{p_k t}. \quad (7.8)$$

Примеры в задачах 7.1; 7.4; 7.10; 7.12.

Замечание. Если среди корней уравнения $F_2(\overline{p}) = 0$ имеются комплексно-сопряженные корни p_k и p_k^*, то при вычислении соответствующих им слагаемых, стоящих в правой части суммы уравнений (7.7) и (7.8), достаточно определить слагаемое для одного из этих корней, например p_k, а для сопряженного корня p_k^* следует взять сопряженное значение этого слагаемого. Сумма, соответствующая этим двум слагаемым, равна удвоенному значению действительной части, найденной для одного из корней.

Примеры приведены в задачах 7.4 и 7.14.

Если в уравнении (7.8) $F_2(\overline{p}) = 0$ имеет n различных корней (p_1, p_2, .., p_s) и из них корень p_1 кратностью m_1, корень p_2 кратностью m_2, корень p_s кратностью m_s, то по изображению $F_1(\overline{p})/F_2(\overline{p})$ оригинал вычисляют по формуле

$$\frac{F_1(\overline{p})}{F_2(\overline{p})} \doteq \sum_{k=1}^{s} \frac{1}{(m_k-1)!} \left[\frac{d^{m_k-1}}{dp^{m_k-1}} \cdot \frac{F_1(\overline{p})\, e^{pt}}{\frac{F_2(\overline{p})}{(p-p_k)^{m_k}}} \right]_{p=p_k}. \qquad (7.9)$$

Здесь выражение, стоящее в знаменателе квадратной скобки, надо сначала сократить на $(p - p_k)^{m_k}$ и лишь после этого дифференцировать.

Если уравнение $F_2(\overline{p}) = 0$ содержит одновременно и простые, и кратные корни, то для определения слагаемых, соответствующих простым корням, используется формула (7.7) или (7.8), если имеется простой корень $p = 0$, а для кратных — формула (7.9).

Пример приведен в задаче 7.4, п.2.

7. Методика решения задач операторным методом. Она сводится к:

а) составлению уравнений Кирхгофа (или соответствующих им уравнений по тому или иному методу расчета) в операторной форме с учетом начальных условий;

б) их решению относительно изображения искомой величины;

в) нахождению оригинала (с помощью теоремы разложения, таблиц, связывающих оригиналы и их изображения, или другими методами) по найденному изображению.

УПРАЖНЕНИЯ И ЗАДАЧИ

А. Расчет переходных процессов. Операторные схемы замещения. Использование таблицы 7.1 и теоремы разложения

7.1. Для схемы рис. 7.4 операторным методом найти выражения мгновенных значений тока в неразветвленной части цепи и напряжения на обкладках конденсатора при замыкании контакта K. Даны: $U = 200$ В, $R_1 = 100$ Ом, $R_2 = 400$ Ом, $C = 5$ мкФ.

Р е ш е н и е. Находим изображение тока в неразветвленной части цепи по закону Ома:

$$I_1(\overline{p}) = U(\overline{p})/Z(\overline{p}),$$

где изображение постоянного напряжения (см. по табл. 7.1, № 2)

$$U(\overline{p}) = U/p = 200/p,$$

а операторное сопротивление

$$Z(\overline{p}) = R_1 + \frac{R_2 \frac{1}{pC}}{R_2 + \frac{1}{pC}} = \frac{R_1R_2Cp + R_2}{R_2Cp + 1} = \frac{0{,}2p + 500}{2 \cdot 10^{-3}p + 1}.$$

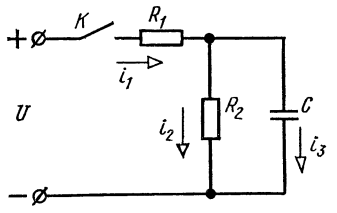


Рис. 7.4

Итак,

$$I_1(\overline{p}) = \frac{0{,}4p + 200}{p\,(0{,}2p + 500)}.$$

Оригинал этого тока определим двумя способами.

Способ 1. Используем табл. 7.1, связывающую оригинал и его изображение. Для этого преобразуем $I_1(\overline{p})$ так, чтобы получить табличные изображения.

$I_1(\overline{p})$ представим в виде суммы двух функций, которые после преобразования примут вид формул, данных в табл. 7.1, № 5 и 11:

$$I_1(\overline{p}) = \frac{0{,}4}{0{,}2p + 500} + \frac{200}{p\,(0{,}2p + 500)} = \frac{0{,}4}{0{,}2} \cdot \frac{1}{p + \frac{500}{0{,}2}} +$$

$$+ \frac{200}{0{,}2} \cdot \frac{\frac{500}{0{,}2}}{p\left(p + \frac{500}{0{,}2}\right)} \cdot \frac{0{,}2}{500} = 2 \cdot \frac{1}{p + 2500} + 0{,}4\,\frac{2500}{p\,(p + 2500)} \doteqdot$$

$$\doteqdot 2e^{-2500t} + 0{,}4\,(1 - e^{-2500t}) = (0{,}4 + 1{,}6e^{-2500t})\ \text{A} = i_1(t).$$

Способ 2. Решим задачу с помощью теоремы разложения [см. формулу (7.8)].

В данном случае

$$F_1(\overline{p}) = 0{,}4p + 200; \qquad F_3(\overline{p}) = 0{,}2p + 500.$$

Вычисляем корень уравнения

$$F_3(\overline{p}) = 0{,}2p + 500 = 0; \quad p_1 = -2500\ \text{с}^{-1}.$$

Определяем:

$$F_1(0) = (0{,}4p + 200)_{p=0} = 200; \quad F_3(0) = (0{,}2p + 500)_{p=0} = 500;$$

$$F_1(\overline{p}_1) = (0{,}4p + 200)_{p=p_1} = 0{,}4\,(-2500) + 200 = -800;$$

$$F_3'(p) = 0{,}2.$$

Подставляя найденные значения в формулу (7.8), получим

$$I_1(\overline{p}) = \frac{F_1(\overline{p})}{pF_3(\overline{p})} = \frac{0{,}4p + 200}{p(0{,}2p + 500)} = \frac{F_1(0)}{F_3(0)} + \frac{F_1(\overline{p_1})\,e^{p_1 t}}{p_1 F_3'(\overline{p_1})} =$$

$$= \frac{200}{500} + \frac{-800e^{-2500t}}{-2500 \cdot 0{,}2} = (0{,}4 + 1{,}6e^{-2500t})\ \text{А} = i_1(t).$$

Проверка. При $t = 0_+$ ток $i_1(0) = 0{,}4 + 1{,}6 = 2$ А. Действительно, в момент начала переходного процесса напряжение на конденсаторе равно нулю. Это соответствует тому, что конденсатор ведет себя так, будто он закорочен, и тем самым шунтирует сопротивление R_2, поэтому ток $i_1(0_+)$ определяется только величиной сопротивления R_1.

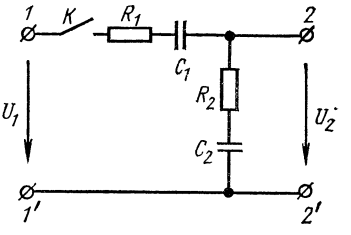


Рис. 7.5

Определим напряжение на конденсаторе в операторной форме

$$U_C(\overline{p}) = U(\overline{p}) - \frac{U(\overline{p})}{Z(\overline{p})} R_1 = U(\overline{p})\left(1 - \frac{R_1(R_2Cp + 1)}{R_1R_2Cp + R_1 + R_2}\right) =$$

$$= \frac{R_2U(\overline{p})}{R_1R_2Cp + R_1 + R_2} = \frac{UR_2}{p(R_1R_2Cp + R_1 + R_2)} = \frac{8 \cdot 10^3}{p(0{,}2p + 500)}.$$

Применяя один из указанных способов, найдем

$$u_C = 160\,(1 - e^{-2500t})\ \text{В}.$$

Проверка. При $t = 0_+$ напряжение $u_C(0_+) = 0$, что соответствует начальному условию.

7.2. Определить напряжение на разомкнутых зажимах *2—2'* цепи рис. 7.5 при ее включении на постоянное напряжение $U_1 = 100$ В. Даны: $R_1 = R_2 = 250$ Ом, $C_1 = 20$ мкФ, $C_2 = 4$ мкФ.

7.3. Решить задачу 6.8 операторным методом.

7.4. Решить задачу 6.31 операторным методом.

Р е ш е н и е. Прежде всего найдем операторное сопротивление цепи

$$Z(\overline{p}) = R + \frac{pL\dfrac{1}{pC}}{pL + \dfrac{1}{pC}} = \frac{RLCp^2 + Lp + R}{p^2LC + 1}.$$

Далее определим изображение тока $I_1(\overline{p})$ через изображение входного напряжения $U(\overline{p}) = U/p$:

$$I_1(\overline{p}) = \frac{U(\overline{p})}{Z(\overline{p})} = \frac{U(LCp^2 + 1)}{p(RLCp^2 + Lp + R)}.$$

Изображение напряжения на конденсаторе получим умножением изображения тока на операторное сопротивление параллельных ветвей L, C :

$$U_C(\overline{p}) = I_1(\overline{p})\,\frac{pL\,\dfrac{1}{pC}}{pL+\dfrac{1}{pC}} = \frac{U}{RC\left(p^2+\dfrac{1}{RC}\,p+\dfrac{1}{LC}\right)} = \frac{F_1(\overline{p})}{F_2(\overline{p})}, \qquad (1)$$

где числитель

$$F_1(\overline{p}) = U/RC, \qquad (2)$$

а знаменатель

$$F_2(\overline{p}) = p^2+\frac{1}{RC}\,p+\frac{1}{LC} = (p-p_1)(p-p_2), \qquad (3)$$

причем корни уравнения $F_2(\overline{p}) = 0$

$$p_{1,2} = -\frac{1}{2RC} \pm \sqrt{\left(\frac{1}{2RC}\right)^2-\frac{1}{LC}}\,. \qquad (4)$$

1. Решим задачу для первого варианта числовых значений по формуле разложения (7.7). По формулам (2)—(4) определяем

$$F_1(\overline{p}) = 125/(250\cdot 2\cdot 10^{-6}) = 0{,}25\cdot 10^6;\quad F_2(\overline{p}) = p^2+$$

$$+\frac{1}{250\cdot 2\cdot 10^{-6}}\,p+\frac{1}{667\cdot 10^{-3}\cdot 2\cdot 10^{-6}} = p^2+2000p+0{,}75\cdot 10^6.$$

Найдем корни уравнения

$$F_2(\overline{p}) = p^2+2000p+0{,}75\cdot 10^6 = 0;\quad p_1 = -500\ \text{с}^{-1},$$

$$p_2 = -1500\ \text{с}^{-1}.$$

Вычислим производную $F_2'(p)$ и ее значения при $p = p_1$ и $p = p_2$:

$$F_2'(p) = 2p+2000,\quad F_2'(p_1) = 2(-500)+2000 = 1000;$$

$$F_2'(p_2) = 2(-1500)+2000 = -1000.$$

По формуле (1) определяем

$$U_C(p) = \frac{F_1(\overline{p})}{F_2(\overline{p})} = \frac{0{,}25\cdot 10^6}{p^2+2000p+0{,}75\cdot 10^6}\,.$$

По формуле разложения (7.7):

$$U_C(\overline{p}) \doteq \frac{F_1(\overline{p_1})}{F_2'(\overline{p_1})}\,e^{p_1 t}+\frac{F_1(\overline{p_2})}{F_2'(\overline{p_2})}\,e^{p_2 t} = \frac{0{,}25\cdot 10^6 e^{-500t}}{1000}+$$

$$+\frac{0{,}25\cdot 10^6 e^{-1500t}}{-1000}=250\left(e^{-500t}-e^{-1500t}\right)\text{В}=u_C(t).$$

Те же результаты могут быть получены по формуле табл. 7.1, № 13, если знаменатель изображения напряжения на конденсаторе представить в виде $F_2(p)=(p+500)(p+1500)$.

2. Решим задачу, подставляя числовые значения второго варианта. По формулам (2)—(4) определяем

$$F_1(\overline{p})=\frac{125}{100\cdot 1\cdot 10^6}=1{,}25\cdot 10^6;\quad F_2(\overline{p})=(p+5000)^2;$$

$$p_1=p_2=-5000\ \text{с}^{-1}.$$

Изображение напряжения на конденсаторе [см. формулу (1)] имеет вид

$$U_C(\overline{p})=\frac{F_1(\overline{p})}{F_2(\overline{p})}=\frac{1{,}25\cdot 10^6}{(p+5000)^2}.$$

В связи с тем, что имеются кратные корни (порядок кратности $m_1=2$), оригинал находим по формуле (7.9), в которой

$$m_k=m_1=2,\quad (m_k-1)!=(2-1)!=1;$$

$$\frac{F_2(\overline{p})}{(p-p_1)^{m_k}}=\frac{(p+5000)^2}{(p+5000)^2}=1.$$

Таким образом,

$$\frac{F_1(\overline{p})}{F_2(\overline{p})}\doteq\left[\frac{d}{dp}\,\frac{F_1(p)\,e^{pt}}{1}\right]_{p=p_1}=\left[\frac{d}{dp}\,1{,}25\cdot 10^6 e^{pt}\right]_{p=p_1}=$$

$$=\left[1{,}25\cdot 10^6 te^{pt}\right]_{p=p_1}=1{,}25\cdot 10^6 te^{-5000t}\ \text{В}=u_C(t).$$

Можно также определить оригинал по формуле табл. 7.1, № 9.

3. Рассмотрим третий вариант числовых значений. По формулам (2)—(4) находим

$$F_1(\overline{p})=\frac{125}{100\cdot 5\cdot 10^{-6}}=0{,}25\cdot 10^6;\quad F_2(\overline{p})=p^2+2000p+5\cdot 10^6;$$

$$p_{1,2}=-1000\pm j2000\ \text{с}^{-1}.$$

Производная от $F_2(\overline{p})$ и ее значения при $p=p_1$ и $p=p_2$ равны:

$$F_2'(\overline{p})=2p+2000;$$

$$F_2'(\overline{p_1})=2(-1000+j2000)+2000=j4000;$$

$$F_2'(\overline{p_2})=2(-1000-j2000)+2000=-j4000.$$

Искомый оригинал (с учетом замечания на с. 207) имеет вид [см. формулу (7.7)]

$$\frac{F_1(\overline{p})}{F_2(\overline{p})} = \frac{0{,}25 \cdot 10^6}{p^2 + 2000p + 5 \cdot 10^6} \doteqdot \frac{0{,}25 \cdot 10^6}{j4000} e^{(-1000+j2000)\,t} +$$

$$+ \frac{0{,}25 \cdot 10^6}{-j4000} e^{(-1000-j2000)\,t} = 2\mathrm{Re}\left[0{,}25 \cdot 10^6 e^{-1000t} \frac{e^{j2000t}}{4000e^{j90°}}\right] =$$

$$= 2\left[\mathrm{Re}\ \frac{0{,}25 \cdot 10^6 e^{-1000t}}{4000} e^{j\,(2000t-90°)}\right] =$$

$$= \frac{2 \cdot 0{,}25 \cdot 10^6}{4000} e^{-1000t} \cos(2000t - 90°) = 125e^{-1000t} \sin 2000\ \mathrm{B} = u_C(t).$$

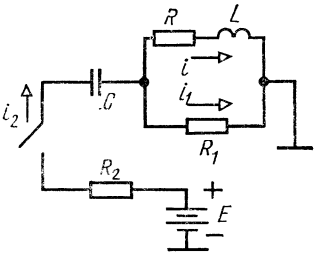


Рис. 7.6

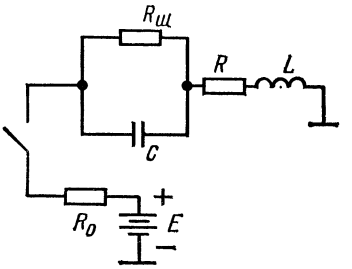


Рис. 7.7

Те же результаты можно получить по формуле табл. 7.1, № 18, если знаменатель $F_2(\overline{p})$ представить в виде

$$F_2(\overline{p}) = (p - p_1)(p - p_2) = [p - (-1000 + j2000)]\,[p - (-1000 - j2000)] = (p + 1000)^2 + 2000^2.$$

7.5. Найти ток в индуктивной катушке при включении цепи рис. 7.6. Э. д. с. источника энергии E, параметры катушки (R, L) сопротивления резисторов R_1 и R_2 и емкость конденсатора C известны.

7.6. Определить ток, проходящий по индуктивной катушке при включении цепи (рис. 7.7). Даны: $E = 40$ В, $R_0 = 100$ Ом, $R_ш = 2000$ Ом, $R = 110$ Ом, $L = 3$ Гн и $C = 1$ мкФ.

7.7. К цепи рис. 7.8 подключается напряжение $u = U_m \sin(\omega_0 t + \psi)$. Пользуясь операторным методом, найти выражение для мгновенных значений напряжения между обкладками конденсатора.

7.8. К цепи рис. 7.9 подключается напряжение $u = U_m \sin(\omega_0 t + \psi)$. Найти закон изменения во времени тока, проходящего в неразветвленной части цепи. Даны: $R_1 = 100$ Ом, $R_2 = 250$ Ом, $L = 1$ Гн, $U_m = 170$ В и $f = 50$ Гц.

7.9. Найти законы изменения во времени тока i_1 в неразветвленной части цепи и напряжения u_C при включении цепи рис. 7.10 на синусоидальное напряжение $u = U_m \sin \omega_0 t$. Даны: $U_m = 500$ В, $R = 50$ Ом, $L = 0{,}3$ Гн, $C = 100$ мкФ и $\omega_0 = 314$ с$^{-1}$.

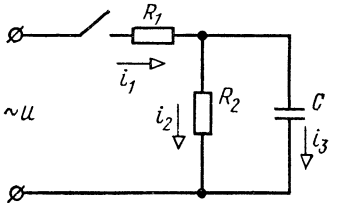


Рис. 7.8

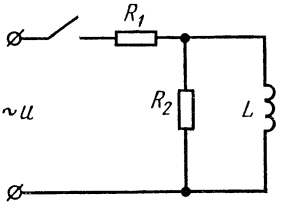


Рис. 7.9

7.10. Решить задачу **6.10** операторным методом.

Р е ш е н и е. Это пример задачи с ненулевым начальным условием для тока i_1, проходящего через индуктивную катушку. Операторная

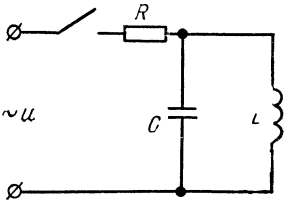


Рис. 7.10

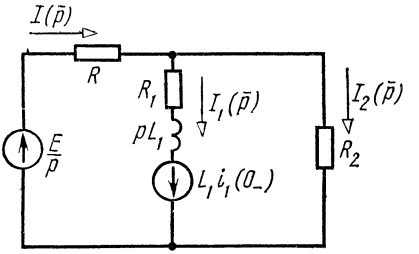


Рис. 7.11

схема замещения изображена на рис. 7.11. Составляем для нее уравнения Кирхгофа:

$$I(\bar{p}) = I_1(\bar{p}) + I_2(\bar{p}); \tag{1}$$

$$E(\bar{p}) = RI(\bar{p}) + R_2 I_2(\bar{p}); \tag{2}$$

$$E(\bar{p}) + L_1 i_1(0_-) = RI(\bar{p}) + (R_1 + pL_1) I_1(\bar{p}). \tag{3}$$

В этих уравнениях $i_1(0_-) = U/(R + R_1)$ — начальное значение тока, проходящего через индуктивную катушку; $E(\bar{p}) = E/p$ — изображение постоянной э. д. с.

Уравнения (1)—(3) решим совместно относительно тока $I_1(\bar{p})$:

$$I_1(\bar{p}) = \frac{E\left(\frac{L_1(R+R_2)}{R+R_1}\,p + \frac{RR_2 + R_1R_2}{R+R_1}\right)}{p\,[RR_2 + RR_1 + R_1R_2 + L_1(R+R_2)\,p]} = \frac{8p+45}{p(4p+25)} =$$

$$= \frac{2p+11{,}25}{p(p+6{,}25)}.$$

По формуле разложения (7.8) оригинал функции имеет вид

$$i_1(t) = (1{,}8 + 0{,}2e^{-6{,}25t})\ \text{А}.$$

Для упражнения эту же задачу решим методом сведения к нулевым начальным условиям. Для этого вычислим напряжение на разомкнутом контакте (см. рис. 6.10, *а*):

$$u_к(0_-) = u_{ab}(0_-) = R_1 i_1(0_-) = \frac{ER_1}{R + R_1}.$$

Добавим в ветвь R_2 два встречно включенных источника с э. д. с. $E_1 = E_2 = u_к = ER_1/(R + R_1)$, как показано на рис. 7.12, *а*.

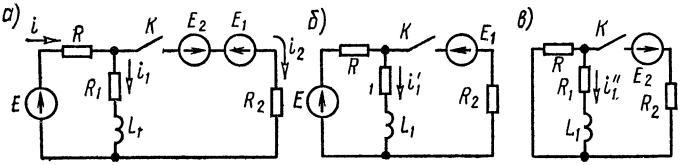


Рис. 7.12

Расчет схемы после коммутации проведем по методу наложения. Составляющая тока i'_1 (от системы э. д. с. E и E_1) совпадает со своим значением $i_1(0_-)$ до коммутации, так как подключение э. д. с. $E_1 = u_к(0_-)$ (рис. 7.12, *б*) не вызовет каких-либо изменений в исходной схеме с выключенным контактом K. Таким образом,

$$i'_1 = i_1(0_-) = E/(R + R_1) = 2 \text{ А}.$$

Вызываемая действием э. д. с. E_2, подключаемой к обесточенной схеме (рис. 7.12, *в*), составляющая тока i''_1 может быть записана в операторной форме:

$$I''_1(p) = -\frac{E_2(p)R}{\left(R_2 + \dfrac{R(R_1 + pL_1)}{R + R_1 + pL_1}\right)(R + R_1 + pL_1)} =$$

$$= -\frac{ER_1R}{p[pL_1(R + R_2) + RR_1 + RR_2 + R_1R_2](R + R_1)}.$$

Подставляя числовые значения и переходя к оригиналу $i''_1(t)$, по формуле (7.8) для искомого тока получим

$$i_1 = i'_1 + i''_1 = (1{,}8 + 0{,}2e^{-6{,}25t}) \text{ А}.$$

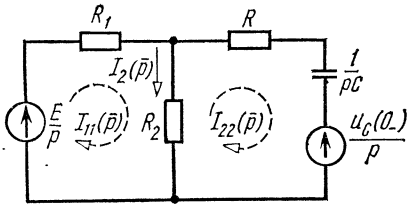


Рис. 7.13

7.11. Решить задачи 6.5 и 6.6 операторным методом.

7.12. Решить задачу 6.22 операторным методом.

Р е ш е н и е. Эта задача имеет ненулевое начальное условие для напряжения на конденсаторе u_C. Операторная схема замещения изображена на рис. 7.13.

По методу контурных токов для этой схемы имеем:

$$I_{11}(\overline{p})(R_1+R_2)-I_{22}(\overline{p})R_2=\frac{E}{p}; \tag{1}$$

$$-I_{11}(\overline{p})R_2+I_{22}(\overline{p})\left(R+R_2+\frac{1}{pC}\right)=-\frac{u_C(0_-)}{p}. \tag{2}$$

Решая эти уравнения относительно $I_{22}(\overline{p})$ и учитывая, что $u_C(0_-)=E$, найдем

$$I_{22}(\overline{p})=\frac{-ER_1C}{(RR_1+RR_2+R_1R_2)Cp+R_1+R_2}=$$

$$=-\frac{ER_1}{RR_1+RR_2+R_1R_2}\cdot\frac{1}{p+\dfrac{R_1+R_2}{(RR_1+RR_2+R_1R_2)C}}.$$

Подставив числовые значения, получим

$$I_{22}(\overline{p})=\frac{-3{,}6\cdot10^{-3}}{24\cdot10^{-3}p+150}=-0{,}15\,\frac{1}{p+6250}.$$

На основании (7.7) или по табл. 7.1, № 5 определим оригинал:

$$i(t)=-0{,}15e^{-6250t}\ \text{А}.$$

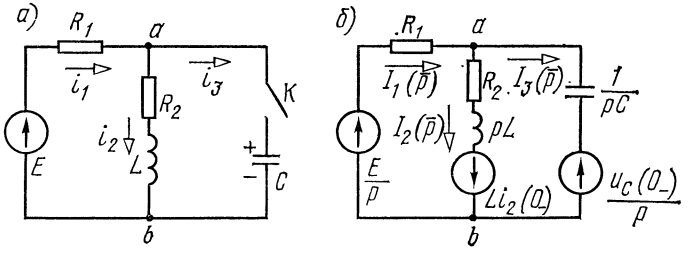


Рис. 7.14

Аналогично из уравнений (1) и (2) можно найти другие токи и напряжение на конденсаторе.

7.13. При установившемся режиме в схеме рис. 7.14, *а* замыкается контакт K. Конденсатор емкостью C был предварительно заряжен до напряжения U_0. Найти выражения токов при переходном процессе. Даны: $E=60$ В, $R_1=400$ Ом, $R_2=800$ Ом, $L=0{,}2$ Гн; $C=2{,}5$ мкФ и $U_0=20$ В.

Указание. Операторная схема замещения показана на рис. 7.14, *б*. Для нее $i_2(0_-)=E/(R_1+R_2)$, $u_C(0_-)=U_0$. Задачу удобно решать методом узловых потенциалов. Напряжение в операторной форме между точками *a* и *b* равно

$$U_{ab}(\bar{p}) = \frac{\dfrac{E}{p}\cdot\dfrac{1}{R_1} - Li_2(0_-)\dfrac{1}{R_2+pL} + \dfrac{u_C(0_-)}{p}\,pC}{\dfrac{1}{R_1}+\dfrac{1}{R_2+pL}+pC}.$$

Операторное выражение тока $I_1(\bar{p})$ по закону Ома:

$$I_1(\bar{p}) = \frac{V_b(\bar{p}) - V_a(\bar{p}) + \dfrac{E}{p}}{R_1} = \frac{\dfrac{E}{p} - U_{ab}(\bar{p})}{R_1} =$$

$$= \frac{LC(E-U_0)p^2 + [R_2C(E-U_0) + Li_2(0_-)]p + E}{p[R_1LCp^2 + (R_1R_2C + L)p + R_1 + R_2]} = \frac{F_1(\bar{p})}{pF_2(\bar{p})}.$$

Подставляя сюда числовые значения с помощью теоремы разложения, найти $i_1(t)$. Далее определить

$$u_{ab} = E - i_1R_1, \quad i_3 = C\frac{du_{ab}}{dt}, \quad i_2 = i_1 - i_3.$$

7.14. В схеме рис. 7.15, *а* при разомкнутом контакте имеется установившийся процесс. В момент $t = 0$ контакт замыкается и накоротко шунтирует сопротивление R_4.

Найти выражения для токов и напряжение на конденсаторе при переходном процессе. Даны: $U = 125$ В, $R_1 = 50$ Ом, $R_2 = 200$ Ом, $R_4 = 250$ Ом, $L = 0{,}01$ Гн и $C = 5$ мкФ.

Р е ш е н и е. Это пример задачи с ненулевыми начальными условиями. Определим их. Через индуктивную катушку до замыкания ключа проходит постоянный ток

$$i_1(0_-) = \frac{U}{R_1 + R_4 + R_2} = \frac{125}{500} = 0{,}25 \text{ А}.$$

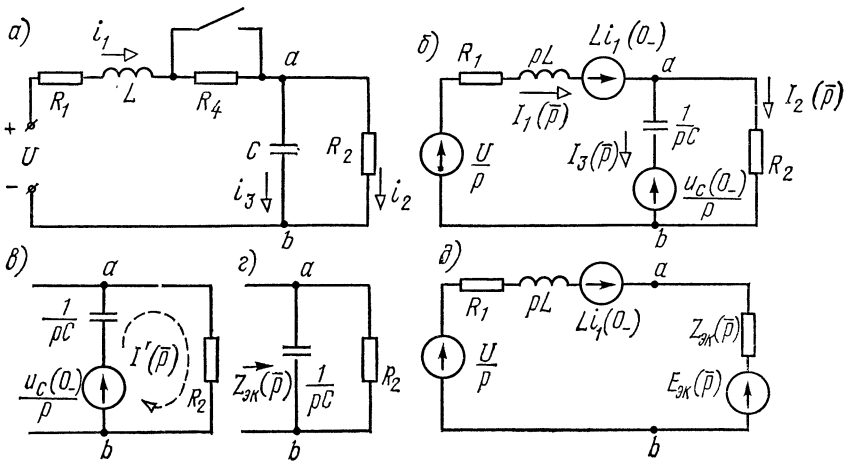


Рис. 7.15

Напряжение на конденсаторе до коммутации

$$u_C(0_-) = R_2 i_2(0_-) = 0{,}25 \cdot 200 = 50 \text{ В}.$$

Для схемы, образующейся после коммутации, начертим операторную схему замещения (рис. 7.15, *б*). Найдем, например, ток $I_1(p)$ методом эквивалентного источника э. д. с. Для этого отключаем первую ветвь (рис. 7.15, *в*) и найдем операторную э. д. с. эквивалентного источника $E_{эк}(p)$ и его сопротивление $Z_{эк}(p)$. Из рис. 7.15, *в* следует, что

$$E_{эк}(p) = U_{ab}(p) = R_2 I'(p) = R_2 \frac{\dfrac{u_C(0_-)}{p}}{R_2 + \dfrac{1}{pC}} = \frac{CR_2 u_C(0_-)}{1 + pCR_2}, \qquad (1)$$

а из рис. 7.15, *г*

$$Z_{эк}(p) = \frac{R_2 \dfrac{1}{pC}}{R_2 + \dfrac{1}{pC}} = \frac{1}{1 + pCR_2}. \qquad (2)$$

Ток в первой ветви (рис. 7.15, *д*)

$$I_1(p) = \frac{\dfrac{U}{p} + Li_1(0_-) - E_{эк}(p)}{R_1 + pL + Z_{эк}(p)}. \qquad (3)$$

Подставим сюда $E_{эк}(p)$ и $Z_{эк}(p)$ из (1) и (2), получим

$$I_1(p) = \frac{CLR_2 i_1(0_-)\, p^2 + [UCR_2 + Li_1(0_-) - u_C(0_-)\, CR_2]\, p + U}{p[LCR_2 p^2 + (CR_1 R_2 + L)\, p + R_1 + R_2]} =$$

$$= \frac{F_1(p)}{F_2(p)} \qquad (4)$$

Подставляя числовые значения, имеем:

$$F_1(p) = 5 \cdot 10^6 \cdot 0{,}01 \cdot 0{,}25 \cdot 200p^2 + (125 \cdot 5 \cdot 10^{-6} \cdot 200 +$$
$$+ 0{,}01 \cdot 0{,}25 - 50 \cdot 5 \cdot 10^{-6} \cdot 200)\, p + 125 = 2{,}5 \cdot 10^{-6} p^2 +$$
$$+ 0{,}0775p + 125; \qquad (5)$$

$$F_2(p) = pF_3(p) = p[0{,}01 \cdot 5 \cdot 10^{-6} \cdot 200p^2 + (5 \cdot 10^{-6} \cdot 50 \cdot 200 + 0{,}01)\, p +$$
$$+ 250 = p(10^{-5} p^2 + 0{,}06p + 250)]. \qquad (6)$$

По изображению (4) найдем оригинал тока $i_1(t)$ с помощью теоремы разложения (7.8). Для этого определим значения функции $F_1(p)$ и $F_3(p)$ при $p = 0$:

$$F_1(0) = 125; \quad F_3(0) = 250. \tag{7}$$

Затем находим корни уравнения:

$$F_3(\overline{p}) = 10^{-5}p^2 + 0{,}06p + 250 = 0;$$

$$p_{1,2} = \frac{-0{,}06 \pm \sqrt{36 \cdot 10^{-4} - 4 \cdot 10^5 \cdot 250}}{2 \cdot 10^{-5}} = \frac{-0{,}06 + j0{,}08}{2 \cdot 10^{-5}} =$$

$$= (-3000 \pm j4000)\ \text{с}^{-1}; \tag{8}$$

$$p_1 = (-3000 + j4000)\ \text{с}^{-1}, \quad p_2 = (-3000 - j4000)\ \text{с}^{-1}.$$

Далее вычислим производную и ее значения при $p = p_1$ и $p = p_2$:

$$F_3'(\overline{p}) = 2 \cdot 10^{-5}p + 0{,}06; \quad F_3'(\overline{p_1}) = 2 \cdot 10^{-5}(-3000 + j4000) +$$

$$+ 0{,}06 = j0{,}08; \tag{9}$$

$$F_3'(\overline{p_2}) = 2 \cdot 10^{-5}(-3000 - j4000) + 0{,}06 = -j0{,}08. \tag{10}$$

Определим $F_1(\overline{p})$ при $p = p_1$ и $p = p_2$:

$$F_1(\overline{p_1}) = 2{,}5 \cdot 10^{-6}(-3000 + j4000)^2 + 0{,}0775(-3000 + j4000) +$$

$$+ 125 = -125 + j250; \tag{11}$$

$$F_1(\overline{p_2}) = 2{,}5 \cdot 10^{-6}(-3000 - j4000)^2 + 0{,}0775(-3000 - j4000) +$$

$$+ 125 = -125 - j250. \tag{12}$$

Наконец, подставим полученные в уравнениях (7)—(12) значения в формулу (7.8) и, учитывая замечание на с. 207, определяем

$$i_1(t) = \frac{125}{250} + 2\text{Re}\left[\frac{(-125 + j250)\,e^{(-3000+j4000)\,t}}{(-3000 + j4000)\,j\,0{,}08}\right] =$$

$$= 0{,}5 + 2\left[\text{Re}\ \frac{281e^{j116°30'}\cdot e^{j4000t}}{5000e^{j126°50'}\cdot 0{,}08e^{j90°}}\right] e^{-3000t} =$$

$$= 0{,}5 + \text{Re}\left[1{,}4e^{j\,(4000t - 100°20')}\right] e^{-3000t} =$$

$$= 0{,}5 + 1{,}4e^{-3000t}\cos(4000t - 100°20') =$$

$$= [0{,}5 + 1{,}4e^{-3000t}\sin(4000t - 10°20')]\ \text{А}.$$

Проверка. При $t = 0$ $i_1(0) = 0{,}25$ А, что удовлетворяет начальному условию.

Остальные два тока могут быть найдены следующим образом. Если из U вычесть падение напряжения на ветви R_1L, то будет найдено мгновенное значение напряжения на параллельных ветвях:

$$u_{ab} = U - R_1 i_1 - L\,\frac{di_1}{dt}.$$

Затем определяем токи:

$$i_2 = \frac{u_{ab}}{R_2}, \quad i_3 = C\,\frac{du_{ab}}{dt}.$$

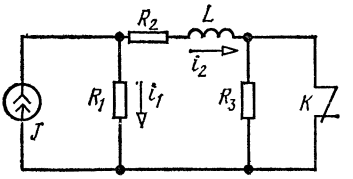


Рис. 7.16

7.15. Решить задачи 6.35—6.38 операторным методом.

7.16. Цепь рис. 7.16 при замкнутом контакте K находится в установившемся режиме. Ток источника тока $J = 0{,}4$ А. Параметры схемы: $R_1 = 10$ Ом, $R_2 = 15$ Ом, $R_3 = 25$ Ом, $L = 10$ мГн.

Рассчитать все токи при внезапном размыкании контакта K.

Указание. Характеристическое уравнение имеет вид (см. п. 4 основных положений и соотношений)

$$Z(p) = R_1 + R_2 + R_3 + pL = 0.$$

7.17. Полагаем, что в схеме рис. 7.16 контакт K разомкнут, и цепь находится в установившемся режиме. Найти токи при внезапном замыкании контура. Цифровые значения всех заданных величин взять из предыдущей задачи.

7.18. К зажимам цепи рис. 7.17, *а* приложено напряжение $u = U_m \sin(\omega t + \psi)$, $U_m = 10$ В, $\omega = 5000$ с$^{-1}$. Параметры цепи: $R_1 = 3$ Ом, $R_2 = 4$ Ом, $L_1 = 0{,}8$ мГн, $L_2 = 4$ мГн.

В момент прохождения тока через положительный максимум замыкается контакт K. Найти токи i_1 и i_2.

Р е ш е н и е. До замыкания контакта ток в цепи

$$i = \frac{\sqrt{2}\,U}{Z}\sin(\omega t + \psi - \varphi),$$

где

$$Z = \sqrt{(R_1 + R_2)^2 + (\omega L_1 + \omega L_2)^2} = 2{,}5 \text{ Ом};$$

$$\varphi = \operatorname{arctg}[(\omega L_1 + \omega L_2)]/(R_1 + R_2) = \operatorname{arctg} 3{,}43 = 73°44'.$$

По условию задачи в момент включения этот ток максимален, т. е.

$$i(0_-) = i(0_+) = \left[\frac{U_m}{Z}\sin(\omega t + \psi - \varphi)\right]_{t=0_+} = \frac{U_m}{Z} = \frac{10}{25} = 0{,}4 \text{ А}.$$

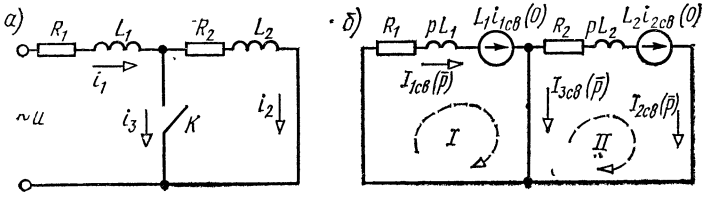


Рис. 7.17

Отсюда может быть рассчитан угол включения ψ:

$$\sin(\psi - \varphi) = 1; \quad \psi - \varphi = 90°; \quad \psi = 90° + \varphi = 163°44'.$$

Так как изображение синусоидальной функции определяется сравнительно сложной формулой, в данной задаче операторным методом вычислим только свободную составляющую тока $i_{1св}$, а установившуюся составляющую тока $i_{1у}$ найдем, рассчитав схему задачи (см. рис. 7.17, *а*) после коммутации символическим методом:

$$\underline{I}_{1m} = \frac{\underline{U}_m}{R_1 + j\omega L_1} = \frac{10e^{j163°44'}}{3 + j5 \cdot 10^3 \cdot 0{,}8 \cdot 10^{-3}} = 2e^{j110°34'} \text{ А};$$

$$i_{1у} = 2\sin(\omega t + 110°34') \text{ А}; \quad i_{1у}(0_+) = 2\sin 110°34' = 1{,}87 \text{ А}.$$

Начальное значение свободного тока

$$i_{1св}(0_+) = i(0_+) - i_{1у}(0_+) = 0{,}4 - 1{,}87 = -1{,}47 \text{ А}.$$

Операторная схема замещения для расчета свободной составляющей переходного процесса с учетом ненулевых начальных значений свободных токов вычерчена на рис. 7.17, *б*.

По второму закону Кирхгофа для первого контура имеем

$$L_1 i_{1св}(0_+) = I_{1св}(p)(R_1 + pL_1)$$

и, подставляя численные значения и вычисляя изображение свободного тока, находим

$$I_{1св}(p) = \frac{L_1 i_{1св}(0_+)}{R_1 + pL_1} = -\frac{0{,}8 \cdot 10^{-3} \cdot 1{,}47}{3 + 0{,}8 \cdot 10^{-3} p} = -\frac{1{,}47}{p + 3{,}75 \cdot 10^3}.$$

По формуле разложения

$$i_1 = -1{,}47e^{-3{,}75 \cdot 10^3 t} \text{ А}.$$

Суммирование установившегося и свободного токов определяет искомый ток

$$i_1 = [2\sin(\omega t + 110°34') - 1{,}47e^{-3{,}75 \cdot 10^3 t}] \text{ А}.$$

Аналогично вычисляем ток i_2. Отличие заключается в том, что установившийся ток равен нулю:

$$I_{2уm} = 0; \quad I_{2у} = 0.$$

Поэтому

$$i_{2св}(0_+) = i_2(0_+) = i(0_-) = 0{,}4 \text{ А}.$$

По второму закону Кирхгофа для второго контура (см. рис. 7.17, *б*)

$$I_2(p) = I_{2св}(p) = \frac{L_2 i_{2св}(0)}{R_2 + pL_2} = \frac{4 \cdot 10^{-3} \cdot 0{,}4}{4 + 4 \cdot 10^{-3} p} = \frac{0{,}4}{p + 10^3}.$$

По формуле разложения

$$i_2 = i_{2св} = 0{,}4e^{-10^3 t} \text{ А}.$$

7.19. До замыкания контакта по цепи рис. 7.18, *а* проходит ток, вызванный действием синусоидальной э. д. с. $e = 180 \sin (314t + 30°)$ В. В момент $t = 0$ контакт замыкается. Найти выражения переходных токов, если $R_1 = 30$ Ом, $R_2 = 60$ Ом, $R_3 = 50$ Ом и $C = 80$ мкФ.

7.20. Найти переходные токи в цепи и напряжение на индуктивной катушке при замыкании контакта K в момент $t = 0$ (рис. 7.18, *б*).

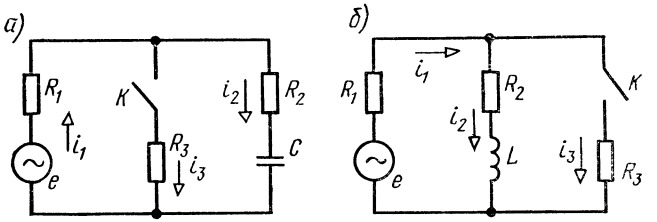


Рис. 7.18

Даны: $e = 100\sin(314t + 60°)$ В, $R_1 = 25$ Ом, $R_2 = 20$ Ом, $R_3 = 30$ Ом и $L = 0{,}1$ Гн.

Задачу решить методами контурных токов и узловых потенциалов.

7.21. Напряжение $u = U_0 e^{-\delta t}$ ($U_0 = 10$ В, $\delta = 2$ с$^{-1}$) включается в цепь, состоящую из последовательно соединенных резистора сопротивлением $R = 2$ Ом, и катушки, индуктивность которой $L = 1$ Гн.

Найти закон изменения тока и определить его максимальное значение.

7.22. Цепь, состоящая из последовательно соединенных $R = 2000$ Ом и $C = 50$ мкФ, включается под действие напряжения $u = 100\ e^{-5t}$ В. Найти законы изменения тока и напряжения на конденсаторе.

7.23. Цепь, состоящая из последовательно соединенных $R = 10^4$ Ом и $C = 50$ мкФ, включается под действие напряжения $u = 120\ (1 - e^{-4t})$ В. Найти выражения для тока и напряжения на конденсаторе.

7.24. Цепь, состоящая из источника постоянного тока (J, R), нагруженная на R_1L-ветвь, находится в установившемся режиме (рис. 7.19, *а*). В момент $t = 0$ замыканием контакта K осуществляется коммутация, включающая резистор сопротивлением R_2. Найти закон изменения тока i_1, протекающего через ветвь R_1L после замыкания.

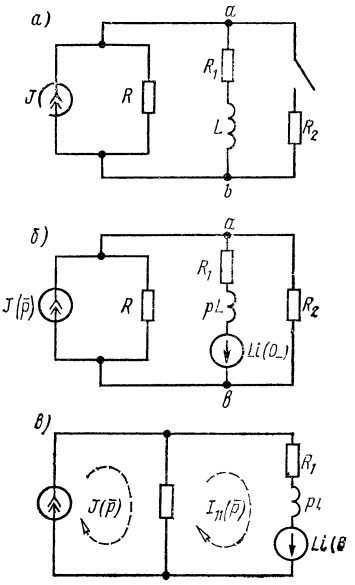


Рис. 7.19

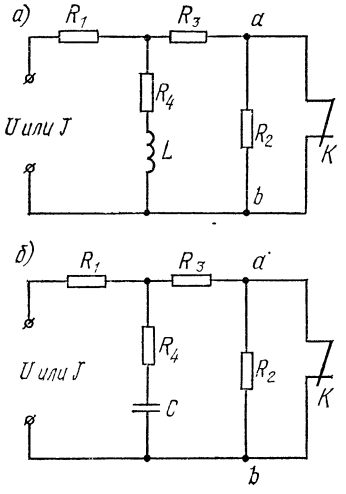


Рис. 7.20

Р е ш е н и е. До коммутации по ветви R_1L протекал постоянный ток

$$i_1(0) = J\,\frac{R}{R+R_1}.$$

Начертим эквивалентную операторную схему замещения после коммутации (рис. 7.19, *б*) и заменим ее схемой рис. 7.19, *в*, в которой параллельно соединенные сопротивления R и R_2 заменим эквивалентным

$$R_{эк} = \frac{R_2R}{R_2+R}.$$

По методу контурных токов имеем

$$I_{11}(p)(R_1 + R_{эк} + pL) - J(p)R_{эк} = Li_1(0_-).$$

Отсюда, учитывая, что $J(p) = J/p$, найдем

$$I_{11}(p) = \frac{Li(0_-) + \dfrac{J}{p}R}{R_1 + R_{эк} + pL} = \frac{i_1(0_-)}{p + \dfrac{R_1+R_{эк}}{L}} + \frac{JR_{эк}}{Lp\left(p + \dfrac{R_1+R_{эк}}{L}\right)}.$$

Используя табл. 7.1, № 5 и 11, найдем оригинал каждого из этих изображений. В результате получим

$$i_1(t) = J\,\frac{R}{R_1R + R_2R + R_1R_2}\left(R_2 + \frac{R_1R}{R_1+R}\,e^{-\frac{R_1R+R_2R+R_1R_2}{L(R_2+R)}t}\right).$$

7.25. Каждая из цепей рис. 7.20, *а* и *б* находится в установившемся режиме. В момент $t = 0$ контакт K мгновенно выключается. Найти u_{ab}. Задачу решить, если к входным зажимам был подключен: а) источник постоянного напряжения U; б) источник постоянного тока J. Для каждой из схем принять $R_1 = R_2 = R_3 = R_4 = R$.

Б. Расчет переходных процессов в цепях с взаимной индуктивностью

7.26. До замыкания контакта K цепь рис. 7.21, *а* находилась в установившемся режиме. Найти выражение тока i_2 как функцию времени после замыкания. Даны: $E = 30$ В, $R = 100$ Ом, $R_1 = 200$ Ом, $L_1 = L_2 = 0{,}3$ Гн, $M = 0{,}1$ Гн. Составить операторную схему замещения.

Р е ш е н и е. Для схемы после коммутации запишем уравнения Кирхгофа для мгновенных величин:

$$E = iR + i_1R_1 + L_1\frac{di_1}{dt} + M\frac{di_2}{dt}; \quad (1)$$

$$E = iR + L_2\frac{di_2}{dt} + M\frac{di_1}{dt}; \quad (2)$$

$$i = i_1 + i_2. \quad (3)$$

Перейдем к операторной форме записи этих уравнений, учтя ненулевое значение тока $i_1(0_-) = E/(R_1 + R_1)$:

$$E(\overline{p}) = RI(\overline{p}) + R_1I_1(\overline{p}) + pL_1I_1(\overline{p}) - L_1i_1(0_-) + pMI_2(\overline{p}); \quad (1a)$$

$$E(\overline{p}) = RI(\overline{p}) + pL_2I_2(\overline{p}) + pMI_1(\overline{p}) - Mi_1(0_-). \quad (2a)$$

$$I(\overline{p}) = I_1(\overline{p}) + I_2(\overline{p}). \quad (3a)$$

Решим эти уравнения относительно $I_2(\overline{p})$, и учитывая, что $E(\overline{p}) = E/p$, получим

$$I_2(\overline{p}) = \frac{p\{E(L_1 - M) - [R(L_1 - M) + R_1M]i_1(0_-)\} + ER_1}{p[p^2(L_1L_2 - M^2) + p(L_1R + L_2R + L_2R_1 - 2MR) + RR_1]}.$$

Подставив числовые значения и сократив числитель и знаменатель на общий множитель $p + 1000$, получим

$$I_2(\overline{p}) = \frac{75}{p(p + 250)} \doteq 0{,}3\,(1 - e^{-250t})\ \text{А} = i_2.$$

Проверка. При $t = 0$ ток $i_2(0) = 0$, что соответствует первому закону коммутации. При $t = \infty$ ток $i_2 = 0{,}3$ А. Действительно, при установившемся режиме ветвь R_1L_1 будет закорочена индуктивностью, по которой проходит ток $i_{2\infty} = E/R = 0{,}3$ А. Схема замещения изображена на рис. 7.21, *б*.

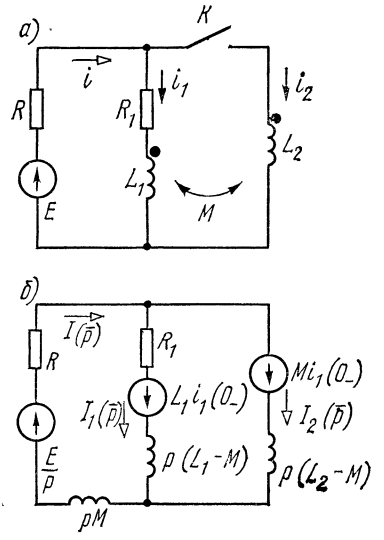


Рис. 7.21

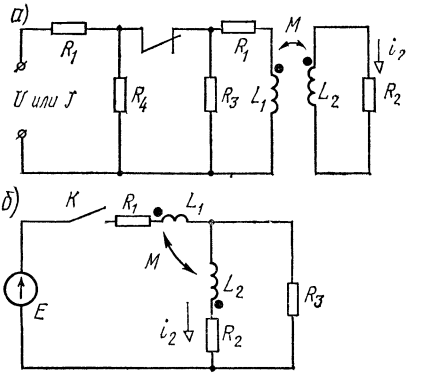


Рис. 7.22

7.27. Схемы рис. 7.22, *а* и *б* имеют индуктивно-связанные элементы. Для каждой из них найти ток i_2 после коммутации.

В схеме рис. 7.22, *а* до размыкания контакта K имел место установившийся режим, вызванный действием постоянных источников. Для этой схемы рассмотреть случаи, когда к входным зажимам был подведен: 1) источник постоянного напряжения $U = 100$ В; 2) источник постоянного тока $J = 0{,}5$ А. Параметры этой схемы: $R_1 = R_3 = R_4 = 150$ Ом, $R_2 = 200$ Ом, $L_1 = 0{,}2$ Гн, $L_2 = 0{,}1$ Гн, $M = 0{,}1$ Гн.

Параметры схемы рис. 7.22, *б*: $E = 30$ В, $R_1 = R_2 = R_3 = 100$ Ом, $L_1 = 0{,}2$ Гн, $L_2 = 0{,}1$ Гн, $M = 0{,}1$ Гн.

ГЛАВА ВОСЬМАЯ

РАСЧЕТ ЛИНЕЙНЫХ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ С СОСРЕДОТОЧЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ МЕТОДОМ ИНТЕГРАЛА ДЮАМЕЛЯ И СПЕКТРАЛЬНЫМ МЕТОДОМ

ОСНОВНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ И СООТНОШЕНИЯ

1. Переходные функции цепи. При подключении цепи в начальный момент $t = 0$ к источнику единичного напряжения или тока реакция цепи (напряжение на любом ее участке или ток в любой ее ветви как функция времени) называется переходной функцией (напряжения или тока соответственно). При подключении цепи к источнику единичного напряжения переходная функция тока называется переходной проводимостью $y(t)$; при подключении цепи к источнику единичного тока переходная функция напряжения называется переходным сопротивлением $z(t)$ (табл. 8.1).

Таблица 8.1

Воздействия	Реакция	
	ток	напряжение
Единичное напряжение	$y\,(t)$	$h\,(t)$
Единичный ток	$h\,(t)$	$z\,(t)$

При подключении в момент t_1 источника постоянного воздействия $F_и$ (например, напряжения с э. д. с. $E_и = F_и$ или источника тока $J_и = F_и$) реакция цепи $f(t)$ [$u(t)$ или $i(t)$] равна:

$$f\,(t) = F_и(t - t_1). \tag{8.1}$$

Переходные функции цепи (переходные характеристики) не зависят от формы и амплитуды действующих в схеме источников э. д. с. и тока и определяются самой схемой и параметрами ее элементов.

Для определения переходной функции цепи можно пользоваться операторным методом. Так, например, изображение переходной проводимости $Y(\overline{p})$ можно получить, если учесть, что изображение единичного напряжения есть $1/p$ (см. табл. 7.1, № 2):

$$Y\,(\overline{p}) = \frac{\frac{1}{p}}{Z\,(\overline{p})} = \frac{1}{pZ\,(\overline{p})}.$$

Оригинал $y(t)$ определяется с использованием таблиц изображений или по теореме разложения.

Примеры. а. При включении на постоянное напряжение U цепи, состоящей из последовательно соединенных R и L, ток, напряжение на индуктивной катушке и напряжение на резисторе равны:

$$i = \frac{U}{R}\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right); \quad u_L = Ue^{-\frac{t}{\tau}}; \quad u_R = U\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right),$$

где $\tau = L/R$ — постоянная времени цепи.

Разделив эти выражения на величину U, найдем, что переходная проводимость $y(t) = \frac{1}{R}(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$, а переходные функции для напряжения на индуктивной катушке и резисторе соответственно равны:

$$h_L(t) = e^{-\frac{t}{\tau}}, \quad h_R(t) = 1 - e^{-\frac{t}{\tau}}.$$

б. При включении на постоянное напряжение U цепи, состоящей из последовательно соединенных R и C, ток и напряжения на конденсаторе и резисторе определяются по формулам

$$i = \frac{U}{R}e^{-\frac{t}{\tau}}; \quad u_C = U\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right); \quad u_R = Ue^{-\frac{t}{\tau}},$$

где $\tau = RC$ — постоянная времени цепи.

Принимая в этих формулах $U = 1$, получим

$$y(t) = \frac{1}{R}e^{-\frac{t}{\tau}}, \quad h_C(t) = 1 - e^{-\frac{t}{\tau}}, \quad h_R(t) = e^{-\frac{t}{\tau}}.$$

Примеры приведены в задачах 8.1 и 8.5.

2. Интеграл Дюамеля. Если на пассивную цепь в момент $t = 0$ включается воздействие $f_и(t)$, являющееся непрерывной функцией вре-

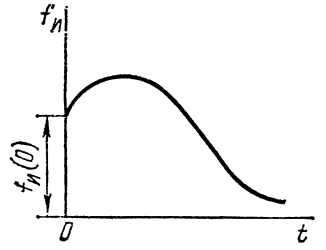


Рис. 8.1

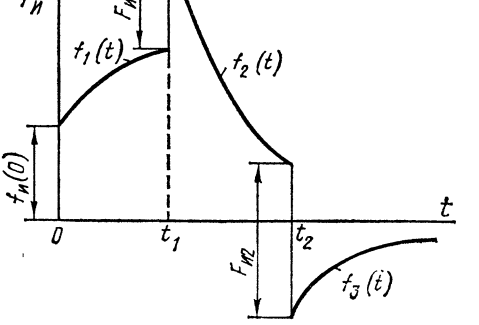


Рис. 8.2

мени (рис. 8.1), то реакцию цепи $f(t)$ определяют интегралом Дюамеля по формуле

$$f(t) = f_{\text{и}}(0)\, h(t) + \int_0^t f'_{\text{и}}(\tau)\, h(t-\tau)\, d\tau, \qquad (8.2)$$

где $f_{\text{и}}(0)$ — начальное значение воздействия; $f'_{\text{и}}(\tau) = \left.\frac{df_{\text{и}}(t)}{dt}\right|_{t=\tau}$ — обозначение производной воздействия; $h(t-\tau)$ — переходная функция, в которой t заменено на $t-\tau$.

Если функция воздействия $f_{\text{и}}(t)$ имеет различные выражения на разных интервалах времени (например, для рис. 8.2):

$$f_{\text{и}}(t) = f_1(t) \text{ при } 0 \leqslant t < t_1;$$
$$f_{\text{и}}(t) = f_2(t) \text{ при } t_1 < t < t_2;$$
$$f_{\text{и}}(t) = f_3(t) \text{ при } t_2 < t \leqslant \infty$$

и, кроме того, имеет или не имеет скачки, то интервал интегрирования разбивается на отдельные участки, а реакцию цепи, рассчитываемую интегралом Дюамеля, записывают для отдельных интервалов времени. В случае воздействия, изображенного на рис. 8.2, имеем:

1) в первом интервале времени от 0 до t_1 (не включая скачок $F_{\text{и}1}$)

$$f(t) = f_{\text{и}}(0)\, h(t) + \int_0^t f'_1(\tau)\, h(t-\tau)\, d\tau; \qquad (8.3\text{а})$$

2) во втором интервале времени от t_1 до t_2 (не включая скачок $F_{\text{и}2}$)

$$f(t) = f_{\text{и}}(0)\, h(t) + \int_0^{t_1} f'_1(\tau)\, h(t-\tau)\, d\tau + F_{\text{и}1} h(t-t_1) +$$
$$+ \int_{t_1}^t f'_2(\tau)\, h(t-\tau)\, d\tau. \qquad (8.3\text{б})$$

Здесь слагаемое $F_{\text{и}1}h(t-t_1)$ обусловлено положительным скачком воздействия в момент t_1;

3) в третьем интервале времени от t_2 до ∞

$$f(t) = f_{\text{и}}(0)\, h(t) + \int_0^{t_1} f'_1(\tau)\, h(t-\tau)\, d\tau + F_{\text{и}1} h(t-t_1) +$$
$$+ \int_{t_1}^{t_2} f'_2(\tau)\, h(t-\tau)\, d\tau - F_{\text{и}2} h(t-t_2) + \int_{t_2}^t f'_3(\tau)\, h(t-\tau)\, d\tau. \qquad (8.3\text{в})$$

Здесь слагаемое $-F_{\text{и}2}h(t-t_2)$ обусловлено отрицательным скачком воздействия в момент t_2.

Входящие в формулы (8.3а, б и в) $h(t-\tau)$, есть $h(t)$, в котором t заменено на $t-\tau$.

Примеры даны в задачах 8.7; 8.9.

3. Импульсные переходные характеристики. При исследовании действия коротких импульсов на линейные цепи используется понятие «дельта-функции» (или «единичной импульсной функции») $\delta(t)$. Реакция цепи на действие дельта-функции называется импульсной переходной характеристикой цепи.

В табл. 8.2 приводятся воздействия и соответствующие импульсные переходные характеристики (реакции) цепи.

Таблица 8.2

Воздействие	Реакция	
	ток	напряжение
Единичное импульсное напряжение	$y_{и}(t)$	$h_{и}(t)$
Единичный импульсный ток	$h_{и}(t)$	$z_{и}(t)$

Поскольку $\delta(\overline{p}) = 1 = p \cdot \frac{1}{p}$ (см. табл. 7.1, № 1), изображение любой импульсной характеристики можно получить умножением соответствующей переходной характеристики на оператор p:

$$h_{и}(\overline{p}) = ph(\overline{p}). \tag{8.4а}$$

Учитывая теорему дифференцирования оригинала, получим

$$h_{и}(t) = h(0)\,\delta(t) + \frac{dh(t)}{dt}. \tag{8.4б}$$

Реакция цепи при произвольном ограниченном воздействии $F(t)$ определяется по формуле

$$f(t) = \int_0^t F(\tau)\, h_{и}'(t-\tau)\, d\tau \tag{8.5а}$$

или с учетом (8.4б)

$$f(t) = F(t)\,h(0) + \int_0^t F(\tau)\, h_{и}'(t-\tau)\, d\tau. \tag{8.5б}$$

Примеры приведены в задачах 8.16 и 8.18.

4. Дифференцирование и интегрирование сигналов. Простейшие дифференцирующие (обостряющие) цепи изображены на рис. 8.3, *а* и *б*, а интегрирующие (сглаживающие) — на рис. 8.4, *а* и *б*. Эти цепи осуществляют приближенное дифференцирование и интегрирование сигналов с определенным спектром частот.

Дифференцирование осуществляется тем качественнее, чем сильнее выполняется неравенство

$$\tau\omega \ll 1, \tag{8.6а}$$

а интегрирование при неравенстве

$$\tau\omega \gg 1. \tag{8.7а}$$

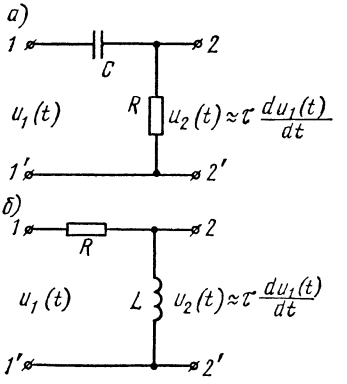


Рис. 8.3

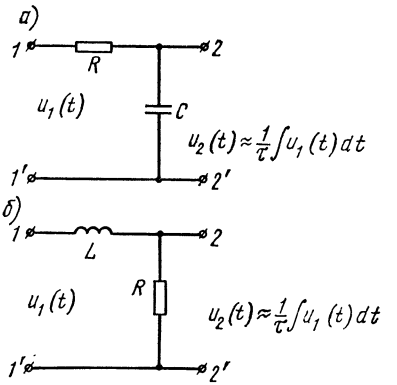


Рис. 8.4

В формулах (8.6а) и (8.7а) постоянная времени $\tau = RC$ для рис. 8.3, *а* и 8.4, *а* и $\tau = L/R$ для рис. 8.3, *б* и 8.4, *б*.

Для импульсных воздействий продолжительностью $t_и$ условие (8.6а) качественного дифференцирования эквивалентно неравенству

$$\tau \ll t_и, \tag{8.6б}$$

а условие (8.7а) качественного интегрирования эквивалентно

$$\tau \gg t_и. \tag{8.7б}$$

Цепи, не удовлетворяющие условиям (8.6а и б) — (8,7а и б), называются п е р е х о д н ы м и (разделительными).

Пример дан в задаче 8.20.

5. Интегральные преобразования Фурье. Сущность спектрального представления состоит в замене заданной функции времени суммой бесконечно большого числа синусоид, амплитуды которых бесконечно малы, а аргументы соседних синусоид отличаются на бесконечно малую величину.

Абсолютно интегрируемая функция времени может быть вычислена в виде наложения своих гармонических составляющих с помощью интеграла Фурье

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega)\, e^{j\omega t}\, d\omega. \tag{8.8}$$

Здесь интенсивность спектральных составляющих определяется спектральной плотностью $F(j\omega)$, которую можно вычислить по формуле Фурье

$$F(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-j\omega t}\, dt. \tag{8.9}$$

Выражения (8.8) и (8.9) называются соответственно о б р а т н ы м и п р я м ы м преобразованиями Фурье.

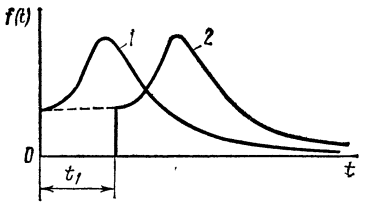


Рис. 8.5

6. Теорема (запаздывания) смещения в области действительного переменного. Если известна спектральная плотность $F(j\omega)$, соответствующая заданной временно́й функции $f(t)$ (кривая *1*, рис. 8.5), то для сдвинутой вдоль оси времени на время запаздывания t_1 временно́й функции $f(t-t_1)$ (кривая *2*) спектральная плотность отличается фазовым множителем $e^{-j\omega t_1}$ и имеет вид $F(j\omega)e^{-j\omega t_1}$

7. Связь между преобразованием Фурье и Лапласа. Сравнение формулы Фурье (8.9) с формулой (7.1) показывает, что для непериодических временны́х функций $f(t)$, отличных от нуля лишь при $t \geqslant 0$ и удовлетворяющих условию интегрируемости по Фурье [$|f(t)| < Me^{-|c_0|t}$, где M и c_0 — положительные и действительные величины], спектральная плотность совпадает с соответствующим изображением Лапласа, в котором параметр p заменен на $j\omega$. Это свойство дает возможность применять таблицы преобразования Лапласа для вычисления функций спектральной плотности и позволяет для заведомо равных нулю при $t < 0$ временны́х функций $f(t)$ вычислить их мгновенные значения, пользуясь изложенной в гл. 7 методикой нахождения оригиналов.

Спектральная плотность $F(j\omega)$ реакции цепи (например, спектральная плотность напряжения $U(j\omega)$ или тока $I(j\omega)$ произвольного элемента цепи) вычисляется по спектральной плотности воздействия $F_и(j\omega)$ источника и соответствующей комплексной функции передачи цепи $T(j\omega)$:

$$F(j\omega) = T(j\omega)\,F_и(j\omega). \qquad (8.10)$$

Частные случаи комплексной функции цепи — сопротивление передачи $Z(j\omega)$ и проводимость передачи $Y(j\omega)$.

Примеры приведены в задачах 8.27; 8.29; 8.32.

УПРАЖНЕНИЯ И ЗАДАЧИ

А. Переходные характеристики. Расчет переходных процессов с помощью интеграла Дюамеля

8.1. Рассчитать переходную проводимость $y(t)$ цепи (рис. 8.6) и переходную функцию $h(t)$ передачи по напряжению. Даны: $R_1 = 2$ кОм, $R_2 = 4$ кОм и $C = 1$ мкФ.

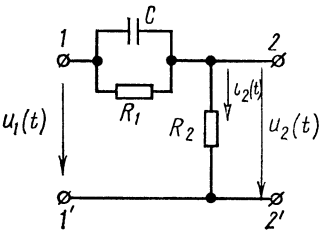


Рис. 8.6

Р е ш е н и е 1. Определяем классическим или операторным методом ток $i_2(t)$ в цепи схемы при подключении к ее зажимам *1—1'* в начальный момент $t = 0$ постоянного воздействия в виде напряжения $u_1(t) = U$:

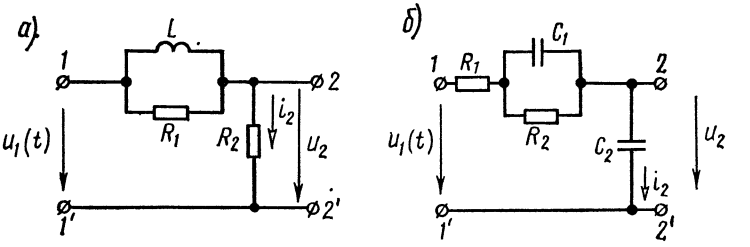


Рис. 8.7

$$i_2 = \frac{U}{R_1 + R_2} + \frac{UR_1}{R_2(R_1 + R_2)} e^{-\frac{R_1+R_2}{CR_1R_2}t} =$$

$$= U \cdot 10^{-3}\left(\frac{1}{6} + \frac{1}{12} e^{-750t}\right) \text{ А}.$$

Разделив это выражение на амплитуду воздействия U, найдем значение переходной проводимости

$$y(t) = (1{,}67 + 0{,}83e^{-750t}) \cdot 10^{-4} \text{ См}.$$

2. Выходное напряжение по закону Ома

$$u_2(t) = R_2 i_2(t) = U(0{,}667 + 0{,}333e^{-750t}) \text{ В}.$$

Разделив это выражение на U, получим переходную функцию передачи по напряжению

$$h(t) = 0{,}667 + 0{,}333e^{-750t}.$$

8.2. Рассчитать в буквенном виде переходную проводимость цепей схем рис. 8.7, *а* и *б* и переходную функцию по напряжению.

8.3. Найти переходную проводимость последовательного LCR-контура, параметры которого $L = 5$ мГн, $C = 5 \cdot 10^3$пФ, $R = 10$ Ом.

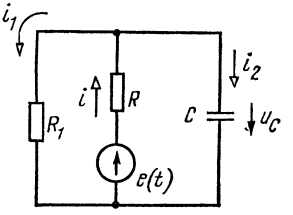


Рис. 8.8

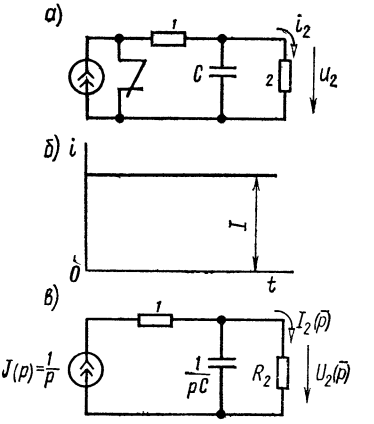


Рис. 8.9

8.4. В цепи рис. 8.8 действует источник э. д. с. $e(t)$. Найти переходную функцию $h_c(t)$ для расчета напряжения на конденсаторе; переходную проводимость $h(t)$ для расчета тока $i(t)$; переходную проводимость $h_1(t)$ для расчета тока $i_1(t)$.

8.5. В цепи рис. 8.9, *а* действует источник тока $i(t)$. Вычислить переходную функцию $h(t)$ для расчета тока $i_2(t)$ и переходное сопротивление $z(t)$ для расчета выходного напряжения $u_2(t)$.

Р е ш е н и е. Переходная функция $h(t)$ совпадает численно со значением переходного тока $i_2(t)$ в рассматриваемой цепи при воздействии единичной функции тока $i = 0$ при $t < 0$ и $i = J = 1$ А при $t \geqslant 0$ (рис. 8.9, *б*). Операторная схема замещения для расчета соответствующего тока показана на рис. 8.9, *в*. Изображение переходной функции (с учетом того, что $J(\overline{p}) = 1/p$) имеет вид

$$H(\overline{p}) = I_2(\overline{p}) = I(\overline{p}) \frac{\frac{1}{pC}}{R_2 + \frac{1}{pC}} = \frac{1}{p(R_2Cp + 1)}.$$

Переходя к оригиналу, находим

$$h(t) = i_2(t) = 1 - e^{-\frac{1}{R_2C}t}.$$

Переходное сопротивление $z(t)$ выражается той же формулой, что и выходное напряжение $u_2(t)$. Поэтому формулы $Z(\overline{p})$ и $U_2(\overline{p})$ тоже совпадают:

$$Z(\overline{p}) = U_2(\overline{p}) = J(\overline{p}) \frac{R_2 \frac{1}{pC}}{R_2 + \frac{1}{pC}} = \frac{R_2}{p(R_2Cp + 1)}.$$

Переходя к оригиналу, с помощью табл. 7.1 найдем переходное сопротивление

$$z(t) = R_2\left(1 - e^{-\frac{1}{R_2C}t}\right).$$

8.6. Для цепей рис. 8.10, *а* и *б* найти переходные функции $h_1(t)$

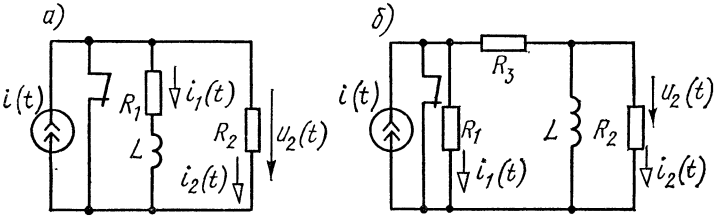


Рис. 8.10

и $h_2(t)$ для расчета токов $i_1(t)$ и $i_2(t)$ и переходное сопротивление $z(t)$ для расчета выходного напряжения $u_2(t)$.

8.7. Цепь, состоящая из последовательно соединенных R и C, включается на прямоугольный импульс напряжения U, действующий в течение времени $t_и$ (рис. 8.11, *а*). Найти выражение напряжения на емкости $u_C(t)$ и тока $i(t)$ в зависимости от времени. Построить кривые $u_C(t)$ и $i(t)$.

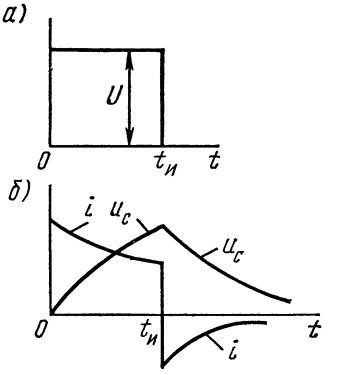


Рис. 8.11

Р е ш е н и е. Расчет u_C (t) ведем с помощью интеграла Дюамеля. В рассматриваемом случае функция подводимого напряжения $u_1(t)$ в момент $t = t_и$ претерпевает скачок, поэтому для решения должны быть использованы формулы (8.3а, б, в). Сначала найдем входящие в эти формулы величины:

переходную функцию по напряжению (см. пример б на с. 226)

$$h(t) = 1 - e^{-\frac{1}{RC}t}; \quad h(t-\tau) = 1 - e^{-\frac{1}{RC}(t-\tau)};$$

напряжение в начальный момент $u_1(0) = U$; производную от заданной функции по новой переменной τ $u'_1(\tau) = 0$.

В интервале времени $0 \leqslant t < t_и$ (не включая скачок напряжения) по формуле (8.3а) определяем

$$u_C(t) = u_1(0)\,h(t) + \int_0^t u'_1(\tau)\,h(t-\tau)\,d\tau = U\left(1 - e^{-\frac{1}{RC}t}\right) + 0. \qquad (1)$$

Ток в этом интервале находим с помощью соотношения

$$i = C\frac{du_C}{dt} = \frac{U}{R}e^{-\frac{1}{RC}t}. \qquad (2)$$

В интервале времени $t > t_1$

$$u_C(t) = u_1(0)\,h(t) + \int_0^{t_и} u'_1(\tau)\,h(t-\tau) - Uh(t-t_и) =$$

$$= U\left(1 - e^{-\frac{1}{RC}t}\right) + 0 - U\left(1 - e^{-\frac{1}{RC}(t-t_и)}\right), \qquad (3)$$

$$i = C\frac{du_C}{dt} = \frac{U}{R}\left(e^{-\frac{1}{RC}t} - e^{-\frac{1}{RC}(t-t_и)}\right). \qquad (4)$$

По уравнениям (1)—(4) на рис. 8.11, *б* качественно построены кривые u_C и i.

8.8. Записать интеграл Дюамеля для выходного напряжения $u_2(t)$ при включении цепи на напряжение $u_1(t)$ (рис. 8.12, *а*, *б* и *в*), если известна ее переходная функция по напряжению $h(t)$.

8.9. Импульс в форме полуволны синусоиды (рис. 8.13, *а*) включается на цепь, содержащую последовательно соединенные $R = 10$ Ом и $L = 0{,}1$ Гн.

Напряжение в интервале времени от 0 до $t_и = T_0/2$ имеет вид $u_1(t) = U_m \sin\omega_0 t$ ($U_m = 10$ мВ, $T_0 = 0{,}02$ с).

Найти ток в функции времени.

Р е ш е н и е. Задачу решим с помощью интеграла Дюамеля. В интервале времени $0 \leqslant t \leqslant t_и$ имеем

$$u_1(t) = U_m \sin\omega_0 t; \quad u_1'(\tau) = \omega_0 U_m \cos\omega_0\tau; \quad u_1(0) = 0; \qquad (1)$$

$$y(t) = \frac{1}{R}\left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right); \quad y(t-\tau) = \frac{1}{R}\left(1 - e^{-\frac{R}{L}(t-\tau)}\right). \qquad (2)$$

Ток в этом интервале находим по формуле интеграла Дюамеля [см. формулу (8.3а)]:

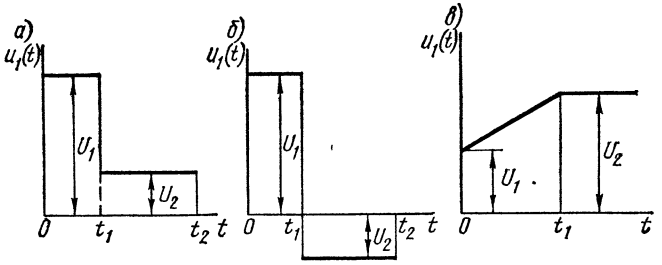


Рис. 8.12

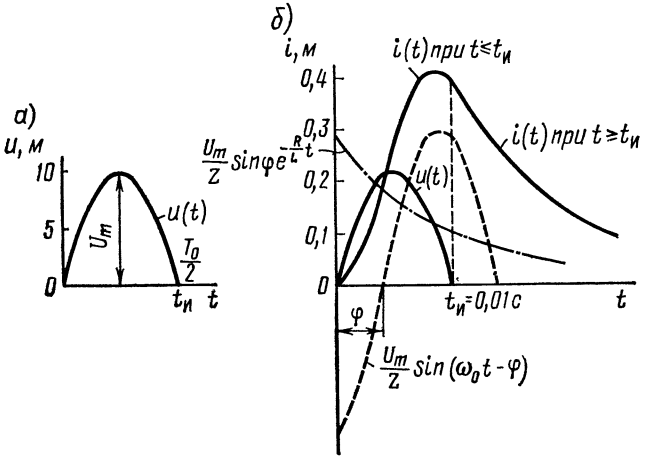


Рис. 8.13

$$i(t) = u(0)\,y(t) + \int_0^t u_1'(\tau)\,y(t-\tau)\,d\tau =$$

$$= 0 + \int_0^t \omega_0 U_m \cos\omega_0\tau\,\frac{1}{R}\left(1 - e^{-\frac{R}{L}(t-\tau)}\right)d\tau =$$

$$= \frac{\omega_0 U_m}{R}\left\{\left[\frac{1}{\omega_0}\sin\omega_0\tau\right]_0^t - e^{-\frac{R}{L}t}\int_0^t e^{-\frac{R}{L}t}\cos\omega_0\tau d\tau^*\right\} =$$

$$= \frac{U_m}{R}\sin\omega_0 t - \frac{U_m}{R}\cdot\frac{\omega_0 L e^{-\frac{R}{L}t}}{R^2 + (\omega_0 L)^2}\left[(R\cos\omega_0 t + \right.$$

$$\left. + \omega_0 L\sin\omega_0 t)\,e^{\frac{R}{L}t} - R\right] = \frac{U_m}{Z}\left[\sin(\omega_0 t - \varphi) + \sin\varphi e^{-\frac{R}{L}t}\right], \qquad (3)$$

где $Z = \sqrt{R^2 + (\omega_0 L)^2}$, $\varphi = \operatorname{arctg}\omega_0 L/R$.

Ток в интервале времени $t_и \leqslant t \leqslant \infty$ определяем с помощью интеграла Дюамеля, разбивая интервал интегрирования на два участка: первый участок $(0 \div t_и)$, где выполняются условия (1), и второй участок $(t_и \div t)$, на котором $u_2(t) = 0$ и $u_2'(\tau) = 0$:

$$i(t) = u(0)\,y(t) + \int_0^{t_и} u_1'(\tau)\,y(t-\tau)\,d\tau + \int_{t_и}^t u_2'(\tau)\,y(t-\tau)\,d\tau =$$

$$= 0 + \int_0^{t_и} \omega_0 U_m \cos\omega_0\tau\,\frac{1}{R}\left(1 - e^{-\frac{R}{L}(t-\tau)}\right)d\tau + 0 =$$

$$= \frac{\omega_0 U_m}{R}\left\{\frac{1}{\omega_0}\sin\omega_0 t_и - e^{-\frac{R}{L}t}\left[\frac{\frac{R}{L}\cos\omega_0\tau + \omega_0\sin\omega_0\tau}{\left(\frac{R}{L}\right)^2 + \omega_0^2}\,e^{\frac{R}{L}\tau}\right]_0^{t_и}\right\} =$$

$$= \frac{U_m}{R}\left\{\sin\omega_0 t_и - \frac{\omega_0 L e^{-\frac{R}{L}t}}{R^2 + (\omega_0 L)^2}\left[(R\cos\omega_0 t_и + \omega_0 L\sin\omega_0 t_и)\,e^{\frac{R}{L}t_и} - R\right]\right\} =$$

$$= \frac{U_m}{R}\left\{\sin\omega_0 t_и - \frac{\omega_0 L e^{-\frac{R}{L}t}}{Z^2}\left[(R\cos\omega_0 t_и + \omega_0 L\sin\omega_0 t_и\cdot e^{\frac{R}{L}t_и} - R\right]\right\}.$$

---

* Этот интеграл является табличным и определяется по формуле

$$\int e^{ax}\cos bx dx = \frac{a\cos bx + b\sin bx}{a^2 + b^2}\,e^{ax}.$$

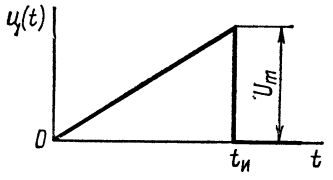


Рис. 8.14

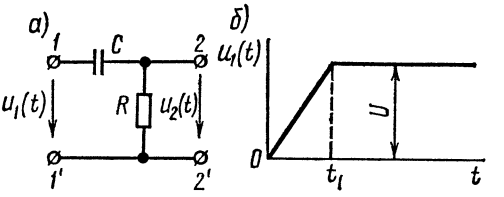


Рис. 8.15

Имея в виду, что $\omega_0 t_и = \omega_0 \frac{T_0}{2} = \pi$ и поэтому $\sin \omega_0 t_и = 0$, $\cos \omega_0 t_и = -1$, последнее выражение после некоторых упрощений можно привести к виду

$$i = \frac{U_m \sin \varphi}{Z} \left(1 + e^{\frac{R}{L} t_и}\right) e^{-\frac{R}{L} t}. \qquad (4)$$

Из выражения (3), полученного для первого интервала времени в момент $t = t_и$, ток

$$i(t_и) = \frac{U_m \sin \varphi}{Z} \left(1 + e^{-\frac{R}{L} t_и}\right).$$

То же значение имеет ток, полученный из выражения (4). Это проверка правильности полученного решения.

По уравнениям (3) и (4) на рис. 8.13, *б* построена (в масштабе) кривая тока.

8.10. Импульс напряжения в форме полуволны синусоиды (см. рис. 8.13, *а*) включается в цепь, содержащую последовательно соединенные R и C. Найти ток. Даны: $u = U_m \sin \omega_0 t$, $U_m = 10$ мВ, $T_0 = 0{,}002$ с, $R = 10$ Ом и $C = 50$ мкФ.

8.11. Цепь, содержащая последовательно соединенные R и C, включается на напряжение, растущее по линейному закону $U\omega_0 t$. Найти выражения тока и напряжения на конденсаторе.

8.12. Цепь из последовательно соединенных $R = 100$ Ом и $C = 25$ мкФ включается на импульс напряжения, линейно нарастающий до момента $t_и = 2$ мс (рис. 8.14). Дано $U_m = 10$ В. Найти выражение напряжения на конденсаторе.

Указание. В интервале $0 < t < t_1$ уравнение напряжения $u = \frac{U_m}{t_и} t$, а при $t > t_и$ $u(t) = 0$. Для решения использовать формулы интеграла Дюамеля (8.3).

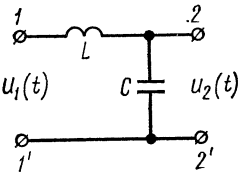


Рис. 8.16

8.13. Импульс напряжения, приведенный в предыдущей задаче ($U_m = 10$ В, $t_и = 2$ мс), подается на цепь из последовательно соединенных $R = 100$ Ом и $L = 0{,}2$ Гн. Найти выражение тока.

8.14. На вход цепи рис. 8.15, *а* подается напряжение u_1, имеющее форму, показанную на

рис. 8.15, *б*. Найти выражение напряжения u_2 на ее выходе, если $R = 1$ кОм, $C = 1$ мкФ, $U = 100$ В и $t_1 = 4$ мс.

8.15. Найти выходное напряжение u_2 (рис. 8.16), если на вход подается линейно растущее напряжение $u_1 = U\omega_0 t$.

Б. Импульсные характеристики. Расчет переходных процессов при импульсных воздействиях

8.16. Рассчитать импульсные характеристики цепи рис. 8.6 при воздействии на вход цепи источника э. д. с., полагая, что реакцией является: а) ток в неразветвленной части цепи; б) напряжение на резистивном элементе.

Р е ш е н и е. Переходные характеристики цепи были определены в задаче 8.1:

$$y(t) = (1{,}67 + 0{,}83e^{-750t}) \cdot 10^{-4} \text{ См}; \quad h(t) = 0{,}667 + 0{,}333e^{-750t}.$$

Для определения импульсных характеристик цепи используем формулу (8.4б):

$$y_и(t) = y(0)\,\delta(t) + \frac{dy(t)}{dt} = 10^{-4}(1{,}67 + 0{,}83)\,\delta(t) -$$

$$-750 \cdot 10^{-4} \cdot 0{,}83e^{-750t} = (2{,}5 \cdot 10^{-4}\delta(t) - 0{,}062e^{-750t}) \text{ См} \cdot \text{с}^{-1};$$

$$h_и(t) = h(0)\,\delta(t) + \frac{dh(t)}{dt} = (0{,}667 + 0{,}333)\,\delta(t) -$$

$$-750 \cdot 0{,}333e^{-750t} = \delta(t) - 250e^{-750t}.$$

8.17. Определить в буквенном виде выражение входной импульсной проводимости цепи рис. 8.7, *а* и импульсную характеристику выходного напряжения, считая, что на входе цепи действует источник э. д. с.

Р е ш е н и е. Используем операторный метод. Изобразим импульсную проводимость неразветвленной цепи с учетом того, что при единичном импульсном воздействии напряжения $U_1(p) = 1$

$$y_и(p) = \frac{U_1(p)}{Z(p)} = \frac{1}{Z(p)} = \frac{1}{\dfrac{R_1 pL}{R_1 + pL} + R_2} = \frac{R_1 + pL}{pL(R_1 + R_2) + R_1 R_2} =$$

$$= \frac{R_1}{R_1 + R_2} \cdot \frac{1}{p + \dfrac{R_1 R_2}{L(R_1 + R_2)}} + \frac{1}{R_1 + R_2} \cdot \frac{p}{p + \dfrac{R_1 R_2}{L(R_1 + R_2)}}.$$

Переходим к оригиналу с учетом соответствий табл. 7.1, № 1 и 5:

$$y_и(t) = \frac{1}{R_1 + R_2}\,\delta(t) + \frac{R_1^2}{L(R_1 + R_2)^2}\, e^{-\frac{R_1 R_2}{L(R_1 + R_2)} t}.$$

Изображение импульсной характеристики выходного напряжения, учитывая, что $U_1(\overline{p}) = 1$, имеет вид

$$H_{\text{и}}(\overline{p}) = \frac{U_1(\overline{p})}{Z(\overline{p})} R_2 = \frac{R_2}{Z(\overline{p})} = \frac{R_2}{R_1 + R_2} + \frac{R_1^2 R_2}{L(R_1 + R_2)^2} \cdot \frac{1}{p + \frac{R_1 R_2}{L(R_1 + R_2)}},$$

а ее оригинал

$$h_{\text{и}}(t) = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \delta(t) + \frac{R_1^2 R_2}{L(R_1 + R_2)^2} e^{-\frac{R_1 R_2}{L(R_1 + R_2)} t}.$$

8.18. На вход цепи рис. 8.10, *б* подан импульс тока $i = Je^{-at}$. Найти напряжение $u_2(t)$, используя импульсную характеристику цепи. Принять, что $R_1 = R_2 = R_3 = R$.

Р е ш е н и е. Найдем импульсную реакцию выходного напряжения $z_{\text{и}}(t)$. Для этого составим формулу изображения импульсной характеристики этого напряжения $U_2(\overline{p})$. Чтобы ее получить, запишем сначала операторное выражение тока $I_3(\overline{p})$, проходящего через R_3:

$$I_3(\overline{p}) = J(\overline{p}) \frac{R_1}{R_1 + R_3 + \frac{R_2 pL}{R_2 + pL}}.$$

Операторное выражение выходного напряжения

$$U_2(\overline{p}) = I_3(\overline{p}) \frac{R_2 pL}{R_2 + pL} = J(p) \frac{R_1}{R_1 + R_3 + \frac{R_2 pL}{R_2 + pL}} \cdot \frac{R_2 pL}{R_2 + pL}.$$

Учитывая, что при единичном импульсном воздействии тока $J(\overline{p}) = 1$ и что $R_1 = R_2 = R_3 = R$, получим

$$U_2(\overline{p}) = Z_{\text{и}}(\overline{p}) = \frac{R^2 pL}{2R^2 + 3RpL} = \frac{R}{3} \cdot \frac{p}{p + \frac{2R}{3L}}.$$

Переходим к оригиналу (см. табл. 7.1, № 6):

$$z_{\text{и}}(t) = \frac{R}{3} \delta(t) - \frac{2R^2}{9L} e^{-\frac{2R}{3L} t} = z_{\text{и}}(0) \delta(t) + z'(t).$$

Для определения $u_2(t)$ используем формулу (8.4б):

$$u_2(t) = i(t) z(0) + \int_0^t i(\tau) z'(t - \tau) d\tau =$$

$$= J \frac{R}{3} e^{-at} - \frac{2R^2}{9L} J \int_0^t e^{-at} e^{-\frac{2R}{3L}(t-\tau)} d\tau =$$

$$= J\frac{R}{3}e^{-at} + \frac{2R^2}{9L}Je^{-\frac{2R}{3L}t}\frac{1}{a-\frac{2R}{3L}}\left[e^{-\left(a-\frac{2R}{3L}\right)\tau}\right]_{\tau=0}^{\tau=t} =$$

$$= J\frac{R}{3}e^{-at} + \frac{2R^2}{9L}\frac{J}{a-\frac{2R}{3L}}\left(e^{-at} - e^{-\frac{2R}{3L}t}\right) =$$

$$= J\frac{R}{3}\cdot\frac{a}{a-\frac{2R}{3L}}e^{-at} - J\frac{2R^2}{9aL-6}e^{-\frac{2R}{3L}t}.$$

8.19. На вход цепи рис. 8.7, *а* подан импульс напряжения $u_1 = U_0e^{-at}$. Найти напряжение u_2, используя импульсную характеристику цепи $h_и(t)$. Вычислить импульсную проводимость для расчета тока, протекающего через: а) резистор, сопротивление которого R_1, б) индуктивную катушку L. Начертить качественно их временные диаграммы.

С помощью найденных в п. а) и б) импульсных характеристик определить токи, протекающие через R_1 и L при воздействии заданного импульса u_1.

В. Дифференцирующие и интегрирующие цепи

8.20. RC-цепь (см. рис. 8.3, *а*), постоянная времени которой $\tau = RC$, включается на прямоугольный импульс напряжения U длительностью $t_и$. Начертить графики зависимости выходного напряжения на сопротивлении от времени для различных отношений $\tau/t_и$, равных: а) ∞; б) 5; в) 1; г) 0,25; д) 0,05. Какое из этих отношений соответствует наиболее качественному дифференцированию?

Р е ш е н и е. В решении задачи 8.7 было получено выражение для i. Выходное напряжение будет определяться выражениями

$$u_2 = iR = Ue^{-\frac{1}{RC}t} \quad \text{при } 0 \leqslant t \leqslant t_и;$$

$$u_2 = iR = U\left(e^{-\frac{1}{RC}t} - e^{-\frac{1}{RC}(t-t_и)}\right) \quad \text{при } t > t_и.$$

По этим выражениям на рис. 8.17, *а—д* построены кривые u_2. Согласно формуле (8.6а) приходим к заключению, что наилучшие условия дифференцирования будут при $\tau/t_и = 0{,}05$. Необходимо отметить, что чем меньше отношение $\tau/t_и$, тем короче импульсы на выходе цепи. При $\tau/t_и \gg 1$ цепь является переходной, и форма импульса на выходе остается почти такой же, как и на входе.

8.21. Выполняются ли условия качественного дифференцирования в схеме рис. 8.3, *а*, если $R = 10$ кОм и $C = 2000$ пФ в случаях

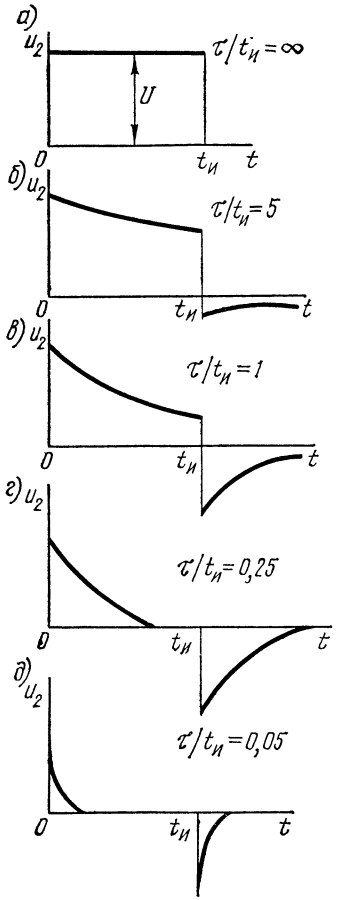


Рис. 8.17

подачи на вход синусоидального напряжения, имеющего угловую частоту: 1) $\omega = 2 \cdot 10^3$ с$^{-1}$, 2) $\omega = 10^5$ с$^{-1}$?

То же в схеме рис. 8.3, *б*, если $R =$ $= 10$ Ом, $L = 0{,}2$ мГн при тех же частотах.

8.22. На вход цепи, состоящей из последовательно соединенных $R = 25$ кОм и $C = 100$ пФ, подается прямоугольный импульс напряжения длительностью $t_и$. В каком из указанных ниже трех случаев цепь будет дифференцирующей, интегрирующей, переходной: 1) $t_и = 15$ мкс, 2) $t_и = 1$ мкс, 3) $t_и = 4$ мкс?

Замечание. Практически цепь считают дифференцирующей, если $t_и > (3 \div 5)\,\tau$, интегрирующей при $t_и < (3 \div 5)\tau$.

8.23. Выполняются ли условия интегрирования: а) для цепи рис. 8.4, *а* с $R = 20$ кОм и $C = 1000$ пФ при длительности входного импульса напряжения $t_и = 100$ мкс; б) для цепи рис. 8.4, *б* с $R = 10$ Ом, $L = 0{,}5$ мГн, $t_и = 10$ мкс?

Г. Спектры непериодических сигналов (интеграл Фурье). Частотные характеристики цепей.

Прохождение непериодических сигналов через линейные цепи

8.24. Найти спектральную плотность импульсов напряжения:

а) $u(t) = 10\ e^{-1000t} \cdot 1(t)$ В; б) $u(t) = \alpha t e^{-\alpha t} \cdot 1(t)$.

Построить зависимости модуля спектральной плотности от частоты.

8.25. Определить спектральную плотность прямоугольного импульса с амплитудой E и длительностью $t_и$ (рис. 8.18, *а*).

Используя это выражение и теорему запаздывания, найти спектральную плотность прямоугольного импульса, расположенного симметрично относительно начала координат (рис. 8.19, *а*). Построить в зависимости от частоты модуль спектральной плотности импульса, если $t_и = 1$ мкс, $E = 10$ В.

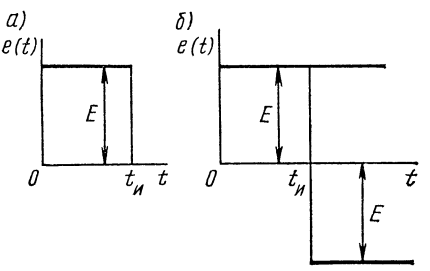


Рис. 8.18

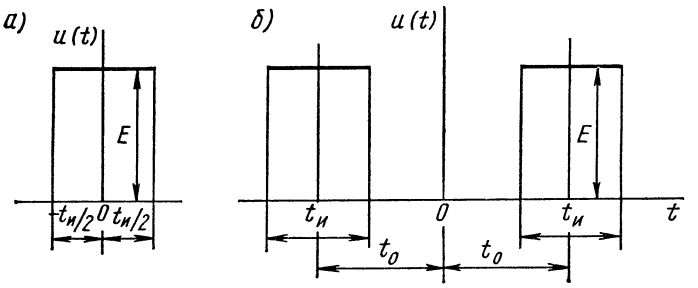


Рис. 8.19

Указание. Спектральная плотность прямоугольного импульса может быть рассчитана двумя способами. 1. По формуле Фурье (8.9):

$$E(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e(t)\, e^{-j\omega t}\, dt = \int_{0}^{t_и} E e^{-j\omega t}\, dt = E t_и \frac{\sin\frac{\omega t_и}{2}}{\frac{\omega t_и}{2}} e^{-j\frac{\omega t_и}{2}}.$$

2. Путем разложения импульса на две ступенчатые составляющие (см. рис. 8.18, *б*) с амплитудами E и $-E$. Изображение по Лапласу первой составляющей (см. табл. 7.1, п. 1) имеет вид $E_1(\overline{p}) = E/p$, а второй — с учетом сдвига вправо на $t_и$ (по теореме запаздывания) $E_2(\overline{p}) = -\frac{E}{p} e^{-pt_и}$. Изображение заданного импульса равно сумме указанных изображений:

$$E(\overline{p}) = E_1(\overline{p}) + E_2(\overline{p}) = \frac{E}{p}\left(1 - e^{-pt_и}\right).$$

Спектральная плотность импульса получится, если в последнем выражении заменить p на $j\omega$.

8.26. Найти спектральную плотность двойного прямоугольного импульса, изображенного на рис. 8.19, *б*.

8.27. Найти спектральную плотность импульса напряжения, имеющего форму равнобедренного треугольника (рис. 8.20, *а*). Построить график модуля спектральной плотности, если $U = 20$ В, $t = 1$ мс.

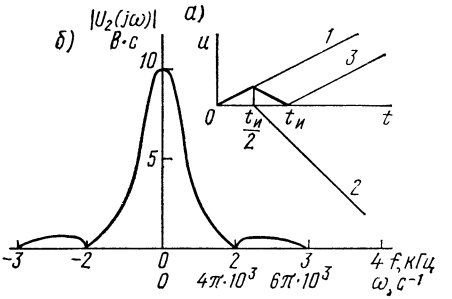


Рис. 8.20

Р е ш е н и е. В целях упражнения $U(j\omega)$ вычислим двумя способами.

1. Найдем спектральную функцию входного напряжения путем использования формулы Фурье (8.5). Для этого запишем уравнение импульса: $u(t) = \frac{2U}{t_и} t$ при $0 \leqslant t \leqslant \frac{t_и}{2}$; $u(t) = -\frac{2U}{t_и} t + 2U$ при $\frac{t_и}{2} \leqslant t \leqslant t_и$; $u(t) = 0$ при $t \geqslant t_и$.

Подставляя $u(t)$ в (8.5) и учитывая, что функция входного напряжения в пределах от $-\infty$ до 0 и от $t_и$ до $+\infty$ равняется нулю, будем иметь

$$U_1(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(t)\, e^{-j\omega t}\, dt = \int_{0}^{t_и/2} \frac{2U}{t_и}\, te^{-j\omega t}\, dt +$$

$$+ \int_{t_и/2}^{t_и} \left(-\frac{2U}{t_и}\, t + 2U\right) e^{-j\omega t}\, dt.$$

Проинтегрировав, получим

$$U_1(j\omega) = \frac{Ut_и}{2} \left(\frac{\sin \frac{\omega t_и}{4}}{\frac{\omega t_и}{4}} \right) e^{-j\frac{\omega t_и}{2}}.$$

По этому уравнению на рис. 8.20, *б* построен график модуля спектральной плотности. В точке $\omega = 0$ модуль равен 10 В · с/рад. Модуль равняется нулю в точках $\omega t_и/4 = k\,\pi$ (k — целое положительное число). Первый нуль ($k = 1$) будет в точке $\omega = 4\pi/t_и = 4\pi \cdot 10^3\ с^{-1}$. Это соответствует частоте $f = \omega/2\pi = 2000$ Гц $= 2$ кГц.

2. Заданное напряжение может быть представлено в виде наложения трех прямых (см. рис. 8.20, *а*): *1* — начинается в момент $t = 0$ и действует неограниченно долго; *2* — имеет отрицательный наклон, крутизну, в два раза бóльшую крутизны прямой *1*, и начинается в момент $t_и/2$; *3* — имеет такой же наклон, как и прямая *1*, но начинается в момент $t_и$ (прямые *2* и *3* также действуют неограниченно долго).

Уравнение напряжения (прямая *1*) имеет вид

$$u_1(t) = \frac{2U}{t_и}\, t.$$

Соответствующее ему изображение по Лапласу (см. табл. 7.1, № 3) имеет вид

$$U_1(\bar{p}) = \frac{2U}{t_и p^2}.$$

Изображения по Лапласу прямых *2* и *3* с учетом теоремы запаздывания будут иметь вид

$$U_2(\bar{p}) = -\frac{4U}{t_и p^2}\, e^{-\frac{pt_и}{2}}; \quad U_3(\bar{p}) = \frac{2U}{t_и p^2}\, e^{-pt_и}.$$

Изображение заданного импульса равно сумме трех полученных изображений:

$$U(\bar{p}) = U_1(\bar{p}) + U_2(\bar{p}) + U_3(\bar{p}) = \frac{2U}{t_и p^2} \left(1 - 2e^{-\frac{pt_и}{2}} + e^{-pt_и}\right).$$

Заменив в этом выражении p на $j\omega$, получим спектральную плотность импульса входного напряжения

$$U_1(j\omega) = -\frac{2U}{t_и\omega^2} + \frac{4U}{t_и\omega^2} e^{-j\frac{\omega t_и}{2}} - \frac{2U}{t_и\omega^2} e^{-j\omega t_и} =$$

$$= \frac{2U}{t_и\omega^2}\left[2e^{-j\frac{\omega t_и}{2}} - (1 + \cos\omega t_и - j\sin\omega t_и)\right] =$$

$$= \frac{2U}{t_и\omega^2}\left[2e^{-j\frac{\omega t_и}{2}} - \left(2\cos^2\frac{\omega t_и}{2} - j2\sin\frac{\omega t_и}{2}\cos\frac{\omega t_и}{2}\right)\right] =$$

$$= \frac{4U}{t_и\omega^2}\left(1 - \cos\frac{\omega t_и}{2}\right)e^{-j\frac{\omega t_и}{2}} = \frac{Ut_и}{2}\left(\frac{\sin\frac{\omega t_и}{4}}{\frac{\omega t_и}{4}}\right)^2 e^{-j\frac{\omega t_и}{2}}.$$

Получен тот же результат, что и при решении задачи способом 1.

8.28. Найти спектральную плотность: а) пилообразного импульса (рис. 8.21, *а*), $t_и = 1$ мкс, $E = 10$ В, б) трапециевидного импульса (рис. 8.21, *б*), $t_1 = 1$ мкс, $t_2 = 1{,}5$ мкс, $E = 10$ В. Для каждого импульса вычислить значение спектральной плотности на частоте 1,5 МГц.

8.29. Определить спектр полуволны синусоиды напряжения (рис. 8.22, *а*), уравнения которой $u = U_m \sin\omega_0 t$ при $0 \leqslant t \leqslant t_и$ и $u = 0$ при $0 \geqslant t \geqslant t_и$.

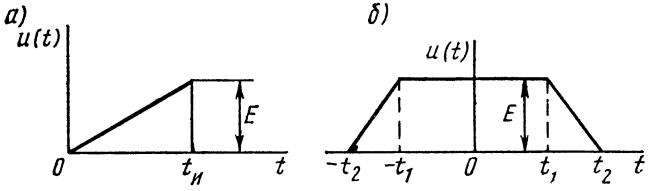


Рис. 8.21

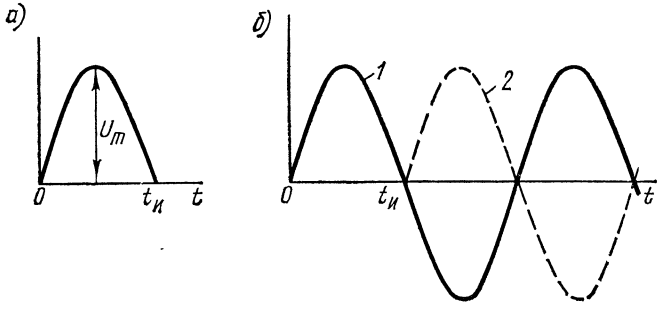


Рис. 8.22

Р е ш е н и е. Решим задачу двумя способами.

1. По формуле Фурье (8.9):

$$U(j\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}u(t)\,e^{-j\omega t}\,dt=\int_{0}^{t_и}U_m\sin\omega_0 t e^{-j\omega t}\,dt^*=$$

$$=U_m\left|\frac{-j\omega\sin\omega_0 t-\omega_0\cos\omega_0 t}{(j\omega)^2+\omega_0^2}\,e^{-j\omega t}\right|_0^{t_и}=\frac{U_m}{\omega_0^2-\omega^2}\times$$

$$\times\left[-j\omega\left(\sin\omega_0 t_и e^{-j\omega t_и}-0\right)-\omega_0\left(\cos\omega_0 t_и e^{-j\omega t_и}-1\right)\right]=$$

$$=\frac{U_m\omega_0}{\omega_0^2-\omega^2}\left(1+e^{-j\omega t_и}\right)=\frac{2U_m\omega_0 e^{-j\frac{\omega t_и}{2}}}{\omega_0^2-\omega^2}\cdot\frac{e^{j\frac{\omega t_и}{2}}+e^{-j\frac{\omega t_и}{2}}}{2}=$$

$$=\frac{2U_m\omega_0\cos\frac{\omega t_и}{2}}{\omega_0^2-\omega^2}e^{-j\frac{\omega t_и}{2}}=\frac{U_m\frac{\pi t_и}{2}\cos\frac{\omega t_и}{2}}{\left(\frac{\pi}{2}\right)^2-\left(\frac{\omega t_и}{2}\right)^2}e^{-j\frac{\omega t_и}{2}}.$$

2. Заданная полуволна синусоиды может быть рассмотрена как результат наложения двух кривых (рис. 8.22, *б*): *1* — синусоиды, начинающейся в момент $t=0$ и действующей неограниченно долго, и *2* — синусоиды, начинающейся в момент $t_и$ и также действующей неограниченно долго. Изображение по Лапласу кривой *1* (см. табл. 7.1) имеет вид

$$\sin\omega_0 t\doteqdot\frac{\omega_0}{\omega_0^2+p^2},$$

а изображение кривой *2* с учетом ее сдвига на $t_и$

$$\sin\omega_0(t-t_и)\doteqdot\frac{\omega_0}{\omega_0^2+p^2}e^{-pt_и}.$$

Изображение заданной кривой равно сумме указанных изображений

$$U(p)=U_m\left(\frac{\omega_0}{\omega_0^2+p^2}+\frac{\omega_0}{\omega_0^2+p^2}e^{-pt_и}\right).$$

Заменив в полученном выражении p на $j\omega$, получим искомую спектральную функцию полуволны синусоиды

$$U(j\omega)=\frac{U_m\omega_0}{\omega_0^2-\omega^2}\left(1+e^{-j\omega t_и}\right),$$

---

* Это табличный интеграл

$$\int e^{ax}\sin bx\,dx=\frac{a\sin bx-b\cos bx}{a^2+b^2}e^{ax}.$$

которая после преобразования дает тот же результат, что и ранее.

8.30. Рассчитать спектральную плотность напряжения телеграфной посылки $u(t) = 50\sin\omega_0 t$ при $0 \leqslant \omega_0 t \leqslant 4\pi$ и $u(t) = 0$ при $\omega_0 t \leqslant 0$ и $\omega_0 t \leqslant 4\pi$ (рис. 8.23), $\omega_0 = 2 \cdot 10^5$ рад/с.

Построить графики амплитудно-фазовой спектральной характеристики.

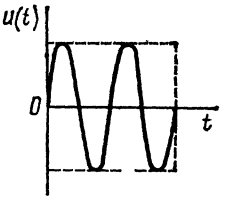


Рис. 8.23

Указание. При решении удобно рассматривать заданный импульс в виде синусоидального напряжения, начинающегося в момент $t = 0$, и накладывающегося на него такого же отрицательного напряжения, но начинающегося в момент, равный $4\pi/\omega_0$, для чего использовать теорему запаздывания.

8.31. Найти временные функции $u(t)$, соответствующие частотным спектрам $U(j\omega)$:

а) $U(j\omega) = \dfrac{U}{j\omega(1 + j\omega CR)}$; б) $U(j\omega) = \dfrac{URC}{1 + j\omega CR}$;

в) $U(j\omega) = \dfrac{U}{(\alpha + j\omega)(1 + j\omega CR)}$; г) $U(j\omega) = \dfrac{1}{j\omega[(j\omega)^2 + a^2]}$.

8.32. Для цепи рис. 8.6 вычислить комплексную функцию передачи по напряжению $T(j\omega) = U_2(j\omega)/U_1(j\omega)$ и найти амплитудно- и фазочастотную (АЧХ и ФЧХ) характеристики и частотную зависимость времени задержки. Даны: $R_1 = R_2 = 100$ Ом, $C = 10$ мкФ.

Р е ш е н и е. Комплексная функция передачи по напряжению при синусоидальном воздействии $u_1 = \sqrt{2}U_1\sin\omega t$ представляет собой отношение действующих значений комплексного напряжения $U_2(j\omega)$ на R_2 к приложенному, которое может быть рассчитано символическим методом:

$$T(j\omega) = \frac{U_2(j\omega)}{U_1(j\omega)} = \frac{R_2 I_2(j\omega)}{U_1(j\omega)}.$$

А так как

$$I_2(j\omega) = \frac{U_1(j\omega)}{R_2 + \dfrac{R_1 \dfrac{1}{j\omega C}}{R_1 + \dfrac{1}{j\omega C}}} = U_1(j\omega)\,\frac{1 + j\omega CR_1}{R_1 + R_2 + j\omega CR_1R_2},$$

то

$$T(j\omega) = \frac{(1 + j\omega CR_1)R_2}{R_1 + R_2 + j\omega CR_1R_2} = R_2\sqrt{\frac{1 + (\omega CR_1)^2}{(R_1 + R_2)^2 + (\omega CR_1R_2)^2}}\,e^{j\psi}.$$

АЧХ

$$|T(j\omega)| = T(\omega) = R_2\sqrt{\frac{1+(\omega CR_1)^2}{(R_1+R_2)^2+(\omega CR_1R_2)^2}} =$$

$$= 100\sqrt{\frac{10^4+(0{,}1\omega)^2}{4\cdot 10^4+(0{,}1\omega)^2}};$$

ФЧХ

$$\psi(\omega) = \operatorname{arctg}\omega CR_1 - \operatorname{arctg}\omega CR_1R_2/(R_1+R_2) =$$

$$= \operatorname{arctg}10^{-3}\omega - \operatorname{arctg}0{,}5\cdot 10^{-3}\omega.$$

Время задержки

$$\tau_3(\omega) = d\psi(\omega)/d\omega = 10^{-3}\left(\frac{1}{1+(10^{-3}\omega)^2} - \frac{0{,}5}{1+(0{,}5\cdot 10^{-3}\omega)^2}\right).$$

8.33. Найти комплексный коэффициент передачи напряжения $T(j\omega)$ для схемы рис. 8.7, *а* и *б* и комплексную проводимость $Y(j\omega)$ для расчета входного тока.

8.34. Для цепи схемы рис. 8.9, *а* вычислить комплексное сопротивление передачи для расчета выходного напряжения $U_2(j\omega)$.

Р е ш е н и е. Комплексное сопротивление передачи $Z(j\omega)$ равно отношению выходного комплексного напряжения $U_2(j\omega)$ к входному комплексному току $I_1(j\omega)$:

$$Z(j\omega) = \frac{U_2(j\omega)}{I_1(j\omega)} = \frac{I(j\omega)\dfrac{R_2\dfrac{1}{j\omega C}}{R_2+\dfrac{1}{j\omega C}}}{I_1(j\omega)} = \frac{R_2}{1+j\omega CR_2}.$$

8.35. В цепи рис. 8.10 действует источник синусоидального тока. Рассчитать комплексные коэффициенты передачи тока $T_{1I}(j\omega)$ и $T_{2I}(j\omega)$ для расчета токов $I_1(j\omega)$ и $I_2(j\omega)$ и сопротивление передачи $Z_2(j\omega)$ для расчета напряжения на параллельных ветвях.

8.36. На вход RC-цепи подается прямоугольный импульс напряжения (см. рис. 8.18, *а*) продолжительностью $t_и = 1$ мс. Найти спектральную функцию выходного напряжения $U_2(j\omega)$ на конденсаторе и построить графики амплитудно- и фазочастотной характеристик, если $U = 20$ В, $R = 100$ Ом, $C = 1$ мкФ.

8.37. Определить спектральную функцию $U_2(j\omega)$ выходного напряжения (на емкости), если на вход LC-цепи (см. рис. 8.16) подается линейно растущее напряжение $u_1(t) = U\omega_0 t$.

8.38. Вычислить комплексный коэффициент передачи $T(j\omega)$ идеальной линии задержки, обеспечивающей сдвиг входного импульса на время задержки $\tau = 0{,}5$ мкс. Амплитуда входного импульса уменьшается при прохождении линии задержки в 100 раз (на 40 дБ).

8.39. Определить комплексный коэффициент передачи идеального дифференцирующего фильтра, осуществляющего операцию

$$u_2(t) = 0{,}1\,\frac{du_1(t)}{dt},$$

где $u_1(t)$ — функция входного напряжения; $u_2(t)$ — функция выходного напряжения.

Указание. Дифференцированию оригинала соответствует умножение изображения на параметр $p = j\omega$.

8.40. Вычислить комплексный коэффициент передачи операционного фильтра, осуществляющего преобразование входного напряжения $u_1(t)$, по формуле

$$u_2(t) = au_1 t + b\,\frac{du_1(t)}{dt} + c\int_{-\infty}^{t} u_1(t)\,dt.$$

Указание. Интегрированию оригинала соответствует деление изображения на параметр $p = j\omega$.

ГЛАВА ДЕВЯТАЯ

ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ЦЕПИ С РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ (ДЛИННЫЕ ЛИНИИ)

ОСНОВНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ И СООТНОШЕНИЯ

1. Параметры однородной линии. Первичными параметрами однородной линии на единицу ее длины являются: R_0 — активное сопротивление, Ом; L_0 — индуктивность, Гн; C_0 — емкость, Ф; G_0 — проводимость изоляции между проводами (утечка), См.

Формулы для расчета первичных параметров длинных линий (воздушных двухпроводных, кабельных и коаксиальных) приведены в приложении 4.

Вторичные параметры однородной линии — $\underline{Z}_в$ и $\underline{\gamma}$. Волновое сопротивление есть отношение комплексов напряжения и тока в бегущей (например, прямой) волне:

$$\underline{Z}_в = \frac{\underline{U}_{пр}}{\underline{I}_{пр}} = \sqrt{\frac{R_0 + j\omega L_0}{G_0 + j\omega C_0}}. \qquad (9.1)$$

Коэффициент распространения характеризует ослабление прямой (или обратной) волны и изменение ее фазы на единицу длины линии:

$$\underline{\gamma} = \sqrt{(R_0 + j\omega L_0)(G_0 + j\omega C_0)} = \gamma e^{j\xi} = \alpha + j\beta, \qquad (9.2)$$

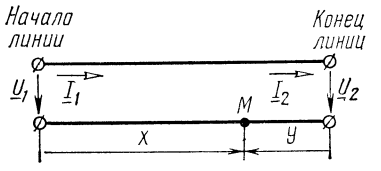


Рис. 9.1

где γ — модуль коэффициента распространения; ξ — аргумент; $\alpha = \gamma\cos\xi$ — коэффициент ослабления; $\beta = \gamma\sin\xi$ — коэффициент фазы.

Коэффициент распространения определяет основные параметры бегущих волн (длину волны λ, фазовую скорость $v_ф$):

$$\lambda = 2\pi/\beta; \quad v_ф = \lambda/T = \omega/\beta. \qquad (9.3)$$

Групповая скорость $v_{гр} = d\omega/d\beta$.

Для воздушных линий из медных, бронзовых и алюминиевых проводов имеют место неравенства (особенно при высоких частотах) $\omega L_0 \gg R_0$ и $\omega C_0 \gg G_0$. В этом случае справедливы приближенные выражения:

$$\left.\begin{aligned} Z_в &= \sqrt{L_0/C_0}; \\ \alpha &= \frac{1}{2}\left(\frac{R_0}{Z_в} + G_0 Z_в\right); \quad \beta = \omega\sqrt{L_0 C_0}; \\ v_ф &= 3 \cdot 10^8 \text{ м/с}. \end{aligned}\right\} \qquad (9.4)$$

Примеры приведены в задачах 9.1—9.4.

2. Уравнение линии в виде прямых и обратных волн. Выражения для определения комплексов напряжения и тока в любой точке M линии (рис. 9.1) в виде наложения прямой и обратной бегущих волн:

при отсчете расстояния x от начала линии до точки M

$$\underline{U}(x) = \frac{\underline{U}_1 + \underline{I}_1 \underline{Z}_в}{2} e^{-\underline{\gamma} x} + \frac{\underline{U}_1 - \underline{I}_1 \underline{Z}_в}{2} e^{\underline{\gamma} x} = \underline{U}_{пр1} e^{-\underline{\gamma} x} + \underline{U}_{обр1} e^{\underline{\gamma} x} = \underline{U}_{пр}(x) + \underline{U}_{обр}(x), \quad (9.5а)$$

$$\underline{I}(x) = \frac{\underline{I}_1 + \frac{\underline{U}_1}{\underline{Z}_в}}{2} e^{-\underline{\gamma} x} - \frac{\frac{\underline{U}_1}{\underline{Z}_в} - \underline{I}_1}{2} e^{\underline{\gamma} x} = \underline{I}_{пр}(x) - \underline{I}_{обр}(x), \quad (9.6а)$$

где $\underline{U}_1$ и $\underline{I}_1$ — комплексы напряжения и тока в начале линии; $\underline{U}_{пр1}$, $\underline{U}_{обр1}$ — соответствующие комплексы напряжения прямой и обратной волн в начале линии; $\underline{U}_{пр}$, $\underline{I}_{пр}$ — прямые (падающие волны); $\underline{U}_{обр}$, $\underline{I}_{обр}$ — обратные (отраженные) волны.

при отсчете расстояния $y = l - x$ от конца линии до точки M

$$\underline{U}(y) = \frac{\underline{U}_2 + \underline{I}_2 \underline{Z}_в}{2} e^{\underline{\gamma} y} + \frac{\underline{U}_2 - \underline{I}_2 \underline{Z}_в}{2} e^{-\underline{\gamma} y} = \underline{U}_{пр} e^{\underline{\gamma} y} + \underline{U}_{обр} e^{-\underline{\gamma} y} = \underline{U}_{пр\,2}(y) + \underline{U}_{обр\,2}(y), \quad (9.5б)$$

$$\underline{I}(y) = \frac{\underline{I}_2 + \frac{\underline{U}_2}{\underline{Z}_в}}{2} e^{\underline{\gamma} y} - \frac{\frac{\underline{U}_2}{\underline{Z}_в} - \underline{I}_2}{2} e^{-\underline{\gamma} y} = \underline{I}_{пр\,2}(y) - \underline{I}_{обр\,2}(y), \quad (9.6б)$$

где $\underline{U}_2$ и $\underline{I}_2$ — комплексы напряжения и тока в конце линии; $\underline{U}_{пр\,2}$, $\underline{U}_{обр\,2}$ — комплексы напряжения прямой и обратной волн в конце линии.

Отношения комплексов токов или напряжений обратной и прямой волн называются коэффициентом отражения $\underline{p}$.

В однородной линии с волновым сопротивлением $\underline{Z}_в$, нагруженной на сопротивление $\underline{Z}_н$, коэффициент отражения по напряжению в конце линии определяют по формуле

$$\underline{p}_н = \frac{\underline{U}_{обр}}{\underline{U}_{пр}} = \frac{\underline{Z}_н - \underline{Z}_в}{\underline{Z}_н + \underline{Z}_в}. \quad (9.7)$$

Если нагрузка длинной линии $\underline{Z}_н = \underline{Z}_в$ (согласованная нагрузка), то коэффициент отражения равен нулю, а напряжение (или ток) совпа-

дает с напряжением (или током) прямой волны. Уравнения напряжения и тока в линии упрощаются, например для напряжения

$$\underline{U}(x) = \underline{U}_{\text{пр}}(x) = \underline{U}_1 e^{-\gamma x}, \quad (9.8а) \qquad \underline{U}(y) = \underline{U}_{\text{пр}}(y) = \underline{U}_2 e^{\gamma y}. \quad (9.8б)$$

Примеры приведены в задачах 9.12; 9.14.

3. Единицы передачи (децибел, непер) характеризуют условия передачи (ослабление) мощности, напряжения, тока.

Коэффициент ослабления характеризует отличие выходной мощности, напряжения, тока от соответствующей входной величины, выражает степень ослабления сигнала при согласованной нагрузке и определяется выражением

$$A = 10 \lg (P_1/P_2) = 20 \lg (U_1/U_2) = 20 \lg (I_1/I_2), \text{ дБ} \quad (9.9а)$$

или

$$A = \frac{1}{2} \ln (P_1/P_2) = \ln (U_1/U_2) = \ln (I_1/I_2), \text{ Нп}. \quad (9.9б)$$

Связь между децибелом и непером:

$$1 \text{ дБ} = 0{,}115 \text{ Нп}, \quad 1 \text{ Нп} = 8{,}69 \text{ дБ}. \quad (9.10)$$

Уровень передачи, характеризующий распределение мощностей, напряжений, токов вдоль линии, есть логарифм отношения некоторой величины (мощности, напряжения, тока) в данной точке x к одноименной величине, принятой для сравнения.

Рассматривают *относительный и абсолютный* уровни передачи.

Относительные уровни передачи по мощности, напряжению и току соответственно равны:

$$p_P = 10 \lg (P_x/P_0), \text{ дБ или } p_P = \frac{1}{2} \ln (P_x/P_0), \text{ Нп}; \quad (9.11а)$$

$$p_U = 20 \lg (U_x/U_0), \text{ дБ или } p_U = \ln (U_x/U_0), \text{ Нп}; \quad (9.11б)$$

$$p_I = 20 \lg (I_x/I_0), \text{ дБ или } p_I = \ln (I_x/I_0), \text{ Нп}. \quad (9.11в)$$

Абсолютные уровни передачи по мощности, напряжению и току соответственно равны:

$$p_{aP} = 10 \lg [P \text{ (мВт)}/1 \text{ (мВт)}], \text{ дБ}$$

или

$$p_{aP} = \frac{1}{2} \ln [P \text{ (мВт)}/1 \text{ (мВт)}]; \quad (9.12а)$$

$$p_{aU} = 20 \lg [U \text{ (В)}/0{,}775 \text{ (В)}], \text{ дБ}$$

или

$$p_{aU} = \ln [U \text{ (В)}/0{,}775 \text{ (В)}];$$

$$p_{aI} = 20 \lg [I \text{ (мА)}/1{,}29 \text{ (мА)}], \text{ дБ} \quad (9.12б)$$

или

$$p_{aI} = \ln [I\ (\text{мА})/1{,}29\ (\text{мА})]. \qquad (9.12\text{в})$$

Пример дан в задаче 9.25.

4. Уравнения длинной линии в гиперболических функциях.

$$\underline{U} = \underline{U}_1 \operatorname{ch} \underline{\gamma} x - \underline{I}_1 \underline{Z}_\text{в} \operatorname{sh} \underline{\gamma} x; \quad (9.13\text{а})$$

$$I = I_1 \operatorname{ch} \underline{\gamma} x - \frac{\underline{U}_1}{\underline{Z}_\text{в}} \operatorname{sh} \underline{\gamma} x; \quad (9.14\text{а})$$

$$\underline{U} = \underline{U}_2 \operatorname{ch} \underline{\gamma} y + \underline{I}_2 \underline{Z}_\text{в} \operatorname{sh} \underline{\gamma} y; \quad (9.13\text{б})$$

$$\underline{I} = \underline{I}_2 \operatorname{ch} \underline{\gamma} y + \frac{\underline{U}_2}{\underline{Z}_\text{в}} \operatorname{sh} \underline{\gamma} y. \quad (9.14\text{б})$$

Входное сопротивление линии представляет отношение комплексных напряжения к току в точках подключения источника:

$$\underline{Z}_1 = \frac{\underline{U}_1}{\underline{I}_1} = \underline{Z}_\text{в} \frac{\underline{Z}_\text{н} + \underline{Z}_\text{в} \operatorname{th} \underline{\gamma} l}{\underline{Z}_\text{в} + \underline{Z}_\text{н} \operatorname{th} \underline{\gamma} l} = \underline{Z}_\text{в} \operatorname{th} (\underline{\gamma} l + \underline{n}), \qquad (9.15)$$

где

$$\operatorname{th} \underline{n} = \frac{\underline{Z}_\text{н}}{\underline{Z}_\text{в}} \text{ или } \underline{n} = \frac{1}{2} \ln \frac{\underline{Z}_\text{в} + \underline{Z}_\text{н}}{\underline{Z}_\text{в} - \underline{Z}_\text{н}}.$$

В режимах холостого хода и короткого замыкания входное сопротивление

$$\underline{Z}_\text{х} = \frac{\underline{Z}_\text{в}}{\operatorname{th} \underline{\gamma} l}; \quad \underline{Z}_\text{к} = \underline{Z}_\text{в} \operatorname{th} \underline{\gamma} l. \qquad (9.16)$$

Пример приведен в задаче 9.13.

Однородная линия при заданной частоте источника питания может быть заменена симметричным четырехполюсником, коэффициенты которого связаны со вторичными параметрами линии соотношениями

$$\underline{A}_{11} = \underline{A}_{22} = \operatorname{ch} \underline{\gamma} l; \quad \underline{A}_{12} = \underline{Z}_\text{в} \operatorname{sh} \underline{\gamma} l; \quad \underline{A}_{21} = \operatorname{sh} \underline{\gamma} l / \underline{Z}_\text{в}. \qquad (9.17)$$

5. Линия без искажений. Это такая линия, в которой ослабление и фазовая скорость распространения волны не зависят от частоты.

Для неискажающей линии должно выполняться условие

$$R_0/G_0 = L_0/C_0. \qquad (9.18)$$

При этом

$$\left.\begin{aligned} Z_\text{в} = \sqrt{L_0/C_0}, \quad \alpha = \sqrt{R_0 G_0}, \quad \beta = \omega \sqrt{L_0 C_0}, \\ v_\Phi = \omega/\beta = 1/\sqrt{L_0 C_0}. \end{aligned}\right\} \qquad (9.19)$$

Линия без потерь ($R_0 = G_0 = 0$) — неискажающая; для нее

$$\alpha = 0, \quad \beta = \omega \sqrt{L_0 C_0}, \quad \underline{\gamma} = j\beta; \quad Z_\text{в} = \sqrt{L_0/C_0}, \quad v_\Phi = 1 \Big/ \sqrt{L_0 C_0}. \qquad (9.20)$$

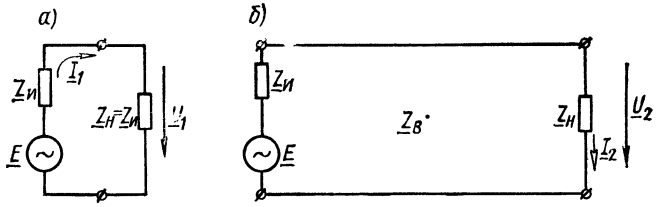


Рис. 9.2

Пример дан в задаче 9.19.

6. Рабочее ослабление однородной линии. Это ослабление есть половина натурального логарифма отношения модуля комплексного произведения $\underline{U}_1$ на $\underline{I}_1$ при непосредственном подключении нагрузочного сопротивления, равного сопротивлению источника, к источнику с э. д. с. $\underline{E}$ и внутренним сопротивлением $\underline{Z}_и$ (рис. 9.2, *а*) к модулю комплексного произведения $\underline{U}_2$ на $\underline{I}_2$ при условии, что нагрузочное сопротивление $\underline{Z}_н$ подключено к концу линии, в начале которой имеется тот же источник с $\underline{E}$ и $\underline{Z}_и$ (рис. 9.2, *б*):

$$A_р = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{\underline{U}_1\underline{I}_1}{\underline{U}_2\underline{I}_2}\right|, \quad Нп = 10\lg\left|\frac{\underline{U}_1\underline{I}_1}{\underline{U}_2\underline{I}_2}\right|, \quad дБ =$$

$$= \alpha l + \ln\left|\frac{\underline{Z}_и + \underline{Z}_в}{2\sqrt{\underline{Z}_и\underline{Z}_в}}\right| + \ln\left|\frac{\underline{Z}_н + \underline{Z}_в}{2\sqrt{\underline{Z}_н\underline{Z}_в}}\right| + \ln\left|1 - \underline{p}_и\underline{p}_н e^{-2\underline{\gamma}l}\right|, \quad (9.21)$$

где

$$\underline{p}_и = \frac{\underline{Z}_1 - \underline{Z}_в}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_в}; \quad \underline{p}_н = \frac{\underline{Z}_н - \underline{Z}_в}{\underline{Z}_н + \underline{Z}_в}.$$

Пример дан в задаче 9.23.

7. Линия без потерь ($R_0 = G_0 = 0$). В линии без потерь гиперболические функции заменяются круговыми:

$\operatorname{ch}\underline{\gamma}l = \operatorname{ch} j\beta l = \cos\beta l; \quad \operatorname{sh}\underline{\gamma}l = \operatorname{sh} j\beta l = j\sin\beta l.$

Уравнения длинной линии без потерь в комплексной форме:

при отсчете расстояний x от начала линии

$$\underline{U}(x) = \underline{U}_1\cos\beta x - j\underline{I}_1\underline{Z}_в\sin\beta x; \quad (9.22а)$$

$$\underline{I}(x) = \underline{I}_1\cos\beta x - j\frac{\underline{U}_1}{\underline{Z}_в}\sin\beta x. \quad (9.23а)$$

при отсчете расстояний y от ее конца

$$\underline{U}(y) = \underline{U}_2\cos\beta y + j\underline{I}_2\underline{Z}_в\sin\beta y; \quad (9.22б)$$

$$\underline{I}(y) = \underline{I}_2\cos\beta y + j\frac{\underline{U}_2}{\underline{Z}_в}\sin\beta y. \quad (9.23б)$$

Входное сопротивление линии без потерь

$$\underline{Z}_{вх} = Z_в \frac{\underline{Z}_н + j\underline{Z}_в \operatorname{tg}\beta l}{\underline{Z}_в + j\underline{Z}_н \operatorname{tg}\beta l} = \underline{Z}_в \operatorname{th}(\underline{n} + j\beta l), \tag{9.24}$$

где

$$\operatorname{th}\underline{n} = \frac{\underline{Z}_н}{\underline{Z}_в} \text{ или } \underline{n} = \frac{1}{2} \ln \frac{\underline{Z}_в + \underline{Z}_н}{\underline{Z}_в - \underline{Z}_н}.$$

В режимах холостого хода и короткого замыкания входное сопротивление линии без потерь

$$\underline{Z}_x = \underline{Z}_в / j \operatorname{tg}\beta l; \quad \underline{Z}_k = j\underline{Z}_в \operatorname{tg}\beta l. \tag{9.25}$$

Распределение действующих значений напряжения и тока вдоль линии без потерь при ее нагрузке на чисто активное сопротивление $R_н$ определяется уравнениями (при отсчете расстояния y от конца линии):

$$\left.\begin{aligned} U(y) &= U_2 \sqrt{\cos^2 \beta y + m^2 \sin^2 \beta y}; \\ I(y) &= \frac{I_2}{m} \sqrt{m^2 \cos^2 \beta y + \sin^2 \beta y}, \end{aligned}\right\} \tag{9.26}$$

где

$$m = Z_в/R_н.$$

О степени согласования линии с нагрузкой можно судить по кривой распределения действующих значений напряжения (тока), характеризуемой коэффициентами бегущей волны $K_{бв}$ и стоячей волны $K_{св}$:

$$K_{бв} = \frac{U_{min}}{U_{max}} = \frac{U_{пр} - U_{обр}}{U_{пр} + U_{обр}} = \frac{1 - K_{отр}}{1 + K_{отр}} = \left\{\begin{array}{l} m \text{ (при } R_н > Z_в), \\ 1/m \text{ (при } R_н < Z_в). \end{array}\right\} \tag{9.27}$$

$$K_{св} = 1/K_{бв}.$$

Примеры даны в задачах 9.27; 9.29; 9.31; 9.32.

8. Применение отрезков линии в качестве сопротивлений, колебательных систем для согласования сопротивлений и др.

Примеры даны в задачах 9.36; 9.37.

УПРАЖНЕНИЯ И ЗАДАЧИ

А. Первичные и вторичные параметры линий. Фазовая скорость. Длина волны

9.1. Рассчитать первичные параметры стальной воздушной двухпроводной цепи при температуре окружающей среды $t° = -14°C$ при сухой погоде, если расстояние между осями проводов $a = 60$ см, их диаметр $d = 4$ мм. Частота тока $f = 800$ Гц. Относительную магнитную проницаемость проводов принять равной 120.

Р е ш е н и е. Вначале по формуле (П4.1) определяем сопротивление 1 км линии при постоянном токе и при температуре + 20°С:

$$R_{20} = 0{,}138\ \frac{2550}{4^2} = 22\ \text{Ом/км}.$$

Величина $\rho = 0{,}138$ Ом · м/мм^2 взята из табл. П 4.1. Сопротивление при постоянном токе при $t^\circ = -14$°С находим по формуле (П4.2):

$$R_{t^\circ} = R_{20}[1 + \alpha_R (t^\circ - 20^\circ)] = 22[1 + 0{,}0046(-14 - 20)] =$$

$$= 18{,}5\ \text{Ом/км}.$$

Значение $\alpha_R = 0{,}0046$ взято из табл. П4.1.

Активное сопротивление 1 км линии при переменном токе определим по формуле (П4.3).

Для этого сначала по формуле (П4.4) вычислим коэффициент

$$x = 7{,}09\sqrt{\frac{f\mu}{10^4 R_{t^\circ}}} = 7{,}09\sqrt{\frac{800 \cdot 120}{10^4 \cdot 18{,}5}} = 5{,}1.$$

Применяя линейное интерполирование, по табл. П4.2 найдем $F(x)$, соответствующее $x = 5{,}1$:

$$F(x) = 1{,}043 + \frac{1{,}394 - 1{,}043}{10} = 1{,}078.$$

Итак, по формуле (П4.3) активное сопротивление 1 км линии

$$R_0 = R_{t^\circ}[1 + F(x)] = 18{,}5 \cdot 2{,}078 = 38{,}4\ \text{Ом/км}.$$

Индуктивность 1 км двухпроводной воздушной линии определим по формуле (П4.5а). Предварительно по табл. П4.2, используя линейное интерполирование, найдем коэффициент $Q(x)$, соответствующий $x = 5{,}1$:

$$Q(x) = 0{,}556 - \frac{0{,}556 - 0{,}465}{10} = 0{,}547.$$

Искомая индуктивность по формуле (П4.5а) равна

$$L_0 = \left[4 \ln \frac{a}{r} + Q(x)\mu\right] 10^{-4} =$$

$$= \left(4 \ln \frac{600}{2} + 0{,}547 \cdot 120\right) 10^{-4} = (4 \cdot 5{,}7 + 65{,}6)\, 10^{-4} =$$

$$= 88{,}4 \cdot 10^{-4}\ \text{Гн/км}.$$

Емкость 1 км двухпроводной линии вычисляем по формуле (П4.6):

$$C_0 = \frac{1{,}05}{36 \ln \frac{a}{r}} 10^{-6} = \frac{1{,}05 \cdot 10^{-6}}{36 \ln \frac{600}{2}} = 5{,}12 \cdot 10^{-9}\ \text{Ф/км}.$$

Активную проводимость между проводами найдем по формуле (П4.7), учитывая, что проводимость изоляции при сухой погоде $G' = 0{,}01 \cdot 10^{-6}$ См/км, а n — коэффициент диэлектрических потерь в изоляторах; при этой погоде он равен $0{,}05 \cdot 10^{-9}$;

$$G_0 = G' + nf = 0{,}01 \cdot 10^{-6} + 0{,}05 \cdot 10^{-9} \cdot 800 = 0{,}05 \cdot 10^{-6} \text{ См/км}.$$

9.2. Для линии длиной $l = 38$ км, первичные параметры которой были найдены в задаче 9.1, при частоте $f = 800$ Гц определить: модуль $Z_в$ и фазу $\varphi_в$ волнового сопротивления, его активную и реактивную составляющие; коэффициенты ослабления, фазы и распространения (α, β, и $\underline{\gamma}$); фазовую скорость распространения электромагнитной волны вдоль линии $v_ф$ и длину волны λ; отношение $U_{2пр}/U_{1пр} = I_{2пр}/I_{1пр}$ при нагрузке линии на сопротивление, равное волновому, где $U_{2пр}$ и $I_{2пр}$ — амплитуды напряжения и тока прямой (падающей) волны в конце линии; $U_{1пр}$ и $I_{1пр}$ — то же, в начале линии. Чему равна задержка во времени при прохождении волной всей длины линии?

Р е ш е н и е. Волновое сопротивление по формуле (9.1) равно

$$\underline{Z}_в = \sqrt{\frac{R_0 + j\omega L_0}{G_0 + j\omega C_0}} = \sqrt{\frac{38{,}4 + j2\pi \cdot 800 \cdot 88{,}4 \cdot 10^{-4}}{0{,}05 \cdot 10^{-6} + j2\pi \cdot 800 \cdot 5{,}12 \cdot 10^{-9}}} =$$

$$= \sqrt{\frac{38{,}4 + j44{,}5}{10^{-6}(0{,}05 + j25{,}7)}} = \sqrt{\frac{58{,}8e^{j49°10'}}{10^{-6} \cdot 25{,}7e^{j89°52'}}} =$$

$$= 1510e^{-j20°21'} \text{ Ом}.$$

Активная и реактивная составляющие волнового сопротивления:

$$R_в = 1510 \cos 20°21' = 1415 \text{ Ом};$$

$$X_в = -1510 \sin 20°21' = -525 \text{ Ом}.$$

Коэффициент распространения по (9.2)

$$\underline{\gamma} = \sqrt{(R_0 + j\omega L_0)(G_0 + j\omega C_0)} =$$

$$= \sqrt{58{,}8e^{j49°10'} \cdot 10^{-6} \cdot 25{,}7e^{j89°52'}} = 38{,}8 \cdot 10^{-3}e^{j69°31'} \text{ км}^{-1}.$$

Отсюда коэффициенты ослабления и фазы:

$$\alpha = 38{,}8 \cdot 10^{-3} \cos 69°31' = 13{,}6 \cdot 10^{-3} \text{ Нп/км} = 0{,}12 \text{ дБ/км};$$

$$\beta = 38{,}8 \cdot 10^{-3} \sin 69°31' = 36{,}4 \cdot 10^{-3} \text{ рад/км}.$$

Фазовая скорость и длина волны в линии определяются по формулам (9.4) и (9.3):

$$v_ф = \frac{\omega}{\beta} = \frac{2\pi \cdot 800}{36{,}4 \cdot 10^{-3}} = 138\,000 \text{ км/с};$$

$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta} = \frac{6{,}28}{38{,}4 \cdot 10^{-3}} = 172{,}6 \text{ км}.$$

Отношения амплитуд напряжений и тока для прямой волны в конце и начале линии при согласованной нагрузке, как это следует из (9.8а), при $x = l$ имеют вид

$$U_{2\,\text{пр}}/U_{1\,\text{пр}} = I_{2\,\text{пр}}/I_{1\,\text{пр}} = \left| e^{-\underline{\gamma} l} \right| = e^{-\alpha l} = e^{-13{,}6 \cdot 10^{-3} \cdot 38} = e^{-0{,}516} = 0{,}597.$$

Задержка во времени $t = l/v_\Phi = 38/138\,000 = 2{,}75 \cdot 10^{-4}$ с.

9.3. Найти первичные и вторичные параметры симметричной кабельной линии при частоте $f = 220$ кГц. Жилы медные, диаметром $d = 1{,}2$ мм, расстояние между центрами проводов $a = 4{,}15$ мм. Скрутка звездная (коэффициент p, учитывающий этот тип скрутки жил кабеля, равен 5). Эквивалентная диэлектрическая проницаемость изоляции $\varepsilon = 1{,}4$, тангенс угла потерь $\operatorname{tg}\delta = 160 \cdot 10^{-4}$. Температура среды 20°С. Определить фазовую скорость и длину волны в кабеле.

Р е ш е н и е. Сопротивление 1 км кабеля при 20°С постоянному току определяется по формуле (П4.1):

$$R_{20} = \rho \frac{25\,500}{d^2} = 0{,}01785 \frac{2550}{1{,}2^2} = 31{,}6 \text{ Ом/км}.$$

Значение $\rho = 0{,}01785 \dfrac{\text{Ом} \cdot \text{м}}{\text{мм}^2}$ взято из табл. П4.1.

Активное сопротивление 1 км кабеля при переменном токе вычислим по формуле (П4.8). Для этого вначале по формуле (П4.4) вычислим коэффициент

$$x = 7{,}09 \sqrt{\frac{f\mu}{10^4 R_{20}}} = 7{,}09 \sqrt{\frac{220 \cdot 10^3 \cdot 1}{10^4 \cdot 31{,}6}} = 5{,}9.$$

По табл. П4.2, применяя линейное интерполирование, найдем:

$$F(x) = 1{,}36; \quad G(x) = 0{,}91; \quad H(x) = 0{,}57; \quad Q(x) = 0{,}473.$$

Активное сопротивление 1 км кабеля определяется по формуле (П4.8):

$$R' = 31{,}6 \left(1 + 1{,}36 + \frac{5 \cdot 0{,}91 \left(\dfrac{1{,}2}{4{,}15} \right)^2}{1 - 0{,}57 \left(\dfrac{1{,}2}{4{,}15} \right)^2} \right) = 87{,}1 \text{ Ом/км}.$$

В диапазоне высоких частот (свыше 30 кГц) еще учитывают дополнительное сопротивление кабельной линии, обусловливаемое потерями на вихревые токи в соседних проводниках и свинцовой оболочке [см. формулу (П4.9)]:

$$\Delta R' = 8 \sqrt{\frac{f}{200\,000}} = 8 \sqrt{\frac{220\,000}{200\,000}} = 8{,}4 \text{ Ом/км}.$$

Окончательно получаем величину активного сопротивления единицы длины кабеля:

$$R_0 = R' + \Delta R' = 87{,}1 + 8{,}4 = 95{,}5 \text{ Ом/км}.$$

Погонные индуктивность и емкость двухпроводной кабельной цепи определяем по формулам (П4.5а) и (П4.11):

$$L_0 = \left(4 \ln \frac{4{,}15 - 0{,}6}{0{,}6} + 0{,}473\right) \cdot 10^{-4} = 0{,}76 \cdot 10^{-3} \text{ Гн/км};$$

$$C_0 = \frac{1{,}4 \cdot 10^{-6}}{36 \ln \left(0{,}6 \dfrac{4{,}15}{0{,}6}\right)} = 27{,}5 \cdot 10^{-9} \text{ Ф/км}.$$

Проводимость изоляции 1 км кабельной линии находим по (П4.12):

$$G_0 = \omega C \operatorname{tg}\delta = 2 \cdot 3{,}14 \cdot 220 \cdot 10^3 \cdot 27{,}5 \cdot 10^{-9} \cdot 160 \cdot 10^{-4} =$$

$$= 610 \cdot 10^{-6} \text{ См/км}.$$

Вторичные параметры кабеля находим по (9.1) и (9.2):

$$\underline{Z}_в = \sqrt{\frac{95{,}5 + j2 \cdot 3{,}14 \cdot 220 \cdot 10^3 \cdot 0{,}76 \cdot 10^{-3}}{610 \cdot 10^{-6} + j2 \cdot 3{,}14 \cdot 220 \cdot 10^3 \cdot 27{,}5 \cdot 10^9}} =$$

$$= \sqrt{\frac{95{,}5 + j1050}{10^{-6}(610 + j38\,000)}} = \sqrt{\frac{1050 e^{j84°47'}}{38\,000 \cdot 10^{-6} e^{j89°5'}}} = 166 e^{-j2°9'} \text{ Ом};$$

$$\underline{\gamma} = \sqrt{1050 e^{j84°47'} \cdot 38\,000 \cdot 10^{-6} e^{j89°5'}} = 6{,}32 e^{j86°56'} \text{ км}^{-1};$$

$$\alpha = 6{,}32 \cos 86°56' = 340 \cdot 10^{-3} \text{ Нп/км} \approx 3 \text{ дБ/км};$$

$$\beta = 6{,}32 \sin 86°56' = 6{,}3 \text{ рад/км}.$$

По (9.4) и (9.3) вычисляем фазовую скорость и длину волны в кабеле:

$$v_ф = \frac{2\pi \cdot 800}{6{,}3} = 798 \text{ км/с}; \quad \lambda = \frac{2\pi}{6{,}3} = 0{,}995 \text{ км}.$$

9.4. Определить первичные и вторичные параметры стандартизованной коаксиальной пары типа КМ-4 × 2,52/9,4 с шайбовой полиэтиленовой изоляцией при частоте $f = 220$ кГц. Диаметр жилы $d = 2{,}52$ мм, внутренний диаметр внешнего проводника $D = 9{,}4$ мм, эквивалентная диэлектрическая проницаемость изоляции $\varepsilon = 1{,}1$, тангенс угла диэлектрических потерь $\operatorname{tg}\delta = 0{,}5 \cdot 10^{-4}$, температура 20°С. Найти также длину волны и фазовую скорость.

Р е ш е н и е. Первичные параметры вычисляем по формулам (П4.13), (П4.14), (П4.15) и (П4.7):

$$R_0 = 8{,}35 \sqrt{220 \cdot 10^{-3}} \left(\frac{1}{2{,}52} + \frac{1}{9{,}4}\right) \cdot 10^{-2} = 19{,}7 \text{ Ом/км};$$

$$L_0 = 2 \ln \frac{9{,}4}{2{,}52} \cdot 10^{-4} = 2 \ln 3{,}73 \cdot 10^{-4} = 2{,}63 \cdot 10^{-4} \text{ Гн/км};$$

$$C_0 = \frac{1{,}1 \cdot 10^{-6}}{18 \ln \frac{9{,}4}{2{,}52}} = \frac{1{,}1 \cdot 10^{-6}}{18 \cdot 1{,}316} = 46{,}5 \cdot 10^{-9} \text{ Ф/км};$$

$$G_0 = 2\pi \cdot 220 \cdot 10^3 \cdot 46{,}5 \cdot 10^{-9} \cdot 0{,}5 \cdot 10^{-4} = 3{,}2 \cdot 10^{-6} \text{ См/км}.$$

Вычислим вторичные параметры. Так как $R_0 = 19{,}7 \ll \omega L_0 = 364$ и $G_0 = 3{,}2 \cdot 10^{-6} \ll \omega C_0 = 64\,000 \cdot 10^{-6}$, то расчет можно вести по приближенным формулам (9.4):

$$Z_в = \sqrt{\frac{L_0}{C_0}} = \sqrt{\frac{2{,}63 \cdot 10^{-4}}{46{,}5 \cdot 10^{-9}}} = 75 \text{ Ом};$$

$$\alpha = \frac{R_0}{2}\sqrt{\frac{C_0}{L_0}} + \frac{G_0}{2}\sqrt{\frac{L_0}{C_0}} = \frac{19{,}7}{2} \cdot \frac{1}{75} +$$

$$+ \frac{3{,}2 \cdot 10^{-6}}{2} \cdot 75 = 0{,}131 \text{ Нп/км} = 1{,}14 \text{ дБ/км};$$

$$\beta = \omega\sqrt{L_0 C_0} = 2 \cdot 3{,}14 \cdot 220 \cdot 10^3 \sqrt{2{,}63 \cdot 10^{-4} \cdot 46{,}5 \cdot 10^{-9}} =$$

$$= 4{,}83 \text{ рад/км}.$$

Длину волны и фазовую скорость определяем по (9.4) и (9.3):

$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta} = \frac{6{,}28}{4{,}83} = 1{,}3 \text{ м}; \quad v_ф = \frac{\omega}{\beta} = \frac{2\pi \cdot 220 \cdot 10^3}{4{,}83} = 286\,000 \text{ км/с}.$$

Для сравнения приведем расчет по точным формулам (9.1) и (9.2):

$$\underline{Z}_в = \sqrt{\frac{19{,}7 + j2\pi \cdot 220 \cdot 10^3 \cdot 2{,}63 \cdot 10^{-4}}{3{,}2 \cdot 10^{-6} + j2\pi \cdot 220 \cdot 10^3 \cdot 46{,}5 \cdot 10^{-9}}} = 75{,}2e^{-j1°33'} \text{ Ом};$$

$$\underline{\gamma} = \sqrt{364e^{j86°54'} \cdot 64{,}2 \cdot 10^{-3}e^{j90°}} = (0{,}13 + j4{,}8) \text{ км}^{-1},$$

т. е. $\alpha = 0{,}13$ Нп/км, $\beta = 4{,}8$ рад/км.

Результаты, полученные по точным формулам, весьма близки к рассчитанным по приближенным формулам.

9.5. Определить первичные и вторичные параметры воздушной линии, диаметр проводов которой равен 3 мм и расстояние между осями проводов составляет 20 см. Состояние погоды: сыро, температура 20°С. Частота тока 800 Гц. Чему равны длина волны в линии и фазовая скорость распространения волн?

9.6. Фидер с расстоянием между проводами $D = 5$ см, радиус проводов которого $r = 2$ мм, имеет параметры $R_0 = 0{,}03$ Ом/м, $G_0 = 1 \cdot 10^{-9}$ См/м при $\lambda = 30$ м. Найти $Z_в$, α, β.

Указание. При высокой частоте, соответствующей длине волны 30 м, можно считать, что $v_ф = c = 3 \cdot 10^8$ м/с, а из (9.3) находим $f = c/\lambda$.

9.7. Даны параметры кабельной цепи при $f = 800$ Гц; $R_0 = 22{,}6$ Ом/км, $L_0 = 0{,}6 \cdot 10^{-3}$ Гн/км, $C_0 = 35{,}5 \cdot 10^{-9}$ Ф/км и $G_0 =$

$= 0{,}7 \cdot 10^{-6}$ См/км. Определить $\underline{Z}_в$, $\underline{\gamma}$, α, β и сравнить их со значениями соответствующих величин, полученными по упрощенным формулам для кабеля при умеренных частотах (800 Гц и меньше), когда $R_0 >> \omega L_0$ и $G_0 >> \omega C_0$, что приводит к приближенным равенствам

$$\alpha \approx \beta \approx \sqrt{R_0 \omega C_0/2}; \quad \underline{Z}_в = \sqrt{R_0/\omega C_0}\, e^{-j\pi/4}.$$

Б. Согласованная и несогласованная нагрузки линии. Напряжение, ток, мощность в начале и конце линии. Входное сопротивление. Прямые и обратные волны

9.8. Экспериментально установлено, что мощность телефонного аппарата как передатчика на зажимах телефонной цепи составляет 1 мВт, а мощность телефонного аппарата как приемника должна быть порядка 1 мкВт, т. е. может быть допущено уменьшение мощности в 1000 раз. Имея это в виду для воздушной стальной линии, параметры которой приведены в решении задач 9.1 и 9.2 (полагая, что сопротивление телефонного аппарата согласовано с линией), определить: а) максимально допустимое ослабление; б) допустимую дальность связи, считая, что все потери энергии сосредоточены в линии (передающий и приемный аппараты подсоединены непосредственно к линии); в) отношение модулей напряжения и тока в начале линии к соответствующим величинам в конце линии.

Р е ш е н и е. Максимально допустимое ослабление [см. формулу (9.11а)]

$$A = 10 \lg P_1/P_2 = 10 \lg 1000 = 30 \text{ дБ} = 30/8{,}69 = 3{,}45 \text{ Нп}.$$

Отсюда для воздушной стальной линии дальность передачи

$$l = \frac{A}{\alpha} = \frac{3{,}45}{13{,}6 \cdot 10^{-3}} = 254 \text{ км}.$$

Отношение модулей напряжений и токов равно

$$U_1/U_2 = I_1/I_2 = e^{\alpha l} = e^{3{,}45} = 31{,}6.$$

9.9. Линию можно считать бесконечно длинной в том случае, когда ее собственное ослабление достаточно велико ($\alpha l \geqslant 13$ дБ). Исходя из этого условия, найти длины линий: а) воздушной стальной двухпроводной 4-миллиметровой линии с расстоянием между осями проводов 60 см при $f = 800$ Гц (см. задачи 9.1 и 9.2); б) медной двухпроводной линии с диаметром проводов 3 мм и расстоянием между осями проводов 20 см при $f = 800$ Гц (см. задачу 9.5); в) симметричной кабельной линии при $f = 220$ кГц, параметры которой даны в условии задачи 9.3; г) стандартизированной коаксиальной пары (см. задачу 9.4). Во всех случаях температуру полагать равной 20°С.

Р е ш е н и е. Расчет параметров в примерах 9.1 и 9.2 был сделан при температуре — 14°С. Проведя аналогичный расчет при температуре 20°С, получим: $R_0 = 42{,}4$ Ом/км; $L_0 = 94{,}2$ Гн/км; $C_0 = 5{,}12 \times$

$\times 10^{-9}$ Ф/км; $G_0 = 0{,}05 \cdot 10^{-6}$ См/км; $\alpha = 14{,}5 \cdot 10^{-3}$ Нп/км = = 0,126 дБ/км.

Из условия $\alpha l \geqslant 13$ дБ находим искомую длину линии: $l \geqslant 13/\alpha = 13/0{,}126 = 103$ км.

9.10. Воздушная стальная линия длиной $l = 38$ км имеет параметры, вычисленные в задачах 9.1 и 9.2. Линия нагружена на сопротивление $\underline{Z}_н$, равное волновому. Напряжение на входе линии $U_1 = 10$ В, его частота $f = 800$ Гц.

Определить: 1) коэффициент отражения от конца линии; 2) входное сопротивление нагруженной линии; 3) собственное ослабление в линии; 4) ток в начале линии, напряжение и ток на нагрузке; 5) мощность, расходуемую в нагрузке и подводимую к линии, и ее к. п. д.

Р е ш е н и е. 1. Коэффициент отражения согласованно нагруженной линии [см. формулу (9.7)] $p_н = 0$.

2. По условию линия нагружена на согласованную нагрузку, поэтому, как известно, ее входное сопротивление равно волновому [это легко получить из формулы (9.15)], т. е. $\underline{Z}_{вх} = \underline{Z}_в = 1510e^{-20°21'}$ Ом.

3. Собственное ослабление в линии $\alpha l = 13{,}6 \cdot 10^{-3} \cdot 38 = 0{,}505$ Нп, или $\alpha l = 0{,}505 \cdot 8{,}69 = 4{,}4$ дБ.

4. Ток в начале линии

$$\underline{I}_1 = \frac{\underline{U}_1}{\underline{Z}_{вх}} = \frac{10}{1510e^{-j20°21'}} = 6{,}62 \cdot 10^{-3}e^{j20°21'} \text{ А}.$$

Ввиду согласованной нагрузки в линии будут только прямые волны. Напряжение и ток на нагрузке найдем по (9.8а):

$$\underline{U}_н = \underline{U}_2 = \underline{U}_1 e^{-\underline{\gamma} l} = \underline{U}_1 e^{-\alpha l} e^{-j\beta l} = 10e^{-13{,}6 \cdot 10^{-3} \cdot 38} \times$$

$$\times e^{-j38{,}4 \cdot 10^{-3} \cdot 38} = 10e^{-0{,}505} e^{-j1{,}385} = 6{,}03e^{-j79°21'} \text{ В};$$

$$\underline{I}_н = \underline{I}_2 = \frac{\underline{U}_2}{\underline{Z}_н} = \frac{6{,}03e^{-j79°21'}}{1510e^{-j20°21'}} = 4 \cdot 10^{-3}e^{-j59°} \text{ А}.$$

5. Мощности, расходуемая в нагрузке и подводимая к линии, соответственно равны:

$$P_2 = P_н = \mathrm{Re}\left[\underline{U}_2 \underline{I}_2^*\right] = \mathrm{Re}\left[6{,}03e^{-j79°21'} \cdot 4 \cdot 10^{-3} e^{j59°}\right] = 22{,}6 \text{ мВт};$$

$$P_1 = \mathrm{Re}\left[\underline{U}_1 \underline{I}_1^*\right] = \mathrm{Re}\left[10 \cdot 6{,}62 \cdot 10^{-3} e^{-j20°21'}\right] = 62 \text{ мВт}.$$

К. п. д.

$$\eta = P_2/P_1 = 22{,}6/62 = 0{,}364.$$

9.11. Вторичные параметры однородной двухпроводной линии из медных проводов диаметром 4 мм при частоте $f = 10^4$ Гц равны $\underline{Z}_в = 548e^{-j1°10'}$ Ом, $\alpha = 4{,}7$ мНп/км, $\beta = 0{,}219$ рад/км. При ее нагрузке на волновое сопротивление напряжение на ее приемном

конце $u_2 = 10\sqrt{2}\sin\omega t$ В. Длина линии $l = 100$ км. Найти напряжение и ток в начале линии.

9.12. Вторичные параметры двухпроводной стальной линии при $f = 800$ Гц равны: $\underline{Z}_в = 1510e^{-j\,20°\,21'}$ Ом, $\alpha = 13{,}6$ мНп/км, $\beta = 36{,}4$ мрад/км. Длина линии $l = 38$ км. Линия не согласована с нагрузкой, сопротивление которой $\underline{Z}_н = 1355e^{j\,21°\,5'}$ Ом. На вход линии подано напряжение $U_1 = 10$ В частотой 800 Гц. Определить: 1) напряжение и ток на нагрузке, ток в начале линии, а также входное сопротивление нагруженной линии; 2) мощность, расходуемую в нагрузке и подводимую к линии, и к. п. д.

Р е ш е н и е. При расчете потребуются значения $\underline{\gamma}l$, $\mathrm{sh}\underline{\gamma}l$, $\cos\underline{\gamma}l$. Вычислим их, используя формулы приложения П2: $\underline{\gamma}l = \alpha l + j\beta l = 13{,}6 \cdot 10^{-3}38 + j36{,}4 \cdot 10^{-3} \cdot 38 = 0{,}505 + j1{,}385 = x + jy$;

$$S = \sqrt{\frac{\mathrm{ch}\,2x - \cos 2y}{2}} = \sqrt{\frac{\mathrm{ch}\,1{,}01 - \cos 2{,}77}{2}} =$$

$$= \sqrt{\frac{1{,}555 + 0{,}931}{2}} = 1{,}114;$$

$$\mathrm{tg}\,\varphi_s = \frac{\mathrm{tg}\,y}{\mathrm{th}\,x} = \frac{\mathrm{tg}\,1{,}385}{\mathrm{th}\,0{,}505} = \frac{5{,}324}{0{,}466} = 11{,}4; \quad \varphi_s = 85°.$$

Следовательно, $\mathrm{sh}\underline{\gamma}l = \mathrm{sh}(0{,}505 + j1{,}385) = Se^{j\varphi_s} = 1{,}114e^{j\,85°}$;

$$C = \sqrt{\frac{\mathrm{ch}\,2x + \cos 2y}{2}} = \sqrt{\frac{\mathrm{ch}\,1{,}01 + \cos 2{,}77}{2}} =$$

$$= \sqrt{\frac{1{,}555 - 0{,}931}{2}} = 0{,}56;$$

$$\mathrm{tg}\,\varphi_c = \mathrm{th}\,x \cdot \mathrm{tg}\,y = \mathrm{th}\,0{,}505 \cdot \mathrm{tg}\,1{,}385 = 0{,}466 \cdot 5{,}324 = 2{,}48;$$

$$\varphi_c = 68°3'.$$

Итак,

$$\mathrm{ch}\,\underline{\gamma}l = \mathrm{ch}\,(0{,}505 + j\,1{,}385) = Ce^{j\varphi_c} = 0{,}56e^{j68°3'}.$$

1. Напряжение в конце линии $\underline{U}_2$ найдем по формуле (9.13б), в которой надо принять $y = l$ и учесть, что $\underline{I}_2 = \underline{U}_2/\underline{Z}_н$, тогда

$$\underline{U}_2 = \frac{\underline{U}_1}{\mathrm{ch}\,\underline{\gamma}l + \dfrac{\underline{Z}_в}{\underline{Z}_н}\,\mathrm{sh}\,\underline{\gamma}l} = \frac{10}{0{,}56e^{j68°3'} + \dfrac{1510e^{-j20°21'}}{1355e^{j21°5'}}\,1{,}114e^{j85°}} =$$

$$= 5{,}78e^{-j52°15'}\ \text{В}.$$

Ток в нагрузке $\underline{I}_2 = \dfrac{\underline{U}_2}{\underline{Z}_н} = \dfrac{5{,}78e^{-j52°15'}}{1355e^{j21°5'}} = 4{,}27e^{-j73°20'}$ мА.

Ток в начале линии определяем по (9.14б):

$$\underline{I}_1 = \underline{I}_2 \operatorname{ch} \underline{\gamma} l + \frac{\underline{U}_2}{\underline{Z}_в} \operatorname{sh} \underline{\gamma} l = 4{,}27e^{-j73°20'} \cdot 0{,}56e^{j68°3'} +$$

$$+ \frac{5{,}78e^{-j52°15'}}{1510e^{-j20°21'}} 1{,}114e^{j85°} = 5{,}78e^{j32°50'} \text{ мА}.$$

Входное сопротивление нагруженной линии

$$\underline{Z}_{вх} = \frac{\underline{U}_1}{\underline{I}_1} = \frac{10}{5{,}78 \cdot 10^{-3}e^{j32°50'}} = 1732e^{-j32°50'} \text{ Ом}.$$

2. Мощности, расходуемая в линии и подводимая к ней, равны:

$$P_1 = \operatorname{Re}\left[\underline{U}_1 \underline{I}_1^*\right] = \operatorname{Re}[10 \cdot 5{,}78e^{-j32°50'}] = 48{,}6 \text{ мВт};$$

$$P_2 = \operatorname{Re}\left[\underline{U}_2 \underline{I}_2^*\right] = \operatorname{Re}[5{,}78e^{-j52°15'} \cdot 4{,}27e^{j73°20'}] = 23{,}1 \text{ мВт}.$$

К. п. д.

$$\eta = \frac{P_2}{P_1} = \frac{23{,}1}{48{,}6} = 0{,}475.$$

9.13. По данным задачи 9.11 определить коэффициент отражения от конца линии и входное сопротивление.

Р е ш е н и е. Коэффициент отражения находим по (9.7):

$$\underline{p}_н = \frac{\underline{Z}_н - \underline{Z}_в}{\underline{Z}_н + \underline{Z}_в} = \frac{1355e^{j21°5'} - 1510e^{-j20°21'}}{1355e^{j21°5'} + 1510e^{-j21°21'}} = 0{,}382e^{j98°30'}.$$

Входное сопротивление определяем по (9.15) различными способами.

С п о с о б 1. Сначала вычисляем $\underline{n}$ и $\underline{\gamma} l + \underline{n}$:

$$\underline{n} = \frac{1}{2} \ln \frac{\underline{Z}_в + \underline{Z}_н}{\underline{Z}_в - \underline{Z}_н} = \frac{1}{2} \ln \frac{2680e^{-j0°5'}}{-1023e^{j98°25'}} =$$

$$= \frac{1}{2} \ln 2{,}62e^{j81°30'} = \frac{1}{2} \operatorname{n} 2{,}62 + j \frac{1}{2} \cdot \frac{81{,}5°}{57{,}3°} = 0{,}482 + j0{,}711;$$

$$\underline{\gamma} l + \underline{n} = 0{,}505 + j1{,}385 + 0{,}482 + j0{,}711 = 0{,}987 + j2{,}096 =$$

$$= x + jy,$$

где $x = 0{,}987$ Нп, $y = 2{,}096$ рад, т. е. угол y лежит во второй четверти.

Вычислим модуль и аргумент гиперболического тангенса (см. приложение 2):

$$|\operatorname{th}(x + jy)| = T = \sqrt{\frac{\operatorname{ch} 2x - \cos 2y}{\operatorname{ch} 2x + \cos 2y}} = \sqrt{\frac{\operatorname{ch} 1{,}974 - \cos 4{,}192}{\operatorname{ch} 1{,}974 + \cos 4{,}192}} =$$

$$= \sqrt{\frac{3{,}655 + 0{,}5}{3{,}655 - 0{,}5}} = 1{,}147;$$

$$\operatorname{tg}\varphi_t = \pm\frac{\sin 2y}{\operatorname{sh} 2x} = \frac{\sin 4{,}192}{\operatorname{sh} 1{,}974} = \frac{-0{,}867}{3{,}516} = -0{,}247,$$

отсюда $\varphi_t = -13°47'$ (из приложения 2 видно, что для четных четвертей угол φ_t должен быть отрицателен). Следовательно,

$$\underline{Z}_1 = 1510e^{-j20°21'} \cdot 1{,}147e^{-j13°47'} = 1732e^{-j34°8'} \text{ Ом}.$$

Способ 2. Вычислим входное сопротивление, применив разложение гиперболического тангенса на действительную и мнимую составляющие (см. приложение 2):

$$\operatorname{th}(x + jy) = \frac{\operatorname{sh} 2x}{\operatorname{ch} 2x + \cos 2y} + j\frac{\sin 2y}{\operatorname{ch} 2x + \cos 2y} =$$

$$= \frac{\operatorname{sh} 1{,}974}{\operatorname{ch} 1{,}974 + \cos 4{,}192} + j\frac{\sin 4{,}192}{\operatorname{ch} 1{,}974 + \cos 4{,}192} =$$

$$= \frac{3{,}516}{3{,}155} + j\frac{-0{,}867}{3{,}155} = 1{,}114 - j0{,}275 = 1{,}143e^{-j13°50'}.$$

Входное сопротивление по формуле (9.15)

$$\underline{Z}_1 = \underline{Z}_в \operatorname{th}(x + jy) = 1510e^{-j20°21'} \cdot 1{,}143e^{-j13°50'} = 1728e^{-j34°11'} \text{ Ом}.$$

Отметим, что точность расчета по приведенным способам примерно одинакова, однако последний путь с точки зрения затраты времени является наиболее экономным.

9.14. Для линии задачи 9.10 определить комплексные значения прямой и обратной волн напряжения в конце и начале линии, нагруженной на сопротивление $\underline{Z}_н = 1355e^{j21°55'}$ Ом, написать уравнения для мгновенных значений прямой и обратной волн напряжения в конце и начале линии, если мгновенное значение напряжения в конце линии $u_2 = U_{2m}\sin\omega t$ ($U_{2m} = 14{,}1$ В).

9.15. Напряжение в конце разомкнутой линии, параметры которой приведены в задаче 9.11, изменяется по закону $u_2 = 10\sqrt{2}\sin\omega t$ ($f = 10^4$ Гц). Вычислить комплексные значения напряжения и тока в начале линии и в точке, отстоящей от конца линии на 20 км. Для тех же точек линии написать уравнения мгновенных значений напряжения и тока.

9.16. Вторичные параметры двухпроводной воздушной цепи из стальных проводов диаметром 4 мм при частоте 800 Гц имеют волновое сопротивление $1350e^{-j24°}$ Ом, коэффициент ослабления 17,5 мНп/км, коэффициент фазы 0,039 рад/км, длину 20 км. Линия замкнута на активное сопротивление, равное 1 кОм. К началу линии подведено напряжение

$$u_1 = U_{1m}\sin\omega t \ (U_1 = 10 \text{ В}).$$

Вычислить комплексные значения напряжения $\underline{U}_2$ и тока $\underline{I}_2$ в конце линии, тока в начале линии и написать уравнения их мгновенных значений.

9.17. Линия, параметры которой даны в задаче 9.11, замкнута накоротко. При этом ток в конце линии $i = I_{2m}\sin\omega t$ ($I_{2m} = 10\sqrt{2}$ мА, $f = 10^4$ Гц). Вычислить комплексные значения напряжения и тока в начале линии и написать уравнения их мгновенных значений. Определить входные сопротивления линии при холостом ходе и коротком замыкании.

9.18. Линия, параметры которой даны в задаче 9.11, нагружена на сопротивление $\underline{Z}_н = 500e^{-j10^\circ}$ Ом. Вычислить комплексные значения напряжения и тока в начале линии и написать уравнения мгновенных значений этих величин, если напряжение в конце линии $u_2 = U_{2m}\sin\omega t (U_{2m} = 10\sqrt{2}$ В, $f = 10^4$ Гц). Определить комплексные значения прямой и сбратной волн напряжения в начале линии. Написать уравнения для мгновенных значений прямой и обратной волн напряжения в начале и в конце линии.

В. Неискажающая линия. Схемы замещения линии

9.19. Первичные параметры двухпроводной медной 4-миллиметровой телефонной линии (при $f = 100$ кГц): $R_0 = 14$ Ом/км, $L_0 = 2 \cdot 10^{-3}$ Гн/км, $G_0 = 5 \cdot 10^{-6}$ См/км, $C_0 = 6{,}35 \cdot 10^{-9}$ Ф/км.

Вычислить индуктивность L_1, которую надо включить на каждый километр длины, чтобы линия стала неискажающей. Чему при этом будут равны вторичные параметры линии?

Р е ш е н и е. Линия не будет вносить искажения, если выполняется соотношение (9.18):

$$\frac{R_0}{L_0 + L_1} = \frac{G_0}{C_0}.$$

Отсюда

$$L_1 = \frac{R_0 C_0}{G_0} - L_0 = \frac{14 \cdot 6{,}35 \cdot 10^{-9}}{5 \cdot 10^{-6}} - 2 \cdot 10^{-3} = 15{,}8 \cdot 10^{-3} \text{ Гн/км}.$$

Вторичные параметры линии определяем по (9.20):

$$Z_в = \sqrt{\frac{L_0 + L_1}{C_0}} = \sqrt{\frac{17{,}8 \cdot 10^{-3}}{6{,}35 \cdot 10^{-9}}} = 1675 \text{ Ом};$$

$$\alpha = \sqrt{R_0 G_0} = \sqrt{14 \cdot 5 \cdot 10^{-6}} = 8{,}37 \cdot 10^{-3} \text{ Нп/км} = 0{,}073 \text{ дБ/км};$$

$$\beta = \omega\sqrt{L_0 C_0} = 2\pi \cdot 100 \cdot 10^3 \sqrt{17{,}8 \cdot 10^{-3} \cdot 6{,}35 \cdot 10^{-9}} = 6{,}68 \text{ рад/км}.$$

9.20. К неискажающей линии, параметры которой приведены в предыдущей задаче, подведено напряжение $u = (10\sin 2\pi 10^5 + 5\sin 4\pi 10^5 t)$ В. Определить мгновенное значение напряжения в конце линии при согласованной нагрузке и при холостом ходе. Указать, сохраняется ли неискаженность передачи при холостом ходе.

9.21. Неискажающая линия длиной $l = 100$ км, параметры которой при $f = 100$ кГц равны: $R_0 = 14$ Ом/км, $L_0 = 17{,}8 \cdot 10^{-3}$ Гн/км, $G_0 = 5 \cdot 10^{-6}$ См/км, $C_0 = 6{,}35 \cdot 10^{-9}$ Ф/км (см. задачу 9.19), нагружена на сопротивление, равное волновому. К началу линии подведено напряжение $U_1 = 10$ В. Определить напряжение и ток на нагрузке и ток на ее входных зажимах. Вычислить мощности, расходуемую в нагрузке и подводимую к линии. Построить кривые распределения действующих значений напряжения и тока вдоль линии.

9.22. Вычислить сопротивления Т- и П-образных схем замещения воздушной двухпроводной линии из медных проводов диаметром 3 мм, длиной $l = 100$ км при $f = 800$ Гц. Параметры линии взять из задачи 9.5.

Г. Рабочее затухание линии. Определение параметров линии по опытам холостого хода и короткого замыкания

9.23. К линии, параметры которой даны в задаче 9.12, подведен источник с э. д. с. $E = 20$ В, частотой $f = 800$ Гц и внутренним сопротивлением $\underline{Z}_и = 600$ Ом. Линия нагружена на сопротивление $\underline{Z}_н = 1355e^{j21°57'}$ Ом, при этом ее входное сопротивление равно $\underline{Z}_{вх} = 1732e^{-j34°8'}$ Ом. Определить напряжение и ток в начале линии и в нагрузке. Чему равно рабочее ослабление линии?

Р е ш е н и е. Зная входное сопротивление линии между зажимами $1—1'$, нагруженной на сопротивление $\underline{Z}_н$, по закону Ома найдем ток $\underline{I}_1$ и напряжение $\underline{U}_1$ в начале линии:

$$\underline{I}_1 = \frac{E_1}{Z_и + \underline{Z}_{вх}} = \frac{20}{600 + 1732e^{-j34°8'}} = 8{,}9e^{j25°30'} \text{ мА};$$

$$\underline{U}_1 = \underline{I}_1 \underline{Z}_{вх} = 8{,}9 \cdot 10^{-3}e^{j25°30'} \cdot 1732e^{-j34°8'} = 15{,}4e^{-j8°38'} \text{ В}.$$

Напряжение и ток в нагрузке можно вычислить по формулам (9.13б) и (9.14б), аналогично тому, как это сделано в задаче 9.12. Не приводя подробных расчетов, запишем окончательные результаты:

$$\underline{U}_2 = 8{,}5e^{-j61°3'} \text{ В}; \quad \underline{I}_2 = 6{,}27e^{-j82°8'} \text{ мА}.$$

Рабочее ослабление линии вычислим по формуле (9.21), для этого сначала определим величины отдельных слагаемых, входящих в эту формулу:

$$\underline{p}_и = \frac{\underline{Z}_и - \underline{Z}_в}{\underline{Z}_и + \underline{Z}_в} = \frac{600 - 1510e^{-j20°21'}}{600 + 1510e^{-j20°21'}} = \frac{968e^{j147°10'}}{2080e^{-j14°35'}} = 0{,}466e^{j161°45'};$$

$$\underline{p}_н = 0{,}382e^{j98°30'} \text{ (найдено в решении задачи 9.13)};$$

$$\underline{p}_и \underline{p}_н = 0{,}466e^{j161°45'} 0{,}382e^{j98°30'} = 0{,}178e^{j260°15'};$$

$\underline{\gamma} l = 0{,}505 + j1{,}385$ (найдено в решении задачи 9.12);

$$1{,}385 \text{ рад} = 79°21'; \quad \underline{p}_{\text{и}}\underline{p}_{\text{н}}e^{-2\underline{\gamma} l} = 0{,}178e^{j260°15'} \times$$

$$\times e^{-1{,}01}e^{-j158°42'} = 0{,}065e^{j101°33'} = -0{,}013 + j0{,}064;$$

$$\ln\left|1 - \underline{p}_{\text{и}}\underline{p}_{\text{н}}e^{-2\underline{\gamma} l}\right| = \ln|\,1{,}013 - j0{,}064\,| =$$

$$= \ln|\,1{,}013e^{-j3°36'}\,| = \ln 1{,}013 = 0{,}013;$$

$$\ln\left|\frac{\underline{Z}_{\text{и}} + \underline{Z}_{\text{в}}}{2\sqrt{\underline{Z}_{\text{и}}\underline{Z}_{\text{в}}}}\right| = \ln\left|\frac{600 + 1510e^{-j20°21'}}{2\sqrt{600 \cdot 1510e^{-j20°21'}}}\right| =$$

$$= \ln\left|\frac{2080e^{-j14°35'}}{1950e^{-j10°11'}}\right| = \ln 1{,}09 = 0{,}086 \text{ Нп} = 0{,}75 \text{ дБ};$$

$$\ln\left|\frac{\underline{Z}_{\text{н}} + \underline{Z}_{\text{в}}}{2\sqrt{\underline{Z}_{\text{н}}\underline{Z}_{\text{в}}}}\right| = \ln\left|\frac{1355e^{j21°5'} + 1510e^{-j20°21'}}{2\sqrt{1355e^{-j21°5'}1510e^{-j20°21'}}}\right| =$$

$$= \ln\left|\frac{2680e^{-j0°5'}}{2860e^{j0°11'}}\right| = \ln 0{,}936 = -0{,}066 \text{ Нп} = 0{,}57 \text{ дБ}.$$

По формуле (9.21) искомое рабочее ослабление $A_{\text{р}} = 0{,}505 + 0{,}086 - 0{,}066 + 0{,}013 = 0{,}538$ Нп $= 4{,}7$ дБ.

9.24. Измерения сопротивления холостого хода $\underline{Z}_{1\text{х}}$ и короткого замыкания $\underline{Z}_{1k}$ воздушной двухпроводной телефонной линии длиной 200 км при угловой частоте $\omega = 5000$ с$^{-1}$ дали результаты: $\underline{Z}_{1\text{х}} = 747e^{-j26°30'}$ Ом, $\underline{Z}_{1\text{к}} = 516e^{j0°30'}$ Ом. Определить вторичные ($\underline{Z}_{\text{в}}$, α, β, $\underline{\gamma}$) и первичные (R_0, L_0, G_0, C_0) параметры линии.

Р е ш е н и е. Входные сопротивления линии при холостом ходе и коротком замыкании по формулам (9.16) соответственно равны:

$$\underline{Z}_{1\text{х}} = \underline{Z}_{\text{в}} / \operatorname{th}\underline{\gamma} l; \quad \underline{Z}_{1\text{к}} = \underline{Z}_{\text{в}} \operatorname{th}\underline{\gamma} l.$$

Перемножая эти выражения, найдем

$$\underline{Z}_{\text{в}} = \sqrt{\underline{Z}_{1\text{х}}\underline{Z}_{1\text{к}}} = 620e^{-j13°} = (587 - j139{,}5) \text{ Ом},$$

а поделив их, получим

$$\operatorname{th}\underline{\gamma} l = \sqrt{\underline{Z}_{1\text{к}}/\underline{Z}_{1\text{х}}} = 0{,}83e^{j13°30'} = 0{,}806 + j0{,}193,$$

но

$$\operatorname{th}\underline{\gamma} l = \frac{e^{\underline{\gamma} l} - e^{-\underline{\gamma} l}}{e^{\underline{\gamma} l} + e^{-\underline{\gamma} l}} \cdot \frac{e^{\underline{\gamma} l}}{e^{\underline{\gamma} l}} = \frac{e^{2\underline{\gamma} l} - 1}{e^{2\underline{\gamma} l} + 1},$$

откуда

$$e^{2\underline{\gamma}l} = \frac{1 + \operatorname{th} \underline{\gamma}l}{1 - \operatorname{th} \underline{\gamma}l} = \frac{1{,}806 + j0{,}193}{0{,}194 - j\,0{,}193} = 6{,}72e^{j\,(51° + 360°n)},$$

где n — целое число.

Так как $e^{2\underline{\gamma}l} = e^{2\alpha l}\, e^{j2\beta l}$, то $e^{2\alpha l}$ — модуль комплексного числа, а $2\beta l$ — его аргумент:

$$e^{2\alpha l} = 6{,}72 \text{ и } \alpha = \frac{1}{2l} \ln 6{,}72 = 47{,}5 \cdot 10^{-4} \text{ Нп/км} = 0{,}04 \text{ дБ/км};$$

$$2\beta l = 51° + 360°n = (0{,}89 + 2\pi n) \text{ рад}.$$

Для определения величины n, которая должна быть взята в последней формуле целым положительным числом, необходимо приблизительно знать величины L_0 и C_0 измеряемой линии, а следовательно, знать приблизительно число 2π радиан, которое содержится в выражении $2\beta l$.

Так как для медных цепей

$$\beta \approx \omega \sqrt{L_0 C_0} \text{ и } 2\beta l = 2l\omega \sqrt{L_0 C_0},$$

приблизительное число окружностей

$$n = \frac{2l\omega \sqrt{L'C'}}{2\pi} = \frac{l\omega \sqrt{L'C'}}{\pi},$$

где L' и C' — приблизительные величины, известные из предыдущих измерений или вычисленные по теоретическим формулам.

Этой формулой можно пользоваться и для стальных цепей.

В данном случае примем величины, известные из предыдущих задач, для $L' \approx 12 \cdot 10^{-3}$ Гн/км и $C' \approx 6 \cdot 10^{-9}$ Ф/км (см., например, ответ к задаче 9.5) и тогда

$$n = \frac{200 \cdot 5000 \sqrt{2 \cdot 10^{-3} \cdot 6 \cdot 10^{-9}}}{\pi} = 1{,}15,$$

хотя здесь и получается дробное число, но n должно быть взято ближайшим целым числом, т. е. $n = 1$.

Таким образом,

$$2\beta l = 0{,}89 + 2\pi = 7{,}17; \quad \beta = \frac{7{,}17}{2 \cdot 200} = 180 \cdot 10^{-4} \text{ рад/км};$$

$$\underline{\gamma} = \alpha + j\beta = (47{,}5 + j180) \cdot 10^{-4} = 186 \cdot 10^{-4} e^{j75°} \text{ км}^{-1}.$$

Определим первичные параметры линии. Для этого воспользуемся выражениями (9.1) и (9.2):

$$\underline{\gamma} = \sqrt{(R_0 + j\omega L_0)(G_0 + j\omega C_0)} = 186 \cdot 10^{-4} e^{j75°} \text{ км}^{-1};$$

$$\underline{Z}_в = \sqrt{\frac{R_0 + j\omega L_0}{G_0 + j\omega C_0}} = 620e^{-j13°} \text{ Ом}.$$

Их произведение

$$\underline{\gamma}\,\underline{Z}_{\text{в}} = R_0 + j\omega L_0 = (5{,}4 + j10{,}2)\ \text{Ом/км},$$

откуда

$$R_0 = 5{,}4\ \text{Ом/км};\quad L_0 = 10{,}2/5000 = 2{,}04 \cdot 10^{-3}\ \text{Гн/км}.$$

Из отношения

$$\underline{\gamma}/\underline{Z}_{\text{в}} = G_0 + j\omega C_0 = (0{,}96 \cdot 10^{-6} + j30 \cdot 10^{-6})\ \text{См/км}$$

найдем, что

$$G_0 = 0{,}96 \cdot 10^{-6}\ \text{См/км};\quad C_0 = \frac{30 \cdot 10^{-6}}{5000} = 6 \cdot 10^{-9}\ \text{Ф/км}.$$

9.25. Сопротивления воздушной бронзовой линии длиной $l = 250$ км были измерены при частоте $f = 800$ Гц, холостом ходе и коротком замыкании и оказались равными:

$$\underline{Z}_{\text{х}} = 525e^{-j17^\circ}\ \text{Ом};\quad \underline{Z}_{\text{к}} = 720e^{-j9^\circ 40'}\ \text{Ом}.$$

Определить $\underline{Z}_{\text{в}}$ и $\underline{\gamma}$, а также первичные параметры линии R_0, L_0, G_0, C_0.

Д. Расчет уровней передачи

9.26. По данным задачи 9.12 для несогласованно нагруженной линии определить: 1) абсолютные уровни передачи по мощности, напряжению, току в начале и в конце линии; 2) относительный уровень передачи тех же величин на нагрузке по отношению к началу линии.

Р е ш е н и е. 1. Абсолютные уровни передачи по мощности, напряжению, току в начале линии по формулам (9.12) соответственно равны:

$$p_{aP_1} = 10 \lg \frac{P_1\ (\text{мВт})}{1\ (\text{мВт})} = 10 \lg \frac{U_1 I_1}{1} = 10 \lg \frac{10 \cdot 5{,}75}{1} = 17{,}6\ \text{дБ};$$

$$p_{aU_1} = 20 \lg \frac{U_1\ (\text{В})}{0{,}775\ (\text{В})} = 20 \lg \frac{10}{0{,}775} = 22{,}2\ \text{дБ};$$

$$p_{aI_1} = 20 \lg \frac{I_1\ (\text{мА})}{1{,}29\ (\text{мА})} = 20 \lg \frac{5{,}75}{1{,}29} = 13\ \text{дБ}.$$

Те же величины в конце линии:

$$p_{aP_{\text{н}}} = 10 \lg \frac{P_2\ (\text{мВт})}{1\ (\text{мВт})} = 10 \lg \frac{U_2 I_2}{1} = 10 \lg \frac{5{,}45 \cdot 4{,}02}{1} = 13{,}4\ \text{дБ};$$

$$p_{aU_{\text{н}}} = 20 \lg \frac{U_2\ (\text{В})}{0{,}775\ (\text{В})} = 20 \lg \frac{5{,}45}{0{,}775} = 16{,}94\ \text{дБ};$$

$$p_{aI_{\text{н}}} = 20 \lg \frac{I_2\ (\text{мА})}{1{,}29\ (\text{мА})} = 20 \lg \frac{4{,}02}{1{,}29} = 9{,}87\ \text{дБ}.$$

2. Относительные уровни передачи по мощности, напряжению и току на нагрузке по отношению к началу линии равны разности соответствующих абсолютных уровней:

$$p_p = p_{ap_н} - p_{ap_1} = 13{,}41 - 17{,}6 = -4{,}19 \text{ дБ};$$

$$p_U = p_{aU_н} - p_{aU_1} = 16{,}94 - 22{,}2 = -5{,}26 \text{ дБ};$$

$$p_I = p_{aI_н} - p_{aI_1} = 9{,}87 - 13 = -3{,}13 \text{ дБ}.$$

Между относительными уровнями передачи p_p, p_U и p_I имеется расхождение, оно объясняется тем, что входное сопротивление цепи ($\underline{Z}_{вх} = \underline{U}_1/\underline{I}_1 = 1740e^{-j34°}$ Ом) и сопротивление нагрузки ($\underline{Z}_н = \underline{U}_2/\underline{I}_2 = 1355e^{j21°5'}$ Ом) отличаются друг от друга.

9.27. По данным задачи 9.10 для согласованно нагруженной линии рассчитать: 1) абсолютный уровень передачи по мощности, напряжению и току в начале и в конце линии; 2) относительный уровень передачи тех же величин на нагрузке по отношению к началу линии.

Указание. Обратить внимание на то, что все относительные уровни передачи имеют одинаковые значения, что объясняется условиями согласованной нагрузки. Каждый из относительных уровней равен разности соответствующих абсолютных уровней:

$$p_p = p_{ap_н} - p_{ap_1}; \quad p_U = p_{aU_н} - p_{aU_1}; \quad p_I = p_{aI_н} - p_{aI_1}.$$

Е. Линия без потерь. Стоячие волны

9.28. Энергия передается на высокой частоте от генератора к излучающей системе с помощью фидера (линии), имеющего индуктивность $L_0 = 1{,}57$ мкГн/м и емкость $C_0 \doteq 7{,}1$ пФ/м. Потерями в фидере можно пренебречь ($R_0 = G_0 = 0$). Частота переменного тока $f = 10^8$ Гц.

Определить: а) волновое сопротивление, коэффициенты ослабления и фазы, длину волны; б) входное сопротивление отрезка этого фидера длиной в $^1/_8$ длины волны при холостом ходе и коротком замыкании; в) расчет повторить для отрезков фидера длиной в $^1/_4$, $^3/_8$ и $^1/_2$ длины волны; для каждого из рассчитанных случаев начертить эквивалентную схему фидера; г) начертить кривые изменения входных сопротивлений $\underline{Z}_х$ и $\underline{Z}_к$ в функции длины фидера.

Р е ш е н и е. а. Вычислим $\underline{Z}_в$, β и λ соответственно формулам (9.20) и (9.3):

$$\underline{Z}_в = \sqrt{\frac{1{,}57 \cdot 10^{-6}}{7{,}1 \cdot 10^{-12}}} = 470 \text{ Ом};$$

$$\beta = \omega/v_ф = \omega\sqrt{L_0C_0} = 2\pi \cdot 10^8\sqrt{1{,}57 \cdot 10^{-6} \cdot 7{,}1 \cdot 10^{-12}} = 2{,}10 \text{ рад/км};$$

$$\lambda = 2\pi/\beta = 2\pi/2{,}10 = 3 \text{ м}.$$

б. Из формулы (9.3) находим $\beta\lambda = 2\pi$, а для фидера длиной $l = \frac{1}{8}\lambda$

$$\beta l = \lambda/8 = 2\pi/8 = \pi/4.$$

Входные сопротивления определим по (9.25):

$$\underline{Z}_{\text{х}} = Z_{\text{в}} \frac{1}{j \operatorname{tg} \beta l} = Z_{\text{в}} \frac{1}{j \operatorname{tg} \pi/4} = -jZ_{\text{в}} = -j470 \text{ Ом};$$

$$\underline{Z}_{\text{к}} = j\underline{Z}_{\text{в}} \operatorname{tg} \beta l = j\underline{Z}_{\text{в}} \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} = j470 \text{ Ом}.$$

Эквивалентная схема двухполюсника при холостом ходе — емкость с сопротивлением 470 Ом, при коротком замыкании — индуктивность с сопротивлением 470 Ом.

Расчет для других длин фидера рекомендуем проделать самостоятельно:

при $l = \lambda/4$ $Z_{\text{х}} = 0$, $Z_{\text{к}} = \infty$;

при $l = 3\lambda/8$ $\underline{Z}_{\text{х}} = j470$ Ом, $\underline{Z}_{\text{к}} = -j470$ Ом;

при $l = \lambda/2$ $Z_{\text{х}} = \infty$, $Z_{\text{к}} = 0$.

Кривые изменения входного сопротивления и функции длины фидера могут быть рассчитаны по уравнениям (9.25):
при холостом ходе $\underline{Z}_{\text{н}} = \infty$, $\underline{Z}_{\text{х}} = -jZ_{\text{в}}\operatorname{tg}\beta y$;
при коротком замыкании $\underline{Z}_{\text{н}} = 0$, $\underline{Z}_{\text{к}} = jZ_{\text{в}}\operatorname{tg}\beta y$.

Во всех рассмотренных случаях входное сопротивление линии является чисто реактивным $\underline{Z} = jX$ ($\underline{Z}_{\text{х}} = jX_{\text{х}}$, $\underline{Z}_{\text{к}} = jX_{\text{к}}$).

Кривая $X_{\text{х}} = f_1(y)$ имеет вид котангенсоиды, а кривая $X_{\text{к}} = f_2(y)$ — тангенсоиды (рис. 9.3, *а* и *б*).

9.29. Линия без потерь, имеющая волновое сопротивление $Z_{\text{в}} = 500$ Ом, питается напряжением частотой $f = 10^8$ Гц. Определить

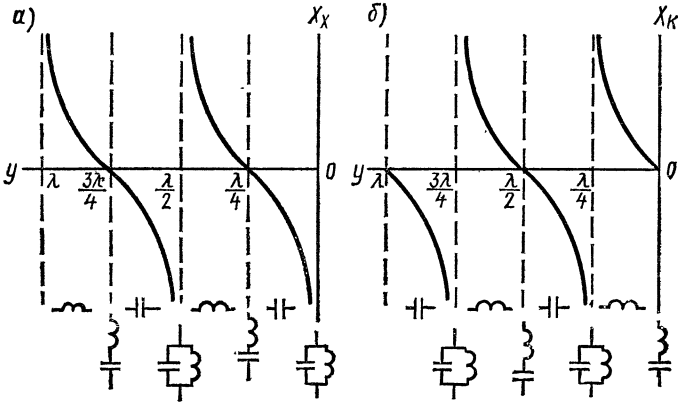


Рис. 9.3

амплитуду тока при холостом ходе в точке, находящейся от конца линии на расстоянии $y = 0{,}5$ м, если напряжение на конце линии $U_{2m} = 100$ мВ.

9.30. Фидер, параметры которого приведены в предыдущей задаче, имеет длину $l = 5$ м и находится в режиме холостого хода. Подсчитать действующие значения напряжения в конце и тока в начале линии, если к фидеру подключено напряжение $u_1 = U_{1m}\sin\omega t$ ($U_1 = 10$ В, $f = 10^8$ Гц). Начертить кривые распределения действующих значений напряжения и тока вдоль фидера. Написать уравнения мгновенных значений напряжения и тока в начале фидера. Начертить кривые распределения мгновенных значений напряжения и тока вдоль фидера для двух моментов времени: $t = 0$ и $t = T/8$. Определить коэффициенты отражения и бегущей волны.

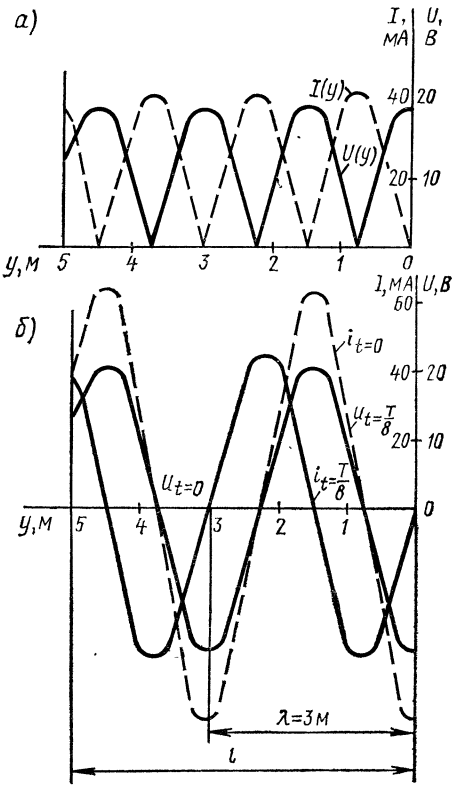


Рис. 9.4

Р е ш е н и е. Подсчитаем величины, которые потребуются в дальнейших расчетах, а именно:

$$\beta l = 2{,}1 \cdot 5 = 10{,}5 \text{ рад} = (4{,}22 + 2\pi) \text{ рад};$$

$$\cos\beta l = \cos(4{,}22 + 2\pi) = -0{,}472; \quad \sin\beta l = \sin(4{,}22 + 2\pi) = -0{,}881.$$

Примем $\underline{U}_1 = U_1 = 10$ В. Из формулы (9.22б) для режима холостого хода ($\underline{I}_2 = 0$) определим действующее значение напряжения в конце линии ($y = l$):

$$U_2 = \frac{U_1}{\cos\beta l} = \frac{10}{-0{,}472} = -21{,}2 \text{ В}.$$

Действующее значение тока в начале линии вычислим по (9.23б):

$$\underline{I}_1 = j\frac{U_2}{Z_в}\sin\beta l = j\frac{-21{,}2}{470}(-0{,}881) = j39{,}7 \text{ мА}.$$

Комплексные действующие вдоль линии значения напряжений и токов могут быть записаны на основании формул (9.22б) и (9.23б):

$$\underline{U}(y) = \underline{U}_2\cos\beta y = -21{,}2\cos(2{,}1y) \text{ В};$$

$$\underline{I}(y) = j\frac{\underline{U}_2}{Z_в}\sin\beta y = -j\frac{21{,}2}{470}\sin(2{,}1y) = -j45\sin(2{,}1y)\ \text{мА}.$$

Действующие значения напряжений и токов соответственно равны:

$$U(y) = |-21{,}2\cos(2{,}1y)|\ \text{В};\quad I(y) = |-45\sin(2{,}1y)|\ \text{мА}.$$

По этим уравнениям на рис. 9.4, *а* построены соответствующие кривые.

Запишем в общем виде уравнения мгновенных значений напряжений и токов в режиме холостого хода ($I_2 = 0$):

$$u = U_{2m}\cos\beta y\sin\omega t;\quad i = \frac{U_{2m}}{Z_в}\sin\beta y\cos\omega t.$$

Для момента $t = 0$ эти уравнения примут вид:

$$u = 0;\quad i = \frac{U_{2m}}{Z_в}\sin\beta y = -\frac{21{,}2\sqrt{2}}{470}\sin(2{,}1y) = -63{,}6\sin(2{,}1y)\ \text{мА}.$$

Для момента $t = T/8$:

$$u = U_{2m}\cos\beta y\sin\omega\frac{T}{8} = -21{,}2\sqrt{2}\cos\beta y\sin\frac{\pi}{4} =$$

$$= -21{,}2\sqrt{2}\cos(2{,}1y)\ \text{В};$$

$$i = \frac{U_{2m}}{Z_в}\sin\beta y\cos\omega\frac{T}{8} = -\frac{21{,}2\sqrt{2}}{470}\cos\frac{\pi}{4}\sin\beta y =$$

$$= -45\sin(2{,}1y)\ \text{мА}.$$

На рис. 9.4, *б* построены кривые напряжения и тока для моментов $t = 0$ и $T/8$.

Коэффициент отражения со стороны нагрузки определим по (9.7):

$$p_н = \frac{Z_н - Z_в}{Z_н + Z_в}\Big|_{Z_н\to\infty} = 1.$$

Коэффициент бегущей волны

$$k_{бв} = \frac{1 - |\underline{p}_н|}{1 + |\underline{p}_н|} = 0.$$

9.31. Фидер без потерь, параметры которого $L_0 = 1{,}57$ мкГн/м, $C_0 = 7{,}1$ пФ/м, имеет длину $l = 35$ м и нагружен на сопротивление, равное волновому. Напряжение на приемном конце фидера $u_2 = U_{2m}\sin\omega t$ ($U_{2m} = 10$ мВ; $f = 10^8$ Гц).

Написать выражения для мгновенных значений напряжения u_1 и тока i_1 в начале фидера. Построить кривую распределения действующих значений напряжений U и тока I вдоль линии. Определить коэффициенты отражения и бегущей волны. Начертить кривые распреде-

ления мгновенных значений тока и напряжения в функции расстояния для трех моментов времени: $t_1 = 0$, $t_2 = T/8$, $t_3 = T/4$.

9.32. Линия без потерь, параметры которой $L_0 = 1{,}67$ мкГн/м, $C_0 = 6{,}67$ пФ/м и длина $l = 5$ м, нагружена на активное сопротивление R_2, равное $5Z_в$. Напряжение на нагрузке $U_2 = 10$ В, частота 10^8 Гц.

Определить напряжение и ток в начале линии и входное сопротивление линии. Рассчитать и начертить графики изменения действующих значений напряжения U и тока I, активной $R_{вх}$ и реактивной $X_{вх}$ составляющих входного сопротивления нагруженной линии. Определить коэффициенты бегущей и стоячей волн.

Р е ш е н и е. Сначала по (9.20) определяем $Z_в$ и β:

$$Z_в = \sqrt{\frac{L_0}{C_0}} = \sqrt{\frac{1{,}67 \cdot 10^{-6}}{6{,}67 \cdot 10^{-12}}} = 500 \text{ Ом};$$

$$\beta = \omega \sqrt{L_0 C_0} = 2\pi \cdot 10^8 \sqrt{1{,}67 \cdot 10^{-6} \cdot 6{,}67 \cdot 10^{-12}} = 2{,}1 \text{ рад/м}.$$

Сопротивление нагрузки

$$R_2 = 5Z_в = 5 \cdot 500 = 2500 \text{ Ом}.$$

Комплексные напряжение и ток в начале линии определяем по (9.22б) и (9.23б):

$$\underline{U}_1 = U_2 \cos \beta l + jI_2 Z_в \sin \beta l = 10 \cos (2{,}1 \cdot 5) +$$

$$+ j \frac{10}{2500} 500 \sin (2{,}1 \cdot 5) = -5 - j1{,}73 = 5{,}3e^{-j160°55'} \text{ В};$$

$$\underline{I}_1 = \underline{I}_2 \cos \beta l + j \frac{U_2}{Z_в} \sin \beta l = \frac{10}{2500} \cos (2{,}1 \cdot 5) +$$

$$+ j \frac{10}{500} \sin (2{,}1 \cdot 5) = -2 - j17{,}3 = 17{,}5e^{-j96°35'} \text{ мА}.$$

Разделив $\underline{U}_1$ на $\underline{I}_1$, получим

$$\underline{Z}_{вх} = \frac{\underline{U}_1}{\underline{I}_1} = \frac{5{,}3e^{-j160°55'}}{17{,}5 \cdot 10^{-3} e^{-j96°35'}} = 312e^{-j64°20'} \text{ Ом}.$$

Распределение действующих значений напряжения и тока находим по (9.26), в которых $m = Z_в/R_2 = 500/2500 = 0{,}2$:

$$U(y) = U_2 \sqrt{\cos^2 \beta y + m^2 \sin^2 \beta y} = 10 \sqrt{\cos^2 \beta y + 0{,}04 \sin^2 \beta y};$$

$$I(y) = \frac{U_2}{Z_в} \sqrt{m^2 \cos^2 \beta y + \sin^2 \beta y} = \frac{10}{500} \sqrt{0{,}04 \cos^2 \beta y + \sin^2 \beta y}.$$

Для построения кривых $U(y)$ и $I(y)$ в функции y удобно составить табл. 9.1.

Таблица 9.1

βy	$\cos\beta y$	$\cos^2\beta y$	$m^2\cos^2\beta y$	$\sin\beta y$	$\sin^2\beta y$	$m^2\sin^2\beta y$	U, В	I, мА
0	1	1	0,04	0	0	0	10	4
$\pi/8$	0,924	0,854	0,034	0,383	0,147	0,0059	9,26	9,5
$\pi/4$	0,707	0,5	0,02	0,707	0,5	0,02	7,21	14,4
$3\pi/8$	0,383	0,147	0,0059	0,924	0,854	0,034	4,26	18,5
$\pi/2$	0	0	0	1,0	1,0	0,04	2,0	20

Кривые $U(y)$ и $I(y)$ являются четными функциями величины βy. Они изображены на рис. 9.5, *а*.

Расчет кривых распределения активных $R_{вх}$ и реактивных $X_{вх}$ составляющих входного сопротивления проводится по формуле (9.24), в которой после отделения вещественной и мнимой составляющих получим

$$R_{вх} = \frac{mZ_в}{m^2\cos^2\beta y + \sin^2\beta y} = \frac{100}{0{,}04\cos^2\beta y + \sin^2\beta y};$$

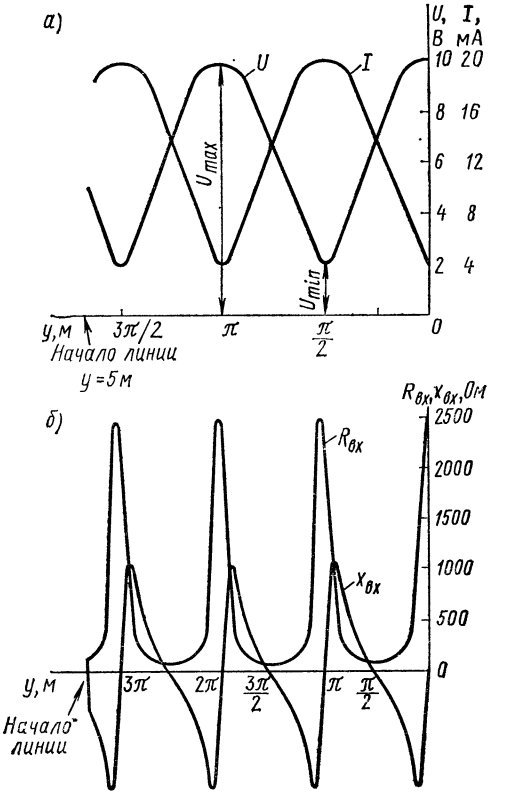


Рис. 9.5

$$X_{вх} = \frac{0{,}5Z_в\left(1-\frac{1}{m^2}\right)\sin 2\beta y}{\cos^2\beta y + \frac{1}{m^2}\sin^2\beta y} = = \frac{6000\sin 2\beta y}{\cos^2\beta y + 25\sin^2\beta y}.$$

По этим уравнениям на рис. 9.5, *б* построены кривые $R_{вх}$ и $X_{вх}$ в функции y.

Коэффициенты бегущей и стоячей волн определяем по (9.27):

$$k_{бв} = U_{min}/U_{max} = 2/10 = 0{,}2; \quad k_{св} = 1/k_{бв} = 1/0{,}2 = 5.$$

9.33. Линия без потерь имеет длину $l = 200$ м и параметры $L_0 = 2 \cdot 10^{-6}$ Гн/м и $C_0 = 5{,}55 \cdot 10^{-6}$ мкФ/м. Длина волны в линии $\lambda = 60$ м. В конце линии включена индуктивность $L = 0{,}01$ мГн.

Найти вторичные параметры линии. Доказать, что в линии будут стоячие волны тока и напряжения.

Найти: 1) на каком расстоянии от конца линии будут ближайшие пучности напряжения и тока; 2) отношение амплитуд напряжения и тока в пучности и в конце линии; 3) отношение амплитуд напряжения и тока в пучности и в начале линии.

Р е ш е н и е. Волновое сопротивление линии

$$Z_в = \sqrt{L_0/C_0} = 600 \text{ Ом}.$$

Коэффициент фазы

$$\beta = 2\pi/\lambda = 6{,}28/60 = 0{,}1047 \text{ рад/м}.$$

Пользуясь уравнениями (9.13б) и (9.14б) и имея в виду, что

$$\underline{\gamma} = j\beta, \quad \underline{I}_2 = \underline{U}_2/jX,$$

где

$$jX = j\omega L = \underline{Z}_н = j2\pi fL = j2\pi\,\frac{3\cdot 10^8}{60}\,0{,}01\cdot 10^{-3} = j314 \text{ Ом},$$

получим

$$U(y) = U_2\left(\cos\beta y + \frac{Z_в}{X}\sin\beta y\right) = \frac{U}{\cos\delta}\cos(\beta y - \delta),$$

$$I(y) = I_2\left(\cos\beta y - \frac{X}{Z_в}\sin\beta y\right) = -\frac{I_2}{\sin\delta}\sin(\beta y - \delta),$$

где

$$\delta = \operatorname{arctg}\frac{Z_в}{X} = \operatorname{arctg}\frac{600}{314} = 62°30' = 1{,}09 \text{ рад}.$$

Переходя к мгновенным значениям и считая, что напряжение имеет начальную фазу, равную нулю (т. е. $\underline{U}_2 = U_2$), тогда $\underline{I}_2 = -jI_2$, $-\underline{I}_2 = jI_2 = I_2 e^{j90°}$,

получим

$$u = \frac{\sqrt{2}\,U_2}{\cos\delta}\cos(\beta y - \delta)\sin\omega t = U_{2m}\cos(\beta y - \delta)\sin\omega t;$$

$$i = \frac{\sqrt{2}\,I_2}{\sin\delta}\sin(\beta y - \delta)\cos\omega t = I_{2m}\sin(\beta y - \delta)\cos\omega t.$$

Эти уравнения показывают, что в линии имеют место стоячие волны (рис. 9.6).

Ближайшую от конца линии пучность напряжения находим из уравнения $\cos(\beta y_1 - \delta) = 1$, т. е.

$$\beta y_1 - \delta = 0, \quad y_1 = \delta/\beta = 1{,}09/0{,}1047 = 10{,}5 \text{ м}.$$

Ближайшая от конца линии пучность тока — на расстоянии

$$y_2 = y_1 + \lambda/4 = 10{,}5 + 60/4 = 25{,}5 \text{ м}.$$

Отношение амплитуды напряжения в пучности к амплитуде напряжения в конце линии равно

$$\frac{U_2}{\cos\delta} : U_2 = \frac{1}{\cos\delta} = \frac{1}{\cos 62^\circ 30'} = 2{,}15,$$

а для тока такое отношение имеет вид

$$\frac{I_2}{\sin\delta} : I_2 = \frac{1}{\sin\delta} = 1{,}13.$$

Отношение амплитуды напряжения в пучности к амплитуде напряжения в начале линии равно

$$\frac{U_2}{\cos\delta} : \frac{U_2}{\cos\delta}(\cos\beta l - \delta) = \frac{1}{\cos(0{,}1047 \cdot 200 - 1{,}09)} =$$

$$= \frac{1}{\cos 19{,}85} = \frac{1}{\cos(19{,}85 - 6\pi)} = \frac{1}{\cos 1} = \frac{1}{\cos 57{,}3^\circ} = 1{,}85,$$

а для тока такое отношение равно

$$\frac{I_2}{\sin\delta} : \frac{I_2}{\sin\delta}\sin(\beta l - \delta) = \frac{1}{\sin 57{,}3^\circ} = 1{,}19.$$

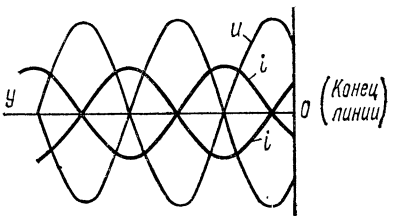


Рис. 9.6

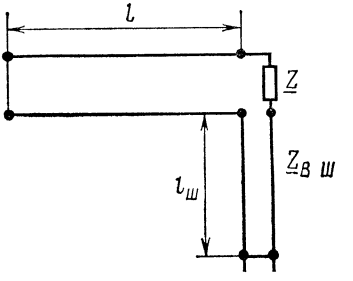


Рис. 9.7

9.34. Рассчитать входное сопротивление сверхвысокочастотной длинной линии без потерь, которая нагружена на последовательно включенные сопротивление Z и короткозамкнутый шлейф (короткозамкнутый отрезок длинной линии без потерь), как показано на рис. 9.7. Даны: волновые сопротивления длинной линии и шлейфа $Z_в = Z_{вш} = 600$ Ом, сопротивление $Z = 500$ Ом, длина линии $l = 190$ см и шлейфа $l_ш = 10$ см. Длина волны в линии и шлейфе одинакова: $\lambda = \lambda_ш = 120$ см.

Р е ш е н и е. Входное сопротивление короткозамкнутого шлейфа по (9.25) равно

$$\underline{Z}_ш = Z_{вш}\, j\, \mathrm{tg}\,(\beta_ш l_ш) = Z_{вш}\, j\, \mathrm{tg}\left(\frac{\beta_ш \lambda_ш}{\lambda_ш} l_ш\right) =$$

$$= 600 j\, \mathrm{tg}\left(\frac{360° \cdot 10}{120}\right) = j346 \text{ Ом}.$$

Сопротивление нагрузки длинной линии складывается из входного сопротивления короткозамкнутого шлейфа и сопротивления Z:

$$\underline{Z}_н = \underline{Z}_ш + Z = j346 + 500 = 610 e^{j34°40'} \text{ Ом}.$$

Входное сопротивление длинной линии определяют по (9.15):

$$Z_1 = Z_в \frac{\underline{Z}_н + j Z_в \,\mathrm{tg}\left(\frac{360° l}{\lambda}\right)}{_в + j\underline{Z}_н \,\mathrm{tg}\left(\frac{360° l}{\lambda}\right)} = 1040 e^{j\,18°20'} \text{ Ом}.$$

9.35. Клистронный СВЧ генератор создает на входе длинной линии без потерь напряжение 10 В (рис. 9.8). Линия с волновым сопротивлением $\underline{Z}_в = 100$ Ом нагружена на согласованное сопротивление $Z_н = 100$ Ом. В средней части линии включен короткозамкнутый шлейф (линия без потерь) с тем же волновым сопротивлением $Z_{вш} = 100$ Ом и длиной $l_ш = \lambda/8$, где λ — длина волны, одинаковая в линии и шлейфе. Длина линии $l = \lambda/2$. Рассчитать входное сопротивление линии и ток клистронного генератора.

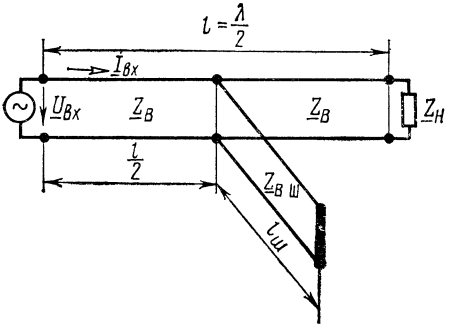


Рис. 9.8

9.36. На входе высокочастотной линии связи длиной $l = 1{,}5$ км создается сигнал напряжением $U_1 = 0{,}5$ В и частотой $f = 300$ кГц. Линия, со-

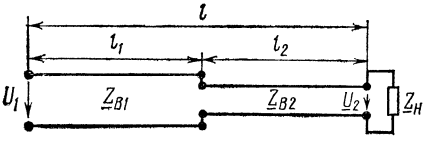


Рис. 9.9

стоящая из двух участков — медной двухпроводной линии длиной $l_1 = 0{,}7$ км с параметрами $Z_{в1} = 586$ Ом, $\beta_1 = 6{,}46$ рад/км и кабельной линии длиной $l_2 = 0{,}8$ км с параметрами $Z_{в2} = 76$ Ом, $\beta_2 = 6{,}7$ рад/км, нагружена на сопротивление приемника $Z_н = 600$ Ом (рис. 9.9). Рассчитать напряжение на приемнике. Потерями в линии связи пренебречь.

Ж. Методы согласования линии с нагрузкой

9.37. Линию, параметры которой приведены в задаче 9.32, требуется согласовать с чисто активной нагрузкой $R_2 = 5\,Z_в$ с помощью четвертьволнового отрезка.

Определить волновое сопротивление $Z_{в1}$ этого отрезка так, чтобы в точках *аа* соединения линии со вставкой не было отражения. Полагая, что напряжение на нагрузке $U_2 = 10$ В, $f = 10^8$ Гц, вычислить напряжение и ток в начале вставки и в начале линии. Рассчитать и построить графики распределения действующих значений напряжения и тока вдоль линии и вставки. Вычислить мощности, подводимую к линии и расходуемую в нагрузке.

Р е ш е н и е. Схема согласования линии с нагрузкой с помощью четвертьволновой вставки дана на рис. 9.10, *а*.

Вычислим длину волны и коэффициент фазы по (9.3):

$$\lambda = c/f = 3 \cdot 10^8/10^8 = 3 \text{ м}; \quad \beta = 2\pi/\lambda = 2\pi/3.$$

Длина четвертьволновой вставки

$$l_1 = \lambda/4 = 3/4 = 0{,}75 \text{ м}.$$

Входное сопротивление нагруженной четвертьволновой вставки между точками *аа* можно определить, используя формулу (9.24). У такой вставки $l_1 = \lambda/4$, а следовательно, по (9.3) имеем

$$\beta l_1 = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot \frac{\lambda}{4} = \frac{\pi}{2}.$$

Подставляя найденное значение βl_1 в (9.24) и обозначая волновое сопротивление вставки через $Z_{в1}$, будем иметь

$$Z_{вх} = Z_{в1} \frac{R_2 + jZ_{в1} \operatorname{tg} \beta_1 l_1}{Z_{в1} + jR_2 \operatorname{tg} \beta l_1} = Z_{в1} \frac{R_2 + jZ_{в1} \operatorname{tg} \dfrac{\pi}{2}}{Z_{в1} + jR_2 \operatorname{tg} \dfrac{\pi}{2}}.$$

Последнее выражение дает неопределенность, раскрывая которую, получим $Z_{вх} = Z_{в1}^2/R_2$.

Для согласования линии с нагрузкой необходимо выполнить условие $Z_{вх} = Z_{в1}$ или $Z_{в1}^2/R_2 = Z_в$.

Отсюда

$$Z_{в1} = \sqrt{Z_в R_2} = \sqrt{500 \cdot 2500} = 1120 \text{ Ом}.$$

Напряжение и ток в начале вставки (точки *аа*) найдем по формулам (9.13б) и (9.14б), в которых следует принять $y = l_1$ и волновое сопротивление $Z_{в1}$:

$$\underline{U}_{aa} = U_2 \cos \beta l_1 + jI_2 Z_{в1} \sin \beta l_1 =$$

$$= U_2 \cos \frac{\pi}{2} + jI_2 Z_{в1} \sin \frac{\pi}{2} = j \frac{U_2}{R_2} Z_{в1} = j \frac{10}{2500} \cdot 1120 = 4{,}5 \text{ В};$$

$$\underline{I}_{aa} = I_2 \cos \beta l_1 = j \frac{U_2}{Z_{в1}} \sin \beta l_1 \approx j9 \text{ мА}.$$

Линия в точках *аа* согласована с нагрузкой. Напряжение и ток в любой точке такой линии при отсчете с конца определяются формулами

$$\underline{U} = U_{aa} e^{j\beta l}; \quad \underline{I} = \frac{U_{aa}}{Z_в} e^{j\beta l}.$$

Действующие значения напряжения и тока представляют собой модули последних комплексов и соответственно равны:

$$U = \left| U_{aa} e^{j\beta l} \right| = U_{aa} = 4{,}5 \text{ В};$$

$$I = \left| \frac{U_{aa}}{Z_в} e^{j\beta l} \right| = I_{aa} \approx 9 \text{ мА}.$$

Графики этих величин — прямые, параллельные оси y (рис. 9.10, *а*). Распределение действующих значений напряжения и тока вдоль вставки определяется по (9.26), где

$$m = Z_{в1}/R_2 = 1120/2500 \approx 0{,}45;$$

$$U(y) = U_2 \sqrt{\cos^2 \beta y + m^2 \sin^2 \beta y} =$$

$$= 10 \sqrt{\cos^2\left(\frac{2\pi}{3} y\right) + 0{,}45 \sin^2\left(\frac{2\pi}{3} y\right)} \text{ В};$$

$$I(y) = \frac{I_2}{m} \sqrt{m^2 \cos^2 \beta y + \sin^2 \beta y} =$$

$$= 9 \sqrt{0{,}45 \cos^2\left(\frac{2\pi}{3} y\right) + \sin^2\left(\frac{2\pi}{3} y\right)} \text{ мА}.$$

По этим уравнениям на рис. 9.10, *б* построены кривые $U(y)$ и $I(y)$.

Расчет мощностей. Действующие значения напряжения и тока в начале линии имеют такие же значения, как и в точках *аа*, т. е. $U_1 = 4{,}5$ В, $I_1 = 9$ мА, а по фазе совпадают, так как линия согласована с чисто активной нагрузкой, а подводимая к линии мощность

$$P_1 = U_1 I_1 = 4{,}5 \cdot 9 \cdot 10^{-3} \approx 40 \cdot 10^{-3} \text{ Вт}.$$

Мощность, расходуемая в нагрузке,

$$P_2 = U_2 I_2 = U_2 \frac{U_2}{R} = \frac{10^2}{2500} = 40 \cdot 10^{-3} \text{ Вт},$$

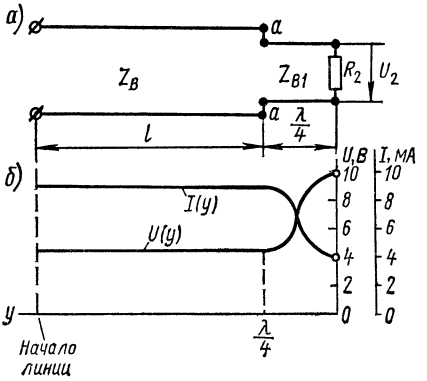


Рис. 9.10

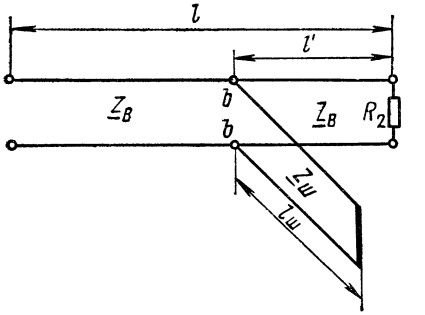


Рис. 9.11

т. е. $P_2 = P_1$. Этот результат можно бы предвидеть, если учесть, что линия идеальная и, следовательно, не имеет потерь, поэтому вся подводимая к линии мощность расходуется в нагрузке.

9.38. Линию без потерь, параметры которой $Z_в = 500$ Ом, $\beta = 2{,}1$ рад/м, длина $l = 5$ м, надо согласовать с активной нагрузкой $R_2 = 2500$ Ом с помощью короткозамкнутого шлейфа, имеющего такое же волновое сопротивление, как и линия рис. 9.11. Определить минимальную длину шлейфа $l_ш$ и место его включения, при которых входное сопротивление в месте присоединения шлейфа (точки bb) будет равно волновому сопротивлению линии.

Чему в этом случае равны ток, напряжение и мощности, подводимая к линии и расходуемая в нагрузке? Напряжение на нагрузочном сопротивлении $U_2 = 10$ В, частота $f = 10^8$ Гц.

Р е ш е н и е. Из рис. 9.11 видно, что участок линии длиной l' и шлейф, имеющий длину $l_ш$, соединены параллельно. Вычислим их эквивалентное сопротивление. Для этого надо определить входные сопротивления: $\underline{Z}'$ — участка линии длиной l' и $Z_ш$ — сопротивление короткозамкнутой линии без потерь длиной $l_ш$. Каждое из этих сопротивлений вычисляем по формуле (9.24):

$$\underline{Z}' = R_2 \frac{1 + jm \operatorname{tg} \beta l'}{1 + j \frac{1}{m} \operatorname{tg} \beta l'}, \text{ где } m = Z_в/R_2;\ \underline{Z}_{вх\,ш} = jZ_в \operatorname{tg} \beta l_ш.$$

Входные проводимости этих участков — величины, обратные их сопротивлениям. Входная проводимость участка линии длиной l' представляет собой комплексную величину, а входная проводимость шлейфа — мнимую. Эти проводимости соответственно равны:

$$\underline{Y}' = G' + jB' = \frac{1}{\underline{Z}'} = \frac{1}{R_2} \frac{1 + j \frac{1}{m} \operatorname{tg} \beta l'}{1 + jm \operatorname{tg} \beta l'} =$$

$$= \frac{1}{R_2}\,\frac{1+\operatorname{tg}^2\beta l'}{1+m^2\operatorname{tg}^2\beta l'} + j\,\frac{1}{R_2}\,\frac{\left(\frac{1}{m}-m\right)\operatorname{tg}\beta l'}{1+m^2\operatorname{tg}^2\beta l'},$$

$$\underline{Y}_{ш} = -jB_{ш} = \frac{1}{\underline{Z}_{ш}} = -j\,\frac{1}{Z_в \operatorname{tg}\beta l_{ш}}.$$

Входное сопротивление любого отрезка линии, нагруженного согласованно, должно быть равно волновому сопротивлению. Это означает, что входное сопротивление в точках *bb*, представляющее собой сопротивление двух параллельных ветвей, тоже должно быть равно $Z_в$:

$$Z_в = \frac{Z' Z_{вх\,ш}}{Z' + Z_{вх\,ш}} \quad \text{или} \quad \frac{1}{Z_в} = \frac{1}{\underline{Z'}} + \frac{1}{Z_{вх\,ш}} = \underline{Y'} + Y_{вх\,ш}.$$

Учитывая, что волновое сопротивление линии без потерь является действительной величиной, получаем

$$1/Z_в = G', \quad B' = B_{ш},$$

или

$$\frac{1}{Z_в} = \frac{1}{R_2}\cdot\frac{1+\operatorname{tg}^2\beta l'}{1+m^2\operatorname{tg}^2\beta l'} \tag{1}$$

и

$$\frac{1}{Z_в \operatorname{tg}\beta l_{ш}} = \frac{1}{R_2}\cdot\frac{\left(\frac{1}{m}-m\right)\operatorname{tg}\beta l'}{1+m^2\operatorname{tg}^2\beta l'}. \tag{2}$$

Уравнение (1) с учетом значения m можно преобразовать следующим образом:

$$\frac{1}{m} + m\operatorname{tg}^2\beta l' = 1 + \operatorname{tg}\beta l'; \quad \operatorname{tg}\beta l' = \pm\sqrt{\frac{1}{m}} = \pm\sqrt{\frac{R_2}{Z_в}}.$$

Следовательно, длину участка линии, находящегося за местом присоединения шлейфа, можно найти по формуле

$$l' = \frac{1}{\beta}\operatorname{arctg}\left(\pm\sqrt{\frac{R_2}{Z_в}}\right). \tag{3}$$

Подстановка выражения $tg\beta l'$ в уравнение (2) дает возможность найти длину шлейфа $l_{ш}$. Простейшие преобразования приводят к формуле

$$l_{ш} = \frac{1}{\beta}\operatorname{arctg}\left(\frac{\pm\sqrt{R_2 Z_в}}{R_2 - Z_в}\right). \tag{4}$$

Формулы (3) и (4) содержат круговые функции, которые многозначны. Это приводит к многозначности величин l' и $l_{ш}$. При расчете

следует выбирать наименьшее значение $l_ш$, так как это обеспечивает наименьшие размеры согласовывающего устройства.

Подставляя числовые значения в формулу (4), получим

$$l_ш = \frac{1}{2,1}\operatorname{arctg}\left(\frac{\pm\sqrt{2500\cdot 500}}{2500-500}\right) = \frac{1}{2,1}\operatorname{arctg}0,56 =$$

$$= \frac{1}{2,1}0,51 = 0,243 \text{ м}.$$

Здесь принят знак плюс, так как при этом значение $l_ш$ минимально.

Наконец, по формуле (3) находим

$$l' = \frac{1}{2,1}\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{2500}{500}} = \frac{1}{2,1}\operatorname{arctg}2,24 = \frac{1}{2,1}\cdot 1,15 = 0,548 \text{ м}.$$

Напряжение в точках bb присоединения шлейфа вычислим по формуле (9.26):

$$U_{bb} = U_2\sqrt{\cos^2\beta l' + m^2\sin^2\beta l'} =$$

$$= 10\sqrt{\cos^2(2,1\cdot 0,548) + 0,2^2\sin^2(2,1\cdot 0,548)} =$$

$$= 10\sqrt{\cos^2 1,15 + 0,2^2\sin^2 1,15} =$$

$$= 10\sqrt{0,4085^2 + 0,2^2\cdot 0,9128^2} = 4,46 \text{ В}.$$

Так как линия не имеет потерь, то напряжение в ее начале имеет то же значение, т. е. $U_1 = 4,46$ В. Ток в начале линии (так как линия нагружена на согласованную нагрузку)

$$I_1 = U_1/Z_в = 4,46/500 = 8,92\cdot 10^{-3} \text{ А} = 8,92 \text{ мА}.$$

Мощность, поступающая в линию,

$$P_1 = U_1 I_1 = 4,46\cdot 8,92\cdot 10^{-3} = 40 \text{ мВт}.$$

Мощность, расходуемая в нагрузке,

$$P_2 = U_2 I_2 = 10\cdot\frac{10}{2500} = 40 \text{ мВт}.$$

Мощности $P_1 = P_2$, так как линия не имеет потерь.

3. Схемы, эквивалентные отрезкам линии

9.39. Коаксиальный кабель без потерь при частоте $f = 100$ МГц имеет следующие параметры: $Z_в = 100$ Ом, $\beta = 2,1$ рад/м.

Определить: а) величину эквивалентной емкости, заменяющей этот кабель длиной 50 см, разомкнутый на конце; б) величину эквивалентной индуктивности того же кабеля, но замкнутого на конце накоротко.

9.40. Резонатор (колебательный контур) выполнен из короткозамкнутого отрезка четвертьволновой медной двухпроводной линии

длиной $l = 0{,}75$ м (рис. 9.12, *а*). Диаметр проводов $d = 4$ мм, расстояние между ними $a = 20$ см. Определить длину волны λ_0, резонансную частоту f_0, первичные параметры отрезка линии R_0, L_0, C_0, волновое сопротивление $Z_в$, коэффициент ослабления α и входное сопротивление $Z_{вх}$ короткозамкнутого отрезка линии. Вычислить параметры контура, эквивалентного четвертьволновому отрезку линии, и его добротность.

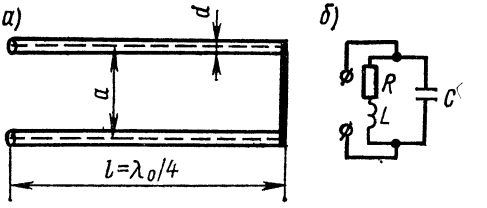


Рис. 9.12

Р е ш е н и е. Длина волны и частота соответственно равны:

$$\lambda_0 = 4l = 4 \cdot 0{,}75 = 3 \text{ м}; \quad f_0 = c_0/\lambda_0 = 3 \cdot 10^8/3 = 10^8 \text{ Гц} = 100 \text{ МГц}.$$

Активное сопротивление единицы длины линии найдем по формуле (П4.3б):

$$R_0 = 16{,}65 \cdot 10^{-2} \sqrt{f}/d = 16{,}65 \cdot 10^{-2} \sqrt{10^8}/4 =$$

$$= 420 \text{ Ом/км} = 0{,}42 \text{ Ом/м}.$$

Индуктивность и емкость единицы длины провода вычисляем по формулам (П4.5б) и (П4.6):

$$L_0 = 4 \cdot 10^{-4} \ln \frac{a}{r_0} = 4 \cdot 10^{-4} \ln \frac{20}{0{,}2} =$$

$$= 1{,}842 \cdot 10^{-3} \text{ Гн/км} = 1842 \text{ мкГн/м};$$

$$C_0 = \frac{1}{36 \ln \frac{a}{r_0}} = \frac{1}{36 \ln \frac{20}{0{,}2}} = 6{,}03 \cdot 10^{-9} \text{ Ф/км} = 6{,}03 \cdot 10^{-12} \text{ пФ/м}.$$

Волновое сопротивление и коэффициент ослабления определяем по (9.4):

$$Z_в = \sqrt{\frac{L_0}{C_0}} = \sqrt{\frac{1{,}842 \cdot 10^{-6}}{6{,}03 \cdot 10^{-12}}} = 552 \text{ Ом};$$

$$\alpha = \frac{R_0}{2Z_в} = \frac{0{,}42}{2 \cdot 552} = 0{,}38 \cdot 10^{-3} \text{ Нп/м} = 3{,}3 \cdot 10^{-3} \text{ дБ/м}.$$

Входное сопротивление вычисляем по (9.15) с учетом того, что

$$f_0 = \frac{3 \cdot 10^8}{\lambda_c}, \quad \alpha = \frac{R_0}{2Z_в}, \quad \alpha l \ll 1, \quad \operatorname{sh} \alpha l \approx \alpha l, \quad \operatorname{ch} \alpha l \approx 1,$$

$$Z_{вх} = R_{рез} = \frac{Z_в}{\frac{R_0 l}{2}} = \frac{552}{\frac{0{,}42 \cdot 0{,}75}{2}} = 1{,}94 \cdot 10^6 \text{ Ом} = 1{,}94 \text{ МОм}.$$

Из теории известно, что эквивалентным коротковолновому четвертьволновому отрезку линии является параллельный контур (рис. 9.12, *б*), параметры которого находим по формулам

$$R = \frac{8}{\pi^2} R_0 l = \frac{8}{3{,}14^2} 0{,}42 \cdot 0{,}75 = 0{,}252 \text{ Ом};$$

$$L = \frac{8}{\pi^2} L_0 l = \frac{8}{3{,}14^2} 1{,}842 \cdot 10^{-8} \cdot 0{,}75 = 1{,}12 \cdot 10^{-6} \text{ Гн} = 1{,}12 \text{ мкГн}.$$

$$C = \frac{1}{2} C_0 l = \frac{1}{2} 6{,}03 \cdot 10^{-12} \cdot 0{,}75 = 2{,}26 \cdot 10^{-12} \text{ Ф} = 2{,}26 \text{ пФ}.$$

Добротность контура

$$Q = \frac{\sqrt{\frac{L}{C}}}{R} = \frac{\sqrt{\frac{1{,}12 \cdot 10^{-6}}{2{,}26 \cdot 10^{-12}}}}{0{,}252} = 2760.$$

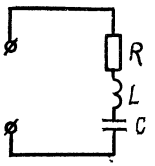


Рис. 9.13

9.41. Резонатор выполнен в виде разомкнутого четвертьволнового отрезка двухпроводной линии, параметры которой даны в предыдущей задаче.

Вычислить параметры контура, эквивалентного разомкнутому четвертьволновому отрезку, и его добротность.

Р е ш е н и е. Эквивалентным разомкнутому четвертьволновому отрезку линии является последовательный контур рис. 9.13, параметры которого вычисляем по следующим известным из теории формулам:

$$R = \frac{1}{2} R_0 l = \frac{1}{2} \cdot 0{,}42 \cdot 0{,}75 = 0{,}158 \text{ Ом};$$

$$L = \frac{1}{2} L_0 l = \frac{1}{2} \cdot 1{,}842 \cdot 10^{-6} \cdot 0{,}75 = 0{,}69 \cdot 10^{-6} \text{ Гн};$$

$$C = \frac{8}{\pi^2} C_0 l = \frac{8}{\pi^2} \cdot 6{,}03 \cdot 10^{-12} \cdot 0{,}75 = 3{,}65 \cdot 10^{-12} \text{ Ф};$$

$$Q = \frac{\sqrt{\frac{L}{C}}}{R} = \frac{\sqrt{\frac{0{,}69 \cdot 10^{-6}}{3{,}65 \cdot 10^{-12}}}}{0{,}158} = 2760 \text{ Ом}.$$

Отметим, что добротность четвертьволнового отрезка линии в режимах короткого замыкания и холостого хода одна и та же.

9.42. Показать, что подключение к разомкнутому концу линии без потерь конденсатора емкостью C эквивалентно удлинению ее на величину $l_C = \frac{\lambda}{2\pi} \operatorname{arctg}(\omega C Z_в)$, а включение в конце той же линии индуктивности L эквивалентно включению отрезка короткозамкнутой линии длиной $l_L = \frac{\lambda}{2\pi} \operatorname{arctg} \frac{\omega L}{Z_в}$.

ГЛАВА ДЕСЯТАЯ

ДВУХПОЛЮСНИКИ

ОСНОВНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ И СООТНОШЕНИЯ

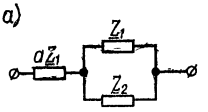
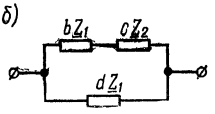
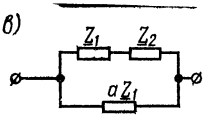
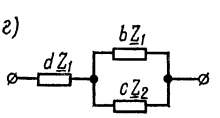
1. Комплексное сопротивление пассивного двухполюсника. Это сопротивление содержит активные и реактивные элементы и определяется выражением

$$Z(\overline{p}) = \frac{A(\overline{p})}{B(\overline{p})} = \frac{a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \cdots + a_k p^k + \cdots + a_1 p + a_0}{b_m p^m + b_{m-1}^{m-1} p^{m-1} + \cdots + b_k p^k + \cdots + b_1 p + b_0}, \quad (10.1)$$

где $p = j\omega$, а a_k и b_k — вещественные коэффициенты, зависящие от элементов схемы двухполюсника. Для любых двухполюсников коэффициенты n и m не могут отличаться более чем на единицу, поэтому возможны случаи $n - m = \pm 1$ либо $n = m$; кроме того, a_0 либо b_0 могут равняться нулю.

2. Эквивалентные двухполюсники — это двухполюсники различной структуры, имеющие одинаковые частотные характеристики. В табл. 10.1 приведены некоторые схемы и условия их эквивалентности.

Таблица 10.1

Схемы некоторых эквивалентных двухполюсников	Условия эквивалентности	Номера формул
а)  б) 	$b = a(1 + a)$, $c = (1 + a)^2$, $d = 1 + a$.	(10.2)
в)  г) 	$b = \frac{a^2}{1 + a}$, $c = \left(\frac{a}{1 + a}\right)^2$, $d = \frac{a}{1 + a}$.	(10.3)

Пример дан в задаче 10.3.

3. Обратные двухполюсники. Это двухполюсники с сопротивлениями Z и Z', произведение которых является действительным положительным числом R^2, не зависящим от частоты (постоянно):

$$\underline{Z}\,\underline{Z}' = R^2. \qquad (10.4)$$

Сопротивление $\underline{Z}' = R^2/\underline{Z}$ называется обратным сопротивлению $\underline{Z}$ в отношении R^2.

Пример приведен в задаче 10.8.

4. Реактивные двухполюсники. Это двухполюсники, состоящие только из элементов L и C. Их сопротивления реактивны:

$$\underline{Z} = jX(\omega). \qquad (10.5)$$

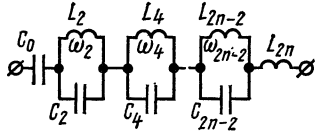
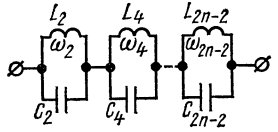
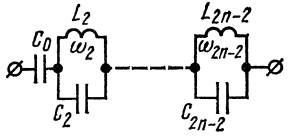
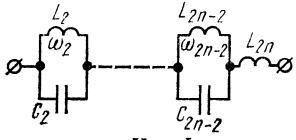
В канонических схемах реактивных двухполюсников (табл. 10.2) общее число их элементов минимально (при условии, что каждый элемент эквивалентен любому сложному соединению однородных элементов). Число индуктивностей или равно числу емкостей, или отличается от него на единицу. Общее число резонансных частот на единицу меньше общего числа реактивных элементов. Частоты резонансов напряжений и токов реактивных двухполюсников чередуются: между любыми двумя резонансами напряжений имеется один резонанс токов и между любыми двумя резонансами токов имеется один резонанс напряжений (см. рис. табл. 10.2). При возрастании частоты реактивное сопротивление двухполюсника $X(\omega)$ в точках непрерывности возрастает (с учетом знака реактивного сопротивления). Если в схеме двухполюсника имеется путь для постоянного тока, то первым будет резонанс токов, а если такого пути нет, то первым станет резонанс напряжений. Выражения сопротивлений двухполюсников $\underline{Z}$ содержат множитель $j\omega$, при этом если первым является резонанс напряжений, то этот множитель находится в знаменателе, а если первым будет резонанс токов, то он находится в числителе. В формулах сопротивлений $\underline{Z}$ числитель содержит произведение разностей квадратов частот резонансов напряжений и любой частоты, а знаменатель — произведение разностей квадратов частот резонансов токов и любой частоты. В канонической схеме не должно быть более одного пути как для постоянного тока, так и для тока бесконечно большой частоты.

В зависимости от характера сопротивления при частотах $\omega \to 0$ и $\omega \to \infty$ (вблизи нуля и бесконечности) двухполюсники делят на 4 класса (см. табл. 10.2). В этой таблице приведены две основные формы канонических схем двухполюсников, расчетные формулы сопротивлений, их частотные характеристики, расположение нулей и полюсов. В формулах табл. 10.2 $\omega_1, \omega_3, \ldots, \omega_{2n-1}$ — частоты резонансов напряжений, $\omega_2, \omega_4, \ldots, \omega_{2n-2}$ — частоты резонансов токов; при этом $\omega_1 < \omega_2 < \omega_3 < \ldots < \omega_{2n-2} < \omega_{2n-1}$.

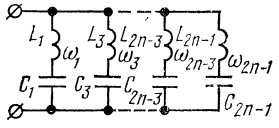
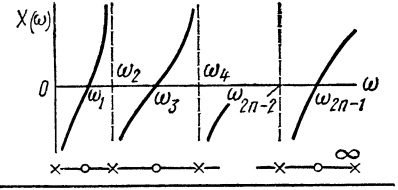
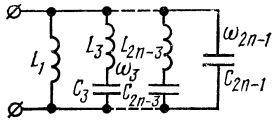
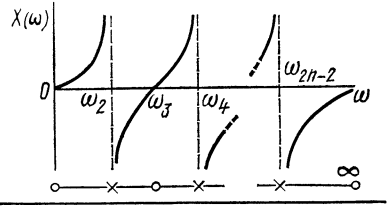
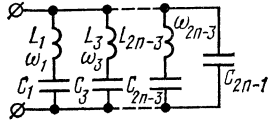
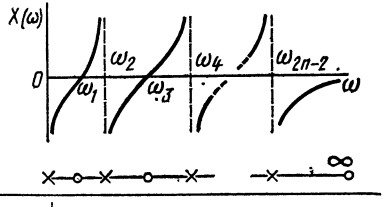
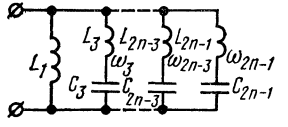
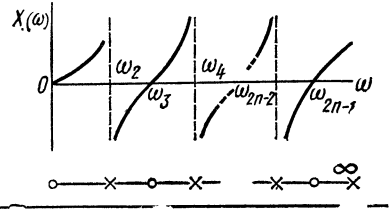
От канонических схем двухполюсников класса I можно перейти к соответствующим каноническим схемам двухполюсников класса II, исключив из первой схемы емкость C_0 и индуктивность L_{2n}, а из второй C_1 и L_{2n-1}; для перехода к классу III из первой схемы следует исключить индуктивность L_{2n}, а из второй — L_{2n-1}; для перехода к классу IV из первой схемы надо исключить C_0, а из второй — C_1.

Постоянные H, входящие в выражение сопротивлений реактивных двухполюсников, имеют размерность индуктивности для двухполюсников классов I и IV и размерность, обратную емкости, для клас-

Таблица 10.2

Класс двухполюсника	Нули и полюсы при		Характер сопротивления при		Число элементов	Канонические схемы двухполюсников (схемы Фостера)
	$\omega = 0$	$\omega = \infty$	$\omega \to 0$	$\omega \to \infty$		первая форма
I	×	×	Емкостный	Индуктивный	$2n$	 $H = L_{2n}$
II	0	0	Индуктивный	Емкостный	$2n - 2$	 $H = 1/C_2 + 1/C_4 + \cdots + 1/C_{2n-2}$
III	×	0	Емкостный	То же	$2n - 1$	 $H = 1/C_0 + 1/C_2 + \cdots + 1/C_{2n-2}$
IV	0	×	Индуктивный	Индуктивный	$2n - 1$	 $H = L_{2n}$

Продолжение табл. 10.2

Класс двухполюсника	Канонические схемы двухполюсников (схемы Фостера) — вторая форма	Расчетные формулы сопротивлений двухполюсников	Графики частотных характеристик сопротивлений
I	 $H=\left(\frac{1}{L_1}+\frac{1}{L_3}+\cdots+\frac{1}{L_{2n-1}}\right)^{-1}$	$Z(j\omega)=\frac{H}{j\omega}\frac{\left(\omega_1^2-\omega^2\right)}{\left(\omega_2^2-\omega^2\right)}\times$ $\times\frac{\left(\omega_3^2-\omega^2\right)\cdots\left(\omega_{2n-1}^2-\omega^2\right)}{\left(\omega_4^2-\omega^2\right)\cdots\left(\omega_{2n-2}^2-\omega^2\right)}$	
II	 $H=\frac{1}{C_{2n-1}}$	$Z(j\omega)=j\omega H\frac{\left(\omega_3^2-\omega^2\right)}{\left(\omega_2^2-\omega^2\right)}\times$ $\times\frac{\left(\omega_5^2-\omega^2\right)\cdots\left(\omega_{2n-3}^2-\omega^2\right)}{\left(\omega_4^2-\omega^2\right)\cdots\left(\omega_{2n-2}^2-\omega^2\right)}$	
III	 $H=\frac{1}{C_{2n-1}}$	$Z(j\omega)=\frac{H}{j\omega}\frac{\left(\omega_1^2-\omega^2\right)}{\left(\omega_2^2-\omega^2\right)}\times$ $\times\frac{\left(\omega_3^2-\omega^2\right)\cdots\left(\omega_{2n-3}^2-\omega^2\right)}{\left(\omega_4^2-\omega^2\right)\cdots\left(\omega_{2n-2}^2-\omega^2\right)}$	
IV	 $H=\left(\frac{1}{L_1}+\frac{1}{L_3}+\cdots+\frac{1}{L_{2n-1}}\right)^{-1}$	$Z(j\omega)=j\omega H\frac{\left(\omega_3^2-\omega^2\right)}{\left(\omega_2^2-\omega^2\right)}\times$ $\times\frac{\left(\omega_5^2-\omega^2\right)\cdots\left(\omega_{2n-1}^2-\omega^2\right)}{\left(\omega_4^2-\omega^2\right)\cdots\left(\omega_{2n-2}^2-\omega^2\right)}$	

сов II и III. Для нахождения постоянной H надо определить характер сопротивления двухполюсника (индуктивный или емкостный) при частоте, превышающей наибольшую резонансную. Если оно имеет емкостный характер, в схеме двухполюсника следует разомкнуть все ветви, содержащие индуктивности, и определить эквивалентную емкость $C_{эк}$ полученной схемы, а затем H приравнять этой обратной эквивалентной емкости ($H = 1/C_{эк}$). В случае индуктивного характера сопротивления все емкости схемы следует заменить короткозамкнутыми участками, подсчитать эквивалентную индуктивность $L_{эк}$ оставшейся схемы и приравнять ее H ($H = L_{эк}$).

Примеры приведены в задачах 10.11; 10.13 и 10.15.

5. Частотные характеристики сопротивлений двухполюсников $\underline{Z}$ или проводимостей $\underline{Y}$. Эти характеристики выражаются дробно-рациональными функциями и могут быть представлены в виде отношений двух полиномов [см. уравнение (10.1)]:

$$\underline{Z} = \frac{\sum_0^n a_n (j\omega)^n}{\sum_0^m b_m (j\omega)^m} = R(\omega) + jX(\omega) = Z(\omega)\, e^{j\varphi(\omega)}, \qquad (10.6)$$

где

$$Z(\omega) = \sqrt{R^2(\omega) + X^2(\omega)}; \quad \varphi(\omega) = \operatorname{arctg} X(\omega)/R(\omega),$$

где $R(\omega)$ и $X(\omega)$ — зависимости вещественной и мнимой частей комплексного сопротивления $\underline{Z}$ от частоты; $Z(\omega)$ — амплитудно-частотная характеристика (АЧХ), выражающая зависимость модуля полного сопротивления от частоты; $\varphi(\omega)$ — фазочастотная характеристика (ФЧХ), выражающая зависимость аргумента Z от частоты.

Вместо АЧХ и ФЧХ можно строить годограф — кривую, описываемую концом вектора $\underline{Z}$ на комплексной плоскости при изменении частоты, или, что то же самое, кривую зависимости $X(\omega)$ от $R(\omega)$.

Пример дан в задаче 10.18.

УПРАЖНЕНИЯ И ЗАДАЧИ

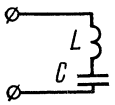
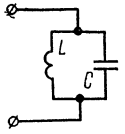
А. Эквивалентные и обратные двухполюсники

10.1. В схеме табл. 10.3 известны сопротивления X_1 и X_2 реактивных двухполюсников при двух частотах f_1 и f_2.

Для каждого варианта найти резонансную частоту и значения индуктивности и емкости. Указать, какие из двухполюсников эквивалентны, а какие обратны.

10.2. Для схем цепей реактивных двухполюсников (рис. 10.1, *а — г*) определить резонансные частоты и начертить (качественно) графики изменения реактивных сопротивлений в функции угловой частоты ω.

Таблица 10.3

Схема	Номер варианта	Значение частоты и соответствующего реактивного сопротивления			
		f_1, кГц	X_1, Ом	f_2, кГц	X_2, Ом
	1	5,3	+90	10,6	+225
	2	2,65	−90	10,6	+90
	3	5,3	0	21,2	+225
	4	2,65	+40	7,92	−72
	5	2,65	∞	10,6	−16
	6	10,6	−40	21,2	−16

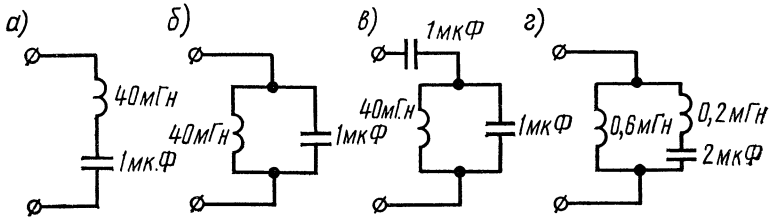


Рис. 10.1

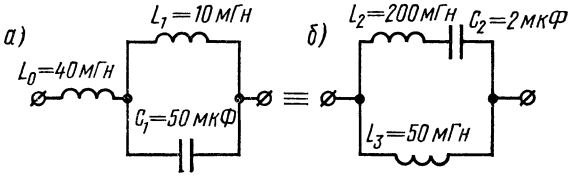


Рис. 10.2

10.3. Составить схему и определить элементы двухполюсника, эквивалентного заданному на рис. 10.2, *а*.

Р е ш е н и е. Заданную схему можно представить в виде схемы *а* табл. 10.1, в которой

$$\underline{Z}_1 = j\omega L_1, \quad \underline{Z}_2 = \frac{1}{j\omega C}, \quad a\underline{Z}_1 = j\omega L_0.$$

Тогда коэффициент a, необходимый для определения элементов эквивалентной схемы (схема *б* в табл. 10.1), будет равен

$$a = \frac{a\underline{Z}_1}{\underline{Z}_1} = \frac{j\omega L_0}{j\omega L_1} = \frac{40}{10} = 4.$$

На основе условий эквивалентности (10.2) находим коэффициенты b, c и d:

$$b = a(1 + a) = 4 \cdot 5 = 20; \quad c = (1 + a)^2 = 5^2 = 25; \quad d = 1 + a = 5.$$

Сопротивления элементов цепи искомой схемы будут равны:

$$b\underline{Z}_1 = bj\omega L_1 = j\omega 10 \cdot 10^{-3} \cdot 20 = j\omega 200 \cdot 10^{-3} \text{ Ом, т. е. } L_2 = 200 \text{ мГн;}$$

$$c\underline{Z}_2 = c\frac{1}{j\omega C_1} = \frac{1}{j\omega} \cdot \frac{25}{50 \cdot 10^{-6}} = \frac{1}{j\omega \cdot 2 \cdot 10^{-6}} \text{ Ом, т. е. } C_2 = 2 \text{ мкФ;}$$

$$d\underline{Z}_1 = dj\omega L_1 = j\omega 10 \cdot 10^{-3} \cdot 5 = j\omega 50 \cdot 10^{-3} \text{ Ом, т. е. } L_3 = 50 \text{ мГн.}$$

На рис. 10.2, *б* дана эквивалентная схема цепи, на которой указаны значения ее элементов.

10.4. Найти схемы цепей и параметры элементов двухполюсников, обеспечивающих их эквивалентность двухполюсникам рис. 10.3, *а — г*.

Указание. Использовать табл. 10.1.

10.5. Найти схемы цепей и параметры элементов двухполюсников, эквивалентных двухполюсникам, изображенным на рис. 10.4, *а — г*.

Указание. Использовать табл. 10.1.

10.6. Вычислить входное сопротивление $\underline{Z}$ двухполюсников рис. 10.5, *а*, *б*, если $R_1 = R_2 = R = \sqrt{L/C} = 500$ Ом.

10.7. Найти коэффициенты a_k и b_k сопротивления двухполюсника рис. 10.6 и написать уравнение в форме (10.1).

10.8. Составить схему двухполюсника, обратную схеме цепи рис. 10.7, *а*, если $R^2 = 100$, и определить значения ее элементов,

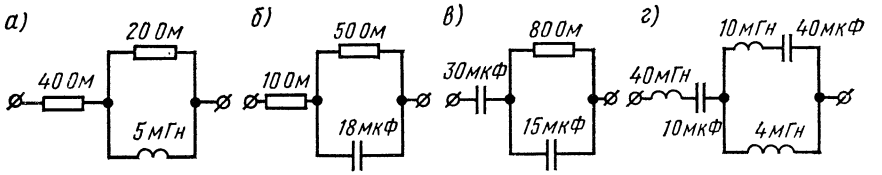


Рис. 10.3

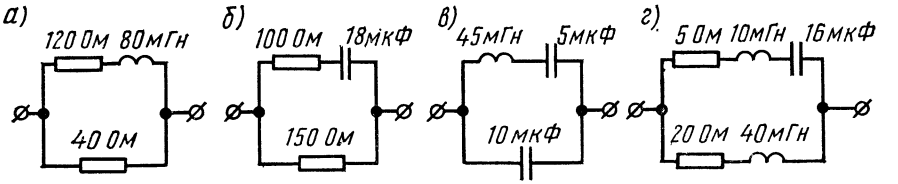


Рис. 10.4

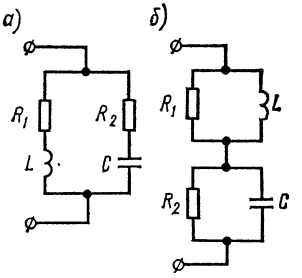


Рис. 10.5

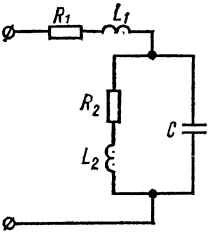


Рис. 10.6

если $L_1 = 2$ мГн, $L_2 = 5$ мГн, $C_3 = 100$ мкФ, $L_4 = 5$ мГн, $R_5 = 10$ Ом, $C_6 = 25$ мкФ, $R_7 = 20$ Ом.

Р е ш е н и е. Найдем по (10.4) сопротивление $\underline{Z}'_1$, обратное сопротивлению $\underline{Z}_1 = j\omega L_1$:

$$\underline{Z}'_1 = \frac{R^2}{\underline{Z}_1} = \frac{R^2}{j\omega L_1} = \frac{1}{j\omega\left(\frac{L_1}{R^2}\right)} = \frac{1}{j\omega C'_1},$$

где

$$C'_1 = L_1/R^2 = 2 \cdot 10^{-3}/100 = 20 \cdot 10^{-6}\ \Phi = 20\ \text{мкФ} — \text{емкость},$$

определяющая элемент, обратный элементу L_1.

Аналогично рассчитываем элементы, обратные индуктивной катушке L_2, конденсатору C_3, индуктивной катушке L_4, резистору R_5, конденсатору C_6 и резистору R_7. Это будут соответственно:

конденсатор емкостью $C'_2 = L_2/R^2 = 5 \cdot 10^{-3}/100 = 5 \cdot 10^{-5}\ \Phi = 50$ мкФ;

катушка индуктивностью $L'_3 = C_3R^2 = 100 \cdot 10^{-6} \cdot 100 = 10^{-2}$ Гн $= 10$ мГн;

конденсатор емкостью $C'_4 = L_4/R^2 = 5 \cdot 10^{-3}/100 = 5 \cdot 10^{-5}\ \Phi = 50$ мкФ;

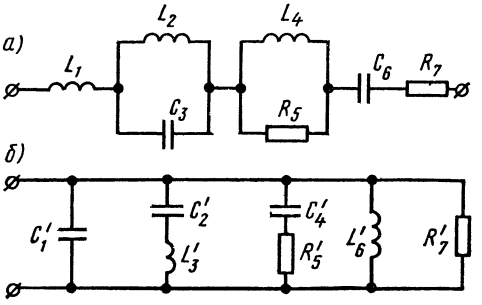


Рис. 10.7

резистор сопротивлением $R_5' = R^2/R_5 = 100/10 = 10$ Ом; катушка индуктивностью $L_6' = C_6R^2 = 25 \cdot 10^{-6} \cdot 100 = 25 \times 10^{-4}$ Гн = = 2,5 мГн;

резистор сопротивлением $R_7' = R^2/R_7 = 100/20 = 5$ Ом.

Последовательно включенным элементам исходной схемы соответствуют параллельно включенные обратные элементы обратной схемы.

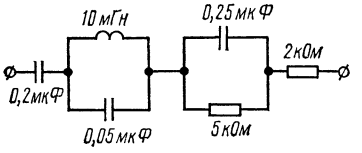


Рис. 10.8

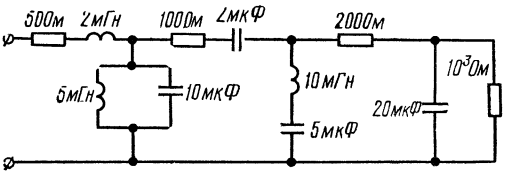


Рис. 10.9

Поэтому искомая обратная схема имеет структуру, показанную на рис. 10.7, *б*.

10.9. Найти схему и элементы двухполюсника, обратного схеме цепи рис. 10.8, если $R^2 = 10^6$.

10.10. Найти элементы двухполюсника, обратного схеме цепи рис. 10.9 при $R^2 = 10^4$, и составить его схему.

Указание. Искомая схема, как и заданная, имеет цепочечный вид, при этом каждый последовательный элемент заданной схемы в обратной схеме станет параллельным, но обратным по характеру, и наоборот.

Б. Реактивные двухполюсники

10.11. Определить класс двухполюсника, его резонансные частоты и составить уравнение сопротивления двухполюсника цепи рис. 10.10, *а*, если $L_0 = 40$ мГн, $L_1 = 10$ мГн, $L_2 = 200$ мГн, $L_3 = 20$ мГн, $C = 50$ мкФ.

Пояснить, почему заданная схема не является канонической.

Р е ш е н и е. Класс двухполюсника определяется в зависимости от характера сопротивления при $\omega \to 0$ и $\omega \to \infty$.

Из заданной схемы видно, что постоянный ток может проходить через двухполюсник, поэтому при $\omega \to 0$ его сопротивление стремится к нулю, т. е. оно имеет индуктивный характер. При $\omega \to \infty$, как

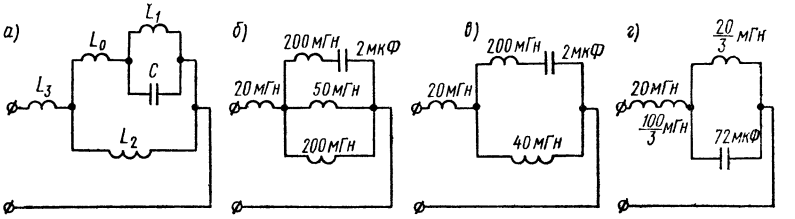


Рис. 10.10

видно из схемы, сопротивление двухполюсника также имеет индуктивный характер. Сопоставляя эти результаты с табл. 10.2, видим, что двухполюсник относится к классу IV.

В соответствии с табл. 10.1 двухполюсник, составленный из L_0, L_1 и C, заменим эквивалентным (см. решение задачи 10.3), и в результате получим схему рис. 10.10, *б*. Объединяя параллельно соединенные индуктивности 50 и 200 мГн в эквивалентную индуктивность $50 \cdot 200/250 = 40$ мГн, получим схему рис. 10.10, *в*. Ее параллельные ветви представляют схему *в* в табл. 10.1, в которой $a = 40/200 = 0{,}2$. Преобразуем ее в схему *г* табл. 10.1, для этого по формулам (10.3) вычислим коэффициенты:

$$b = \frac{a^2}{1+a} = \frac{0{,}2^2}{1+0{,}2} = \frac{1}{30}; \quad c = \left(\frac{a}{1+a}\right)^2 = \frac{1}{36};$$

$$d = \frac{a}{1+a} = \frac{1}{6}.$$

На рис. 10.10, *г* дана соответствующая эквивалентная схема. Для удобства в дальнейших расчетах введем для элементов этой схемы буквенные обозначения:

$$L' = \frac{20}{3} = 6{,}67 \text{ мГн}; \quad C' = 72 \text{ мкФ}; \quad L'' = 20 + \frac{100}{3} = 53{,}3 \text{ мГн}.$$

Вычислим резонансные частоты. Схема рис. 10.10, *г* является канонической, содержит три элемента, поэтому число резонансных частот равно двум. Так как в схеме имеется путь для постоянного тока, то первым будет резонанс токов. Его резонансная частота

$$\omega_2 = \frac{1}{\sqrt{L'C'}} = \frac{1}{\sqrt{6{,}67 \cdot 10^{-3} \cdot 72 \cdot 10^{-6}}} = 1440 \text{ с}^{-1}.$$

Частоту резонанса напряжений найдем из условия равенства нулю входного сопротивления схемы рис. 10.10, *г*.

$$j\omega L'' + \frac{j\omega L' \dfrac{1}{j\omega C'}}{j\left(\omega L' - \dfrac{1}{\omega C'}\right)} = 0.$$

Отсюда находим

$$\omega_3 = 1 \Big/ \sqrt{\frac{L'L''}{L'+L''}\,C} = 1535 \text{ с}^{-1}.$$

Определим параметр H, необходимый для составления уравнения сопротивления двухполюсника. Для этого выясним характер сопротивления двухполюсника при частотах, превышающих наибольшую резонансную. Очевидно, что при $\omega > \omega_3$ сопротивление схемы имеет индуктивный характер. Поэтому, закорачивая в схеме рис. 10.10, *г* конденсатор емкостью C' (см. п. 4 основных положений), получим

$$H = L_{эк} = L'' = 53{,}3 \cdot 10^{-3} \text{ Гн}.$$

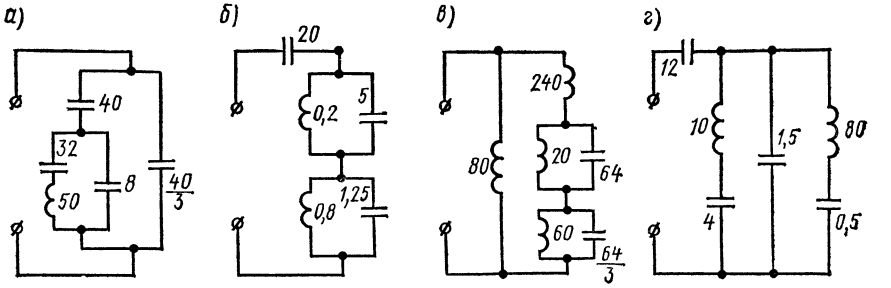


Рис. 10.11

Тот же результат может быть получен из заданной схемы рис. 10.10, *а*, в которой конденсатор емкостью C закорочен (см. п. 4 основных положений). Действительно;

$$H = L_{эк} = L_3 + \frac{L_1 L_2}{L_0 + L_2} = 20 + \frac{40 \cdot 200}{240} \cdot 10^{-3} = 53{,}3 \cdot 10^{-3} \text{ Гн}.$$

Напишем уравнение сопротивления двухполюсника класса IV:

$$\underline{Z} = j\omega H \frac{\omega_3^2 - \omega^2}{\omega_2^2 - \omega^2} = j\omega 53{,}3 \cdot 10^{-3} \frac{1535^2 - \omega^2}{1440^2 - \omega^2}.$$

Заданная схема не является канонической, потому что для постоянного тока имеется несколько путей (первый — через $L_3 L_0 L_1$, второй — через $L_3 L_2$).

10.12. Для каждой из схем цепей рис. 10.11 найти класс двухполюсника, каноническую схему и ее параметры, резонансные частоты и составить уравнение сопротивления двухполюсника. На рис. 10.11, *а* — *г* индуктивности даны в мГн, емкости — в мкФ.

Указание. При расчете обратить внимание на то, что в схемах рис. 10.11, *б* и *в* параллельные контуры, а в схеме рис. 10.11, *г* последовательные контуры подобны между собой, т. е. отношение сопротивлений соответствующих элементов на любой частоте есть величина постоянная, или, что то же самое, отношение индуктивностей обратно отношению емкостей контуров. Поэтому каждая пара указанных контуров может быть заменена одним эквивалентным контуром. Для расчета его параметров следует составить выражение эквивалентного сопротивления соответствующих двух контуров.

10.13. Для двухполюсника цепи рис. 10.12, *а* найти каноническую схему, ее параметры и составить уравнение его сопротивления. Даны: $C_1 = C_2 = 0{,}2$ мкФ, $C_3 = 0{,}4$ мкФ, $C_4 = 1$ мкФ, $L = 40$ мГн.

Р е ш е н и е. Задача может быть решена просто, если треугольник емкостей $C_1 C_2 C_3$ преобразовать в эквивалентную звезду, затем использовать эквивалентные преобразования.

На рис. 10.12, *б* изображена схема, в которой осуществлена замена треугольника емкостей $C_1 C_2 C_3$ эквивалентной звездой, емкости которой C_5, C_6 и C_7 вычисляются по известным формулам:

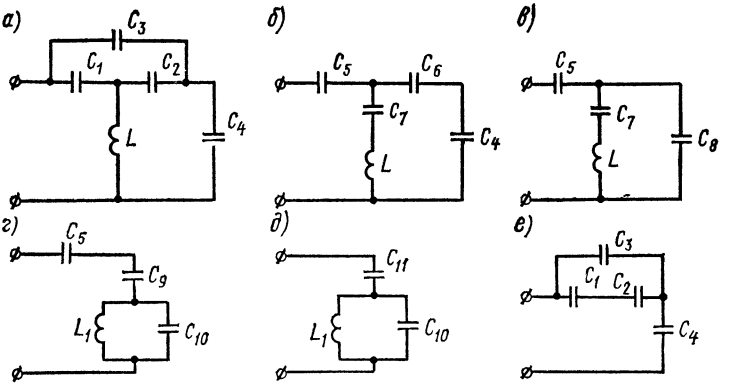


Рис. 10.12

$$\underline{Z}_5 = \frac{\underline{Z}_1\underline{Z}_3}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \underline{Z}_3} \quad \text{или} \quad \frac{1}{j\omega C_5} = \frac{\dfrac{1}{j\omega C_1}\cdot\dfrac{1}{j\omega C_3}}{\dfrac{1}{j\omega C_1} + \dfrac{1}{j\omega C_2} + \dfrac{1}{j\omega C_3}};$$

отсюда

$$C_5 = C_1 + C_3 + \frac{C_1C_3}{C_2} = 0{,}2 + 0{,}4 + \frac{0{,}2\cdot 0{,}4}{0{,}2} = 1 \text{ мкФ}.$$

Аналогично найдем емкости конденсаторов C_6 и C_7:

$$C_6 = C_2 + C_3 + C_2C_3/C_1 = 1 \text{ мкФ}, \quad C_7 = C_1 + C_2 + C_1C_2/C_3 = 0{,}5 \text{ мкФ}.$$

Заменив последовательно соединенные емкости C_6 и C_4 эквивалентной емкостью

$$C_8 = \frac{C_4C_6}{C_4 + C_6} = \frac{1\cdot 1}{2} = 0{,}5 \text{ мкФ},$$

получим схему рис. 10.12, *в*.

Далее используем эквивалентные преобразования, для чего осуществим замену схемы из элементов C_7, L, C_8 схемой из C_9, L_1, C_{10} (рис. 10.12, *г*). Для расчетов воспользуемся формулами (10.3) и схемами *в* и *г* табл. 10.1, в которых

$$\underline{Z}_1 = 1/j\omega C_7, \quad \underline{Z}_2 = j\omega L, \quad a\underline{Z}_1 = 1/j\omega C_8.$$

Тогда необходимый для расчетов коэффициент

$$a = \frac{a\underline{Z}_1}{\underline{Z}_1} = \frac{\dfrac{1}{j\omega C_8}}{\dfrac{1}{j\omega C_7}} = \frac{C_7}{C_8} = \frac{0{,}5}{0{,}5} = 1.$$

По формулам (10.3) находим коэффициенты

$$b = \frac{a^2}{1+a} = 0{,}5; \quad c = \left(\frac{a}{1+a}\right)^2 = 0{,}25; \quad d = \frac{a}{1+a} = 0{,}5.$$

Теперь находим неизвестные L_1, C_9 и C_{10} [см. формулу (10.3)]: $d\underline{Z}_1 = 0{,}5\,\frac{1}{j\omega C_7} = \frac{1}{j\omega C_9}$, отсюда $C_9 = 2C_7 = 2 \cdot 0{,}5 = 1$ мкФ; $b\underline{Z}_1 = 0{,}5\,\frac{1}{j\omega C_7} = \frac{1}{j\omega C_{10}}$, откуда $C_{10} = 2C_7 = 1$ мкФ; $c\underline{Z}_2 = 0{,}25 j\omega L = j\omega L_1$, т. е. $L_1 = 0{,}25 \cdot L = 0{,}25 \cdot 40 = 10$ мГн.

Наконец, заменив в схеме рис. 10.12, *г* емкости C_5 и C_9 эквивалентной емкостью $C_{11} = C_5C_9/(C_5 + C_9)$, получим каноническую схему рис. 10.12, *д*.

Каноническая схема содержит три элемента, следовательно, число резонансных частот равно двум. Так как схема цепи не имеет пути для постоянного тока, то первым будет резонанс напряжений с частотой ω_1, которую найдем, приравнивая ее входное сопротивление нулю:

$$\underline{Z} = \frac{1}{j\omega C_{11}} + \frac{j\omega L_1 \dfrac{1}{j\omega C_{10}}}{j\omega L_1 + \dfrac{1}{j\omega C_{10}}} = 0.$$

Решая это уравнение, найдем

$$\omega_1 = \frac{1}{\sqrt{L_1(C_{10} + C_{11})}} = \frac{1}{\sqrt{10 \cdot 10^{-3}(1 + 0{,}5) \cdot 10^{-6}}} = 8170 \text{ с}^{-1}.$$

Далее вычисляем частоту резонанса токов

$$\omega_2 = \frac{1}{\sqrt{L_1 C_{10}}} = \frac{1}{\sqrt{10 \cdot 10^{-3} \cdot 1 \cdot 10^{-6}}} = 10^4 \text{ с}^{-1}.$$

Найдем коэффициент H. Для этого выясним характер сопротивления цепи схемы рис. 10.12, *д* при $\omega \to \infty$. Очевидно, сопротивление схемы имеет емкостный характер, поэтому $H = 1/C_{эк}$, где $C_{эк}$ находим из схемы рис. 10.12, *г*, в которой отключена катушка индуктивностью L_1:

$$C_{эк} = \frac{C_{10}C_{11}}{C_{10} + C_{11}} = \frac{1 \cdot 0{,}5}{1{,}5} = \frac{1}{3} \text{ мкФ} = \frac{1}{3} \cdot 10^{-6} \text{ Ф}.$$

$$H = \frac{1}{C_{эк}} = 3 \cdot 10^6 \text{ Ф}^{-1}.$$

Для проверки найдем H из заданной схемы, в которой индуктивность отключена (рис. 10.12, *е*). Эквивалентная емкость

$$C_{эк} = \frac{\left(\dfrac{C_1C_2}{C_1 + C_2} + C_3\right) C_4}{\dfrac{C_1C_2}{C_1 + C_2} + C_3 + C_4} = \frac{\left(\dfrac{0{,}2 \cdot 0{,}2}{0{,}4} + 0{,}4\right) \cdot 1}{\dfrac{0{,}2 \cdot 0{,}2}{0{,}4} + 0{,}4 + 1} = \frac{1}{3} \text{ мкФ}.$$

Тогда $H = 1/C_{эк} = 3 \cdot 10^6$.

Как видно, получен тот же результат.

Составим выражение сопротивления схемы цепи $\underline{Z}$, при этом учтем, что первым был резонанс напряжений, поэтому множитель $j\omega$ должен быть записан в знаменателе этого выражения:

$$\underline{Z} = \frac{H}{j\omega} \cdot \frac{\omega_1^2 - \omega^2}{\omega_2^2 - \omega^2} = \frac{3 \cdot 10^6}{j\omega} \cdot \frac{8170^2 - \omega^2}{10\,000^2 - \omega^2}.$$

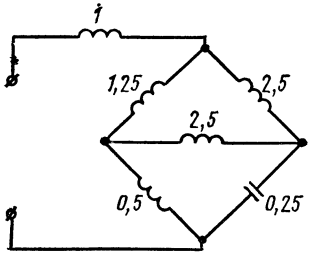


Рис. 10.13

10.14. Для двухполюсника рис. 10.13 найти каноническую схему, ее параметры и составить уравнение его сопротивления. На рис. 10.13 значения индуктивностей даны в мГн, емкости — в мкФ.

10.15. Найти класс двухполюсника рис. 10.14, *а* — *г*, его каноническую схему, ее параметры и составить уравнение его сопротивления. Даны: $C_1 = C_2 = C_3 = 0{,}2$ мкФ, $C_4 = 0{,}6$ мкФ, $L = 15$ мГн.

Р е ш е н и е. Определим класс двухполюсника. Для этого выясним характер сопротивления и его величину при $\omega \to 0$ и $\omega \to \infty$. Из заданной схемы цепи видно, что постоянный ток через двухполюсник проходить не может, следовательно, при $\omega \to 0$ его сопротивление стремится к бесконечности, т. е. оно имеет емкостный характер; при $\omega \to \infty$ сопротивление двухполюсника стремится к нулю, т. е. оно также имеет емкостный характер. Сопоставляя эти результаты с табл. 10.2, устанавливаем, что двухполюсник относится к классу III.

Заданная схема не является канонической, так как для тока бесконечно большой частоты имеется два (а не один) пути (один — через C_1C_3, другой — C_2C_4).

Для определения канонической схемы двухполюсника выберем независимые контуры согласно рис. 10.14, *а*, составим уравнения по

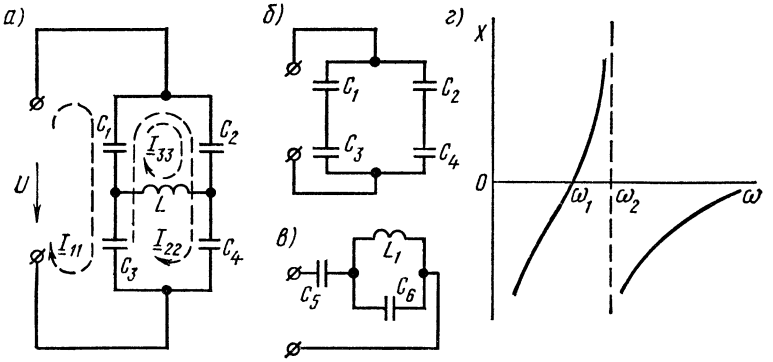


Рис. 10.14

методу контурных токов и решим их совместно, установив связь между $\underline{U}$ и $\underline{I}_1$:

$$\underline{I}_{11}\left(\frac{1}{j\omega C_1}+\frac{1}{j\omega C_3}\right)-\underline{I}_{22}\left(\frac{1}{j\omega C_1}+\frac{1}{j\omega C_3}\right)-\underline{I}_{33}\frac{1}{j\omega C_1}=\underline{U};$$

$$-\underline{I}_{11}\left(\frac{1}{j\omega C_1}+\frac{1}{j\omega C_3}\right)+\underline{I}_{22}\left(\frac{1}{j\omega C_1}+\frac{1}{j\omega C_2}+\frac{1}{j\omega C_3}+\frac{1}{j\omega C_4}\right)+$$

$$+\underline{I}_{33}\left(\frac{1}{j\omega C_1}+\frac{1}{j\omega C_2}\right)=0;$$

$$-\underline{I}_{11}\frac{1}{j\omega C_1}+\underline{I}_{22}\left(\frac{1}{j\omega C_1}+\frac{1}{j\omega C_2}\right)+\underline{I}_{33}\left(\frac{1}{j\omega C_1}+\frac{1}{j\omega C_2}+j\omega L\right)=0.$$

Подставляя числовые значения и умножая все члены уравнений на $j\omega\cdot 10^{-6}$, получим:

$$10\underline{I}_{11}-10\underline{I}_{22}-5\underline{I}_{33}=j\omega 10^{-6}\underline{U};\quad -3\underline{I}_{11}+5\underline{I}_{22}+3\underline{I}_{33}=0;$$

$$-10\underline{I}_{11}+10\underline{I}_{22}+(10-15\omega^2 10^{-9})\underline{I}_{33}=0.$$

Решая эту систему уравнений, находим $\underline{I}_{11}$. Беря отношение $\underline{U}$ к $\underline{I}_{11}$, определим входное сопротивление

$$\underline{Z}=\frac{1}{j\omega\,0{,}25\cdot 10^{-6}}\cdot\frac{\frac{1}{4}\cdot 10^9-\omega^2}{\frac{2}{75}\cdot 10^{10}-\omega^2}.$$

В этой формуле

$$H=\frac{1}{C_{эк}}=\frac{1}{0{,}25\cdot 10^{-6}}=4\cdot 10^6\ \Phi^{-1}.$$

Проверим правильность найденной величины $C_{эк}$. Для этого в заданной схеме следует разомкнуть катушку индуктивностью L (так как схема при $\omega\to\infty$ имеет емкостный характер, см. основные положения с. 286) и найти $C_{эк}$ (рис. 10.14, *б*):

$$C_{эк}=\frac{C_1C_3}{C_1+C_3}+\frac{C_2C_4}{C_2+C_4}=\frac{0{,}2\cdot 0{,}2}{0{,}4}+\frac{0{,}2\cdot 0{,}6}{0{,}8}=0{,}25\ \text{мкФ}.$$

Это совпадает с ранее найденной величиной $C_{эк}$.

Из полученного для $\underline{Z}$ выражения видно, что оно имеет две резонансные частоты: первая — частота резонанса напряжений $\omega_1=\sqrt{\frac{1}{4}\cdot 10^{-9}}=15\,800\ \text{с}^{-1}$, вторая — частота резонанса токов $\omega_2=\sqrt{\frac{2}{75}\cdot 10^{10}}=16\,300\ \text{с}^{-1}$, и схема относится к трехэлементному двухполюснику класса III. График реактивного сопротивления в функции частоты и каноническая схема двухполюсника показаны на рис. 10.14, *в* и *г*.

Для определения параметров канонической схемы рис. 10.14, *в* выразим значение ее постоянной H и резонансные частоты через L_1, C_5 и C_6. Постоянную H найдем, если в схеме цепи рис. 10.14, *в* разомкнуть ветвь с индуктивной катушкой:

$$H = \frac{1}{C_{эк}} = \frac{C_5 + C_6}{C_5 C_6} = \frac{1}{0{,}25 \cdot 10^{-6}} = 4 \cdot 10^6 \text{ Ф}^{-1}. \quad (1)$$

Находим резонансные частоты:

$$\omega_1 = \frac{1}{\sqrt{L_1 (C_5 + C_6)}} = 15\,800 \text{ с}^{-1}; \quad (2)$$

$$\omega_2 = \frac{1}{\sqrt{L_1 C_6}} = 16\,300 \text{ с}^{-1}. \quad (3)$$

Решая уравнения (1) — (3), найдем

$$C_5 = \frac{1}{H}\left(\frac{\omega_2}{\omega_1}\right)^2 = \frac{4}{15} \cdot 10^{-6} \text{ Ф} \approx 0{,}267 \text{ мкФ};$$

$$C_6 = \frac{1}{H\left[1 - \left(\frac{\omega_1}{\omega_2}\right)^2\right]} = 4 \cdot 10^{-6} \text{ Ф} = 4 \text{ мкФ};$$

$$L_1 = \frac{1}{\omega_2^2 C_6} = \frac{15}{16} \cdot 10^{-3} \text{ Гн} \approx 0{,}94 \text{ мГн}.$$

10.16. При какой емкости C в цепи схемы рис. 10.15 имеет место резонанс токов на частоте 5 МГц. Даны: $L_1 = 0{,}4$ мГн и $L_2 = 0{,}5$ мГн,

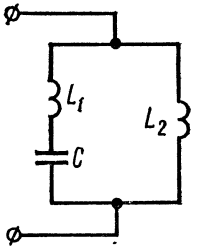


Рис. 10.15

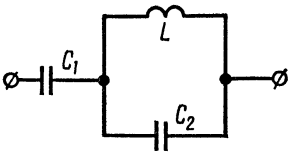


Рис. 10.16

определить класс двухполюсника и составить уравнение его сопротивления.

10.17. Определить элементы двухполюсника (рис. 10.16), если известны его резонансные частоты $\omega_1 = 4080$ с$^{-1}$, $\omega_2 = 7070$ с$^{-1}$, а при заданной частоте $\omega_{зад} = 3200$ с$^{-1}$ — модуль его сопротивления 510 Ом.

В. Частотные характеристики двухполюсников

10.18. Получить выражения и построить кривые зависимостей эквивалентных активного $R(\omega)$ и реактивного $X(\omega)$ сопротивлений от частоты, а также амплитудно-частотной $Z(\omega)$ и фазочастотной $\varphi(\omega)$ характеристик цепей рис. 10.17, *а* и *б*. Принять $R_1 = R_2 = R$. Построить годограф входного сопротивления при изменении частоты.

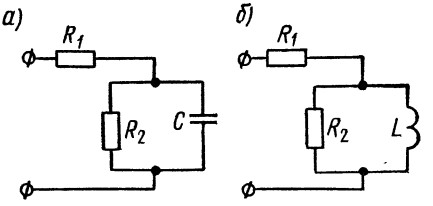


Рис. 10.17

Р е ш е н и е. Рассмотрим схему рис. 10.17, *а*. Ее комплексное входное сопротивление

$$\underline{Z} = R_1 + \frac{R_2 \dfrac{1}{j\omega C}}{R_2 + \dfrac{1}{j\omega C}} = R + \frac{R}{1 + (\omega CR)^2} - j\,\frac{\omega CR^2}{1 + (\omega CR)^2} =$$

$$= R(\omega) + jX(\omega).$$

Здесь

$$R(\omega) = R + \frac{R}{1 + (\omega CR)^2}, \tag{1}$$

$$X(\omega) = -\frac{\omega CR^2}{1 + (\omega CR)^2}. \tag{2}$$

Модуль полного сопротивления

$$Z(\omega) = \sqrt{R^2(\omega) + X^2(\omega)} \tag{3}$$

и его фаза

$$\varphi(\omega) = \operatorname{arctg} X(\omega)/R(\omega). \tag{4}$$

По формулам (1) — (4) на рис. 10.18, *а* построены соответствующие кривые. Результаты вычислений сведены в табл. 10.4.

Таблица 10.4

ω	ωCR	$(\omega CR)^2$	$1+(\omega CR)^2$	$R(\omega)$	$X(\omega)$	$Z(\omega)$	$\operatorname{tg}\varphi(\omega)$	$\varphi(\omega)$
0	0	0	1	$2R$	0	2	0	0
$1/RC$	1	1	2	$1{,}5R$	$-0{,}5R$	$1{,}58R$	$-0{,}333$	$-18°25'$
$2/RC$	2	4	5	$1{,}2R$	$-0{,}4R$	$1{,}27R$	$-0{,}333$	$-18°25'$
$3/RC$	3	9	10	$1{,}1R$	$-0{,}3R$	$1{,}14R$	$-0{,}273$	$-15°20'$
∞	∞	∞	∞	R	0	R	0	0

Найдем уравнение годографа. Из совместного решения уравнений (1) и (2) вычисляем

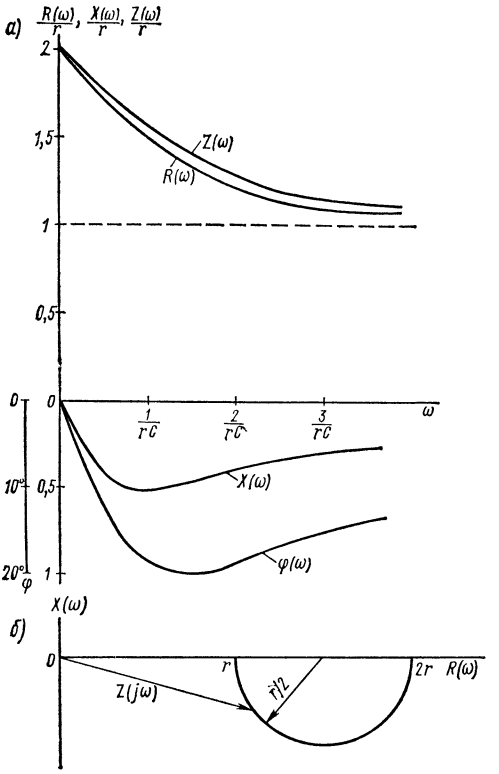


Рис. 10.18

$$\omega CR = \frac{X(\omega)}{R(\omega) - R}.$$

Подставляя это выражение в (1), после преобразований получим

$$\left[R(\omega) - \frac{3}{2}R\right]^2 + X^2(\omega) = \left(\frac{R}{2}\right)^2.$$

Это уравнение окружности, центр которой расположен на оси $R(\omega)$ в точке с абсциссой, равной $3R/2$, и радиусом $R/2$. Годограф входного сопротивления изображен на рис. 10.18, *б*.

10.19. Получить выражения и построить кривые $R(\omega)$, $X(\omega)$, $Z(\omega)$, $\varphi(\omega)$ для цепей, состоящих из параллельного соединения: 1) R и L; 2) R и C. Построить годограф входного сопротивления.

ГЛАВА ОДИННАДЦАТАЯ

ЧЕТЫРЕХПОЛЮСНИКИ

ОСНОВНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ И СООТНОШЕНИЯ

В этой главе рассматриваются линейные, пассивные и активные неавтономные четырехполюсники.

Активным неавтономным четырехполюсником называется четырехполюсник, внутри которого содержатся зависимые источники энергии, например схемы замещения электронных ламп и полупроводниковых триодов (транзисторов). У таких четырехполюсников после их отключения от остальной части цепи на входных и выходных зажимах нет напряжения.

1. Основные уравнения четырехполюсника. Связь между входными и выходными напряжениями и токами $\underline{U}_1$ и $\underline{I}_1$, $\underline{U}_2$ и $\underline{I}_2$ линейного активного (неавтономного) и пассивного четырехполюсников (при положительных направлениях напряжений и токов, указанных на рис. 11.1*) может быть выражена одной из следующих шести форм основных уравнений.

Форма Y:

$$\left.\begin{aligned} \underline{I}_1 &= \underline{Y}_{11}\underline{U}_1 + \underline{Y}_{12}\underline{U}_2; \\ \underline{I}_2 &= \underline{Y}_{21}\underline{U}_1 + \underline{Y}_{22}\underline{U}_2. \end{aligned}\right\} \qquad (11.1а)$$

Форма Z:

$$\underline{U}_1 = \underline{Z}_{11}\underline{I}_1 + \underline{Z}_{12}\underline{I}_2; \quad \underline{U}_2 = \underline{Z}_{21}\underline{I}_1 + \underline{Z}_{22}\underline{I}_2. \qquad (11.1б)$$

Форма H:

$$\underline{U}_1 = \underline{H}_{11}\underline{I}_1 + \underline{H}_{12}\underline{U}_2; \quad \underline{I}_2 = \underline{H}_{21}\underline{I}_1 + \underline{H}_{22}\underline{U}_2. \qquad (11.1в)$$

Форма F:

$$\underline{I}_1 = \underline{F}_{11}\underline{U}_1 + \underline{F}_{12}\underline{I}_2; \quad \underline{U}_2 = \underline{F}_{21}\underline{U}_1 + \underline{F}_{22}\underline{I}_2. \qquad (11.1г)$$

Форма A:

$$\underline{U}_1 = \underline{A}_{11}\underline{U}_2 - \underline{A}_{12}\underline{I}_2; \quad \underline{I}_1 = \underline{A}_{21}\underline{U}_2 - \underline{A}_{22}\underline{I}_2. \qquad (11.1д)$$

---

* В литературе используются различные варианты выбора положительных направлений первичного и вторичного токов четырехполюсника. В книге принято так называемое встречное направление первичного и вторичного токов. Используются также и другие варианты: вариант прямой передачи, при котором положительные направления первичного и вторичного токов выбираются направленными слева направо; вариант обратной передачи, при котором первичный и вторичный токи выбираются направленными справа налево.

Форма B:

$$\underline{U}_2 = \underline{B}_{11}\underline{U}_1 - \underline{B}_{12}\underline{I}_1; \quad \underline{I}_2 = \underline{B}_{21}\underline{U}_1 - \underline{B}_{22}\underline{I}_1. \tag{11.1е}$$

Вместо коэффициентов $\underline{A}_{11}$, $\underline{A}_{12}$, $\underline{A}_{21}$, $\underline{A}_{22}$ часто используется их запись в виде $\underline{A}$, $\underline{B}$, $\underline{C}$ и $\underline{D}$.

При выбранных положительных направлениях напряжений и токов, согласно рис. 11.1, при нагрузке четырехполюсника со стороны вторичных зажимов на сопротивление $\underline{Z}_н$ последнее связано с выходным напряжением и током соотношением

$$\underline{U}_2 = -\underline{I}_2 \underline{Z}_н. \tag{11.2}$$

Коэффициенты при напряжениях и токах в основных уравнениях четырехполюсника (11.1а — е) называются параметрами четырехполюсника. Они определяются только схемой самого четырехполюсника. В общем случае все параметры четырехполюсника комплексны.

Связь параметров различных форм уравнений (при выборе положительных направлений напряжений и токов согласно рис. 11.1 записи основных уравнений четырехполюсника в виде уравнений 11.1 а — е) приведена в табл. 11.1.

В таблице $|\underline{Y}| = \underline{Y}_{11}\underline{Y}_{22} - \underline{Y}_{12}\underline{Y}_{21}$; $|\underline{Z}| = \underline{Z}_{11}\underline{Z}_{22} - \underline{Z}_{12}\underline{Z}_{21}$; $|\underline{H}| = \underline{H}_{11}\underline{H}_{22} - \underline{H}_{12}\underline{H}_{21}$; $|\underline{F}| = \underline{F}_{11}\underline{F}_{22} - \underline{F}_{12}\underline{F}_{21}$; $|\underline{A}| = \underline{A}_{11}\underline{A}_{22} - \underline{A}_{12}\underline{A}_{21}$; $|\underline{B}| = \underline{B}_{11}\underline{B}_{22} - \underline{B}_{12}\underline{B}_{21}$ — определители, составленные из параметров соответствующих уравнений четырехполюсников.

Определители, составленные из $\underline{Y}$- и $\underline{Z}$-параметров, а также из $\underline{H}$- и $\underline{F}$-параметров и $\underline{A}$- и $\underline{B}$-параметров, взаимно обратны, т. е.

$$|\underline{Y}| = 1/|\underline{Z}|, \quad |\underline{H}| = 1/|\underline{F}|, \quad |\underline{A}| = 1/|\underline{B}|. \tag{11.3}$$

Для обратимого четырехполюсника существует следующая связь между параметрами каждой формы:

$$\left.\begin{aligned} &\underline{Y}_{12} = \underline{Y}_{21}; \quad \underline{Z}_{12} = \underline{Z}_{21}; \quad \underline{H}_{12} = -\underline{H}_{21}; \quad \underline{F}_{12} = -\underline{F}_{21}; \\ &\underline{A}_{11}\underline{A}_{22} - \underline{A}_{12}\underline{A}_{21} = 1; \quad \underline{B}_{11}\underline{B}_{22} - \underline{B}_{12}\underline{B}_{21} = 1. \end{aligned}\right\} \tag{11.4}$$

Таким образом, обратимый несимметричный четырехполюсник характеризуется тремя независимыми параметрами.

В симметричном обратимом четырехполюснике помимо зависимостей (11.4) имеется еще следующая связь между его параметрами:

$$\underline{Y}_{11} = \underline{Y}_{22}, \quad \underline{Z}_{11} = \underline{Z}_{22}, \quad \underline{H}_{11} = \underline{H}_{22}, \quad \underline{F}_{11} = \underline{F}_{22}, \quad \underline{A}_{11} = \underline{A}_{22}, \quad \underline{B}_{11} = \underline{B}_{22}. \tag{11.5}$$

Поэтому симметричный обратимый четырехполюсник характеризуется лишь двумя независимыми параметрами.

Напомним, что пассивные линейные четырехполюсники всегда обратимы.

Таблица 11.1

Определяемые параметры матрицы	В зависимости от параметров					
	$\underline{Y}$	$\underline{Z}$	$\underline{H}$	$\underline{F}$	$\underline{A}$	$\underline{B}$
$\underline{Y}$	$\underline{Y}_{11}\ \underline{Y}_{12}$ $\underline{Y}_{21}\ \underline{Y}_{22}$	$\frac{\underline{Z}_{22}}{\lvert\underline{Z}\rvert}\ \frac{-\underline{Z}_{12}}{\lvert\underline{Z}\rvert}$ $\frac{-\underline{Z}_{21}}{\lvert\underline{Z}\rvert}\ \frac{\underline{Z}_{11}}{\lvert\underline{Z}\rvert}$	$\frac{1}{\underline{H}_{11}}\ \frac{-\underline{H}_{12}}{\underline{H}_{11}}$ $\frac{\underline{H}_{21}}{\underline{H}_{11}}\ \frac{\lvert\underline{H}\rvert}{\underline{H}_{11}}$	$\frac{\lvert\underline{F}\rvert}{\underline{F}_{22}}\ \frac{\underline{F}_{12}}{\underline{F}_{22}}$ $\frac{-\underline{F}_{21}}{\underline{F}_{22}}\ \frac{1}{\underline{F}_{22}}$	$\frac{\underline{A}_{22}}{\underline{A}_{12}}\ \frac{-\lvert\underline{A}\rvert}{\underline{A}_{12}}$ $\frac{-1}{\underline{A}_{12}}\ \frac{\underline{A}_{11}}{\underline{A}_{12}}$	$\frac{\underline{B}_{11}}{\underline{B}_{12}}\ \frac{-1}{\underline{B}_{12}}$ $\frac{-\lvert\underline{B}\rvert}{\underline{B}_{12}}\ \frac{\underline{B}_{22}}{\underline{B}_{12}}$
$\underline{Z}$	$\frac{\underline{Y}_{22}}{\lvert\underline{Y}\rvert}\ \frac{-\underline{Y}_{12}}{\lvert\underline{Y}\rvert}$ $\frac{-\underline{Y}_{21}}{\lvert\underline{Y}\rvert}\ \frac{\underline{Y}_{11}}{\lvert\underline{Y}\rvert}$	$\underline{Z}_{11}\ \underline{Z}_{12}$ $\underline{Z}_{21}\ \underline{Z}_{22}$	$\frac{\lvert\underline{H}\rvert}{\underline{H}_{22}}\ \frac{\underline{H}_{12}}{\underline{H}_{22}}$ $\frac{-\underline{H}_{21}}{\underline{H}_{22}}\ \frac{1}{\underline{H}_{22}}$	$\frac{1}{\underline{F}_{11}}\ \frac{-\underline{F}_{12}}{\underline{F}_{11}}$ $\frac{\underline{F}_{21}}{\underline{F}_{11}}\ \frac{\lvert\underline{F}\rvert}{\underline{F}_{11}}$	$\frac{\underline{A}_{11}}{\underline{A}_{21}}\ \frac{\lvert\underline{A}\rvert}{\underline{A}_{21}}$ $\frac{1}{\underline{A}_{21}}\ \frac{\underline{A}_{22}}{\underline{A}_{21}}$	$\frac{\underline{B}_{22}}{\underline{B}_{21}}\ \frac{1}{\underline{B}_{21}}$ $\frac{\lvert\underline{B}\rvert}{\underline{B}_{21}}\ \frac{\underline{B}_{11}}{\underline{B}_{21}}$
$\underline{H}$	$\frac{1}{\underline{Y}_{11}}\ \frac{-\underline{Y}_{12}}{\underline{Y}_{11}}$ $\frac{\underline{Y}_{21}}{\underline{Y}_{11}}\ \frac{\lvert\underline{Y}\rvert}{\underline{Y}_{11}}$	$\frac{\lvert\underline{Z}\rvert}{\underline{Z}_{22}}\ \frac{\underline{Z}_{12}}{\underline{Z}_{22}}$ $\frac{-\underline{Z}_{21}}{\underline{Z}_{22}}\ \frac{1}{\underline{Z}_{22}}$	$\underline{H}_{11}\ \underline{H}_{12}$ $\underline{H}_{21}\ \underline{H}_{22}$	$\frac{\underline{F}_{22}}{\lvert\underline{F}\rvert}\ \frac{-\underline{F}_{12}}{\lvert\underline{F}\rvert}$ $\frac{-\underline{F}_{21}}{\lvert\underline{F}\rvert}\ \frac{\underline{F}_{11}}{\lvert\underline{F}\rvert}$	$\frac{\underline{A}_{12}}{\underline{A}_{22}}\ \frac{\lvert\underline{A}\rvert}{\underline{A}_{22}}$ $\frac{-1}{\underline{A}_{22}}\ \frac{\underline{A}_{21}}{\underline{A}_{22}}$	$\frac{\underline{B}_{12}}{\underline{B}_{11}}\ \frac{1}{\underline{B}_{11}}$ $\frac{-\lvert\underline{B}\rvert}{\underline{B}_{11}}\ \frac{\underline{B}_{21}}{\underline{B}_{11}}$
$\underline{F}$	$\frac{\lvert\underline{Y}\rvert}{\underline{Y}_{22}}\ \frac{\underline{Y}_{12}}{\underline{Y}_{22}}$ $\frac{-\underline{Y}_{21}}{\underline{Y}_{22}}\ \frac{1}{\underline{Y}_{22}}$	$\frac{1}{\underline{Z}_{11}}\ \frac{-\underline{Z}_{12}}{\underline{Z}_{11}}$ $\frac{\underline{Z}_{21}}{\underline{Z}_{11}}\ \frac{\lvert\underline{Z}\rvert}{\underline{Z}_{11}}$	$\frac{\underline{H}_{22}}{\lvert\underline{H}\rvert}\ \frac{-\underline{H}_{12}}{\lvert\underline{H}\rvert}$ $\frac{-\underline{H}_{21}}{\lvert\underline{H}\rvert}\ \frac{\underline{H}_{11}}{\lvert\underline{H}\rvert}$	$\underline{F}_{11}\ \underline{F}_{12}$ $\underline{F}_{21}\ \underline{F}_{22}$	$\frac{\underline{A}_{21}}{\underline{A}_{11}}\ \frac{-\lvert\underline{A}\rvert}{\underline{A}_{11}}$ $\frac{1}{\underline{A}_{11}}\ \frac{\underline{A}_{12}}{\underline{A}_{11}}$	$\frac{\underline{B}_{21}}{\underline{B}_{22}}\ \frac{-1}{\underline{B}_{22}}$ $\frac{\lvert\underline{B}\rvert}{\underline{B}_{22}}\ \frac{\underline{B}_{12}}{\underline{B}_{22}}$
$\underline{A}$	$\frac{-\underline{Y}_{22}}{\underline{Y}_{21}}\ \frac{-1}{\underline{Y}_{21}}$ $\frac{-\lvert\underline{Y}\rvert}{\underline{Y}_{21}}\ \frac{-\underline{Y}_{11}}{\underline{Y}_{21}}$	$\frac{\underline{Z}_{11}}{\underline{Z}_{21}}\ \frac{\lvert\underline{Z}\rvert}{\underline{Z}_{21}}$ $\frac{1}{\underline{Z}_{21}}\ \frac{\underline{Z}_{22}}{\underline{Z}_{21}}$	$\frac{-\lvert\underline{H}\rvert}{\underline{H}_{21}}\ \frac{-\underline{H}_{11}}{\underline{H}_{21}}$ $\frac{-\underline{H}_{22}}{\underline{H}_{21}}\ \frac{-1}{\underline{H}_{21}}$	$\frac{1}{\underline{F}_{21}}\ \frac{\underline{F}_{22}}{\underline{F}_{21}}$ $\frac{\underline{F}_{11}}{\underline{F}_{21}}\ \frac{\lvert\underline{F}\rvert}{\underline{F}_{21}}$	$\underline{A}_{11}\ \underline{A}_{12}$ $\underline{A}_{21}\ \underline{A}_{22}$	$\frac{\underline{B}_{22}}{\lvert\underline{B}\rvert}\ \frac{\underline{B}_{12}}{\lvert\underline{B}\rvert}$ $\frac{\underline{B}_{21}}{\lvert\underline{B}\rvert}\ \frac{\underline{B}_{11}}{\lvert\underline{B}\rvert}$
$\underline{B}$	$\frac{-\underline{Y}_{11}}{\underline{Y}_{12}}\ \frac{-1}{\underline{Y}_{12}}$ $\frac{-\lvert\underline{Y}\rvert}{\underline{Y}_{12}}\ \frac{-\underline{Y}_{22}}{\underline{Y}_{12}}$	$\frac{\underline{Z}_{22}}{\underline{Z}_{12}}\ \frac{\lvert\underline{Z}\rvert}{\underline{Z}_{12}}$ $\frac{1}{\underline{Z}_{12}}\ \frac{\underline{Z}_{11}}{\underline{Z}_{12}}$	$\frac{1}{\underline{H}_{12}}\ \frac{\underline{H}_{11}}{\underline{H}_{12}}$ $\frac{\underline{H}_{22}}{\underline{H}_{12}}\ \frac{\lvert\underline{H}\rvert}{\underline{H}_{12}}$	$\frac{-\lvert\underline{F}\rvert}{\underline{F}_{12}}\ \frac{-\underline{F}_{22}}{\underline{F}_{12}}$ $\frac{-\underline{F}_{11}}{\underline{F}_{12}}\ \frac{-1}{\underline{F}_{12}}$	$\frac{\underline{A}_{22}}{\lvert\underline{A}\rvert}\ \frac{\underline{A}_{12}}{\lvert\underline{A}\rvert}$ $\frac{\underline{A}_{21}}{\lvert\underline{A}\rvert}\ \frac{\underline{A}_{11}}{\lvert\underline{A}\rvert}$	$\underline{B}_{11}\ \underline{B}_{12}$ $\underline{B}_{21}\ \underline{B}_{22}$

2. Способы определения параметров четырехполюсника. Параметры четырехполюсника могут быть определены различными способами:

1) составлением уравнений по законам Кирхгофа (либо методом контурных токов или узловых потенциалов) и представлением их решения в виде одной из форм уравнений (11.1 а — е);

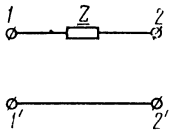
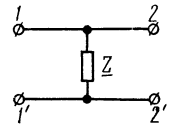
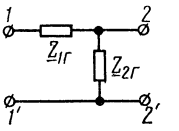
2) по значениям напряжений и токов в режимах холостого хода и короткого замыкания [см. формулы (11.6)];

3) разбивкой сложного четырехполюсника на более простые четырехполюсники, параметры которых известны, и определение его параметров по формулам табл. 11.3;

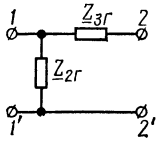
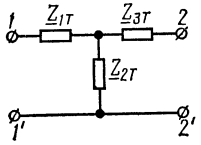
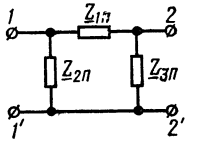
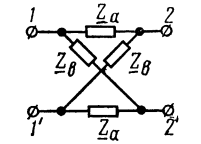
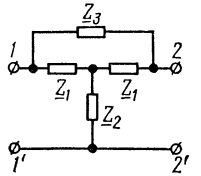
4) способом эквивалентных преобразований (например, путем преобразования треугольника сопротивлений в эквивалентную звезду).

В табл. 11.2 приводятся формулы параметров формы A некоторых простейших пассивных четырехполюсников.

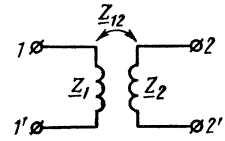
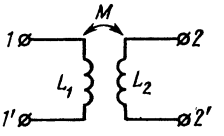
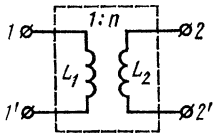
Таблица 11.2

Номер рисунка	Схема и наименование четырехполюсника	A-параметры				Номер формулы
		$\underline{A}_{11}$	$\underline{A}_{12}$	$\underline{A}_{21}$	$\underline{A}_{22}$	
1	 Одноэлементный последовательный	1	$\underline{Z}$	0	1	(11.7а)
2	 Одноэлементный параллельный	1	0	$\frac{1}{\underline{Z}}$	1	(11.7б)
3	 Г-образный с T-входом	$1+\frac{\underline{Z}_{1г}}{\underline{Z}_{2г}}$	$\underline{Z}_{1г}$	$\frac{1}{\underline{Z}_{2г}}$	1	(11.7в)

Продолжение табл. 11.2

Номер рисунка	Схема и наименование четырехполюсника	*A*-параметры				Номер формулы
		$\underline{A}_{11}$	$\underline{A}_{12}$	$\underline{A}_{21}$	$\underline{A}_{22}$	
4	 Г-образный с *П*-входом	1	$\underline{Z}_{3г}$	$\frac{1}{\underline{Z}_{2г}}$	$1+\frac{\underline{Z}_{3г}}{\underline{Z}_{2г}}$	(11.7г)
5	 Т-образный	$1+\frac{\underline{Z}_{1т}}{\underline{Z}_{2т}}$	$\underline{Z}_{1т}+\underline{Z}_{3т}+\frac{\underline{Z}_{1т}\underline{Z}_{3т}}{\underline{Z}_{2т}}$	$\frac{1}{\underline{Z}_{2т}}$	$1+\frac{\underline{Z}_{3т}}{\underline{Z}_{2т}}$	(11.7д)
6	 П-образный	$1+\frac{\underline{Z}_{1п}}{\underline{Z}_{3п}}$	$\underline{Z}_{1п}$	$\frac{1}{\underline{Z}_{2п}}+\frac{1}{\underline{Z}_{3п}}+\frac{\underline{Z}_{1п}}{\underline{Z}_{2п}\underline{Z}_{3п}}$	$1+\frac{\underline{Z}_{1п}}{\underline{Z}_{2п}}$	(11.7е)
7	 Мостовой	$\frac{\underline{Z}_a+\underline{Z}_b}{\underline{Z}_b-\underline{Z}_a}$	$\frac{2\underline{Z}_a\underline{Z}_b}{\underline{Z}_b-\underline{Z}_a}$	$\frac{2}{\underline{Z}_b-\underline{Z}_a}$	$\frac{\underline{Z}_a+\underline{Z}_b}{\underline{Z}_b-\underline{Z}_a}$	(11.7ж)
8	 Т-образный мостовой	$\frac{\underline{Z}_1\underline{Z}_3}{\rho}+1$	$\frac{\underline{Z}_1\underline{Z}_3(\underline{Z}_1+2\underline{Z}_2)}{\rho}$	$\frac{2\underline{Z}_1+\underline{Z}_3}{\rho}$	$\frac{\underline{Z}_1\underline{Z}_3}{\rho}+1$	(11.7з)
		где $\rho=\underline{Z}_1^2+2\underline{Z}_1\underline{Z}_2+\underline{Z}_2\underline{Z}_3$				

Продолжение табл. 11.2

Номер рисунка	Схема и наименование четырехполюсника	A-параметры				Номер формулы
		$\underline{A}_{11}$	$\underline{A}_{12}$	$\underline{A}_{21}$	$\underline{A}_{22}$	
9	 Трансформатор (общий случай)	$\pm\frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_{12}}$	$\pm\frac{\underline{Z}_1\underline{Z}_2-\underline{Z}_{12}^2}{\underline{Z}_{12}}$	$\pm\frac{1}{\underline{Z}_{12}}$	$\pm\frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_{12}}$	(11.7и)
10	 Совершенный трансформатор $M=\sqrt{L_1L_2}$	$\pm\sqrt{\frac{L_1}{L_2}}$	0	$\pm\frac{1}{j\omega\sqrt{L_1L_2}}$	$\pm\sqrt{\frac{L_2}{L_1}}$	(11.7к)
11	 Идеальный трансформатор $L_1=L_2=\infty$, $L_1/L_2=\text{const}$	$\pm\frac{1}{n}$	0	0	$\pm n$	(11.7л)

Примечание. В схемах трансформаторов знак плюс соответствует встречному включению, знак минус—согласному.

Параметры четырехполюсника могут быть определены по известным напряжениям и токам в режимах холостого хода и короткого замыкания по формулам, которые получаются из формул (11.1а — е):

$$\underline{Y}_{11}=\left(\frac{\underline{I}_1}{\underline{U}_1}\right)_{\underline{U}_2=0},\quad \underline{Y}_{12}=\left(\frac{\underline{I}_1}{\underline{U}_2}\right)_{\underline{U}_1=0},\quad \underline{Y}_{21}=\left(\frac{\underline{I}_2}{\underline{U}_1}\right)_{\underline{U}_2=0},$$

$$\underline{Y}_{22}=\left(\frac{\underline{I}_2}{\underline{U}_2}\right)_{\underline{U}_1=0}; \qquad (11.6а)$$

$$\underline{Z}_{11}=\left(\frac{\underline{U}_1}{\underline{I}_1}\right)_{\underline{I}_2=0},\quad \underline{Z}_{12}=\left(\frac{\underline{U}_1}{\underline{I}_2}\right)_{\underline{I}_1=0},\quad \underline{Z}_{21}=\left(\frac{\underline{U}_2}{\underline{I}_1}\right)_{\underline{I}_2=0},$$

$$\underline{Z}_{22}=\left(\frac{\underline{U}_2}{\underline{I}_2}\right)_{\underline{I}_1=0}; \qquad (11.6б)$$

$$\underline{H}_{11}=\left(\frac{\underline{U}_1}{\underline{I}_1}\right)_{\underline{U}_2=0},\quad \underline{H}_{12}=\left(\frac{\underline{U}_1}{\underline{U}_2}\right)_{\underline{I}_1=0},\quad \underline{H}_{21}=\left(\frac{\underline{I}_2}{\underline{I}_1}\right)_{\underline{U}_2=0},$$

$$\underline{H}_{22}=\left(\frac{\underline{I}_2}{\underline{U}_2}\right)_{\underline{I}_1=0}; \qquad (11.6в)$$

$$\underline{F}_{11}=\left(\frac{\underline{I}_1}{\underline{U}_1}\right)_{\underline{I}_2=0},\quad \underline{F}_{12}=\left(\frac{\underline{I}_1}{\underline{I}_2}\right)_{\underline{U}_1=0},\quad \underline{F}_{21}=\left(\frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_1}\right)_{\underline{I}_2=0},$$

$$\underline{F}_{22}=\left(\frac{\underline{U}_2}{\underline{\ }_2}\right)_{\underline{U}_1=0}; \qquad (11.6г)$$

$$\underline{A}_{11}=\left(\frac{\underline{U}_1}{\underline{U}_2}\right)_{\underline{I}_2=0},\quad \underline{A}_{12}=\left(\frac{\underline{U}_1}{-\underline{I}_2}\right)_{\underline{U}_2=0},\quad \underline{A}_{21}=\left(\frac{\underline{I}_1}{\underline{U}_2}\right)_{\underline{I}_2=0},$$

$$\underline{A}_{22}=\left(\frac{\underline{I}_1}{-\underline{I}_2}\right)_{\underline{U}_2=0}; \qquad (11.6д)$$

$$\underline{B}_{11}=\left(\frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_1}\right)_{\underline{I}_1=0},\quad \underline{B}_{12}=\left(\frac{\underline{U}_2}{-\underline{I}_1}\right)_{\underline{U}_1=0},\quad \underline{B}_{21}=\left(\frac{\underline{I}_2}{\underline{U}_1}\right)_{\underline{I}_1=0},$$

$$\underline{B}_{22}=\left(\frac{\underline{I}_2}{-\underline{I}_1}\right)_{\underline{U}_1=0}. \qquad (11.6е)$$

Пример приведен в задаче 11.1.

3. Матричная форма записи уравнений четырехполюсника; виды соединения четырехполюсника. Основные уравнения четырехполюсника могут быть записаны в матричной форме (основные понятия о матрицах даны в приложении 3).

В табл. 11.3 приведены матричные формы записи основных уравнений четырехполюсника (11.1а — е). Там же даны схемы сложных соединений двух четырехполюсников и формулы для определения их матриц. Аналогичные формулы справедливы при соединении любого числа четырехполюсников. Следует иметь в виду, что указанные формулы нахождения матриц сложных четырехполюсников справедливы лишь при выполнении условий регулярности их соединений. Соединение четырехполюсников регулярно в случае, когда токи, протекающие через оба пер-

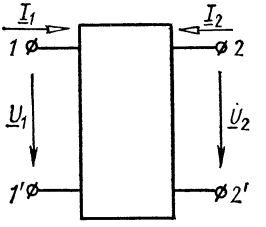
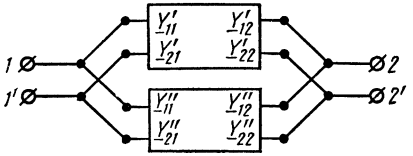
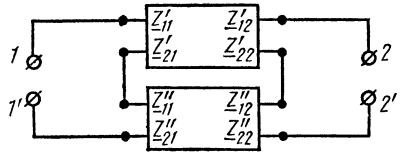
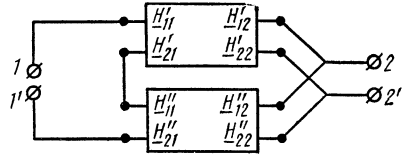
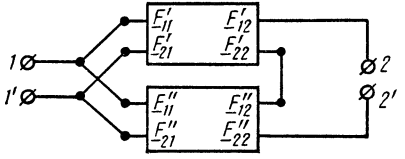
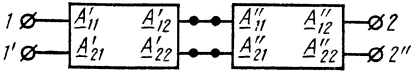


Рис. 11.1

Таблица 11.3

Форма	Матричная форма записи основных уравнений четырехполюсника	Использование различных форм основных уравнений четырехполюсника при определении параметров схем сложных четырехполюсников		
		Соединения	Схема	Матричное уравнение параметров сложного четырехполюсника
Y	$\begin{bmatrix} \underline{I}_1 \\ \underline{I}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{Y}_{11} & \underline{Y}_{12} \\ \underline{Y}_{21} & \underline{Y}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{U}_2 \end{bmatrix} = [\underline{Y}] \begin{bmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{U}_2 \end{bmatrix}$	Параллельное		$[\underline{Y}] = [\underline{Y}'] + [\underline{Y}'']$
Z	$\begin{bmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{U}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{Z}_{11} & \underline{Z}_{12} \\ \underline{Z}_{21} & \underline{Z}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{I}_1 \\ \underline{I}_2 \end{bmatrix} = [\underline{Z}] \begin{bmatrix} \underline{I}_1 \\ \underline{I}_2 \end{bmatrix}$	Последовательное		$[\underline{Z}] = [\underline{Z}'] + [\underline{Z}'']$
H	$\begin{bmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{I}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{H}_{11} & \underline{H}_{12} \\ \underline{H}_{21} & \underline{H}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{I}_1 \\ \underline{U}_2 \end{bmatrix} = [\underline{H}] \begin{bmatrix} \underline{I}_1 \\ \underline{U}_2 \end{bmatrix}$	Последовательно-параллельное		$[\underline{H}] = [\underline{H}'] + [\underline{H}'']$

Форма	Матричная форма записи основных уравнений четырехполюсника	Использование различных форм основных уравнений четырехполюсника при определении параметров схем сложных четырехполюсников		
		Соединения	Схема	Матричное уравнение параметров сложного четырехполюсника
F	$\begin{bmatrix} \underline{I}_1 \\ \underline{U}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{F}_{11} & \underline{F}_{12} \\ \underline{F}_{21} & \underline{F}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{I}_2 \end{bmatrix} = [\underline{F}] \begin{bmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{I}_2 \end{bmatrix}$	Параллельно-последовательное		$[\underline{F}] = [\underline{F}'] + [\underline{F}'']$
A	$\begin{bmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{I}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{A}_{11} & \underline{A}_{12} \\ \underline{A}_{21} & \underline{A}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{U}_2 \\ -\underline{I}_2 \end{bmatrix} = [\underline{A}] \begin{bmatrix} \underline{U}_2 \\ -\underline{I}_2 \end{bmatrix}$	Каскадное		$[\underline{A}] = [\underline{A}'][\underline{A}'']$

вичных и оба вторичных зажима каждого из четырехполюсников, равны по величине и обратны по направлению.

Далее указаны некоторые случаи регулярного соединения четырехполюсников:

1) каскадное соединение любых четырехполюсников;

2) параллельное соединение: а) уравновешенных четырехполюсников (т. е. имеющих горизонтальную ось симметрии); б) подобных четырехполюсников (схемы одинаковы, а сопротивления соответствующих элементов пропорциональны); в) треугольных четырехполюсников, причем так, что их общие зажимы соединены накоротко (таковы Т- и П-образные схемы);

3) последовательное соединение треугольных четырехполюсников, общие зажимы которых объединены (например, Т- или П-образные и соответственно перевернутые Т- или П-образные);

4) соединение любым способом произвольного четырехполюсника с другим, у которого на входе или (и) выходе включен трансформатор.

Пример приведен в задаче 11.12.

4. Характеристические параметры четырехполюсника. Помимо параметров, указанных в п. 1, широко применяются характеристические параметры четырехполюсника: характеристические сопротивления $\underline{Z}_{1c}$ и $\underline{Z}_{2c}$ и характеристическая (или собственная) постоянная передачи $\underline{\Gamma}$, которые также полностью характеризуют четырехполюсник.

Постоянная передачи

$$\underline{\Gamma} = A + jB = \frac{1}{2} \ln \frac{\underline{U}_1 \underline{I}_1}{\underline{U}_2 \underline{I}_2}\Bigg|_{\underline{Z}_н = \underline{Z}_{2c}},$$

$$A = \ln \frac{U_1}{U_2} + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\underline{Z}_{2c}}{\underline{Z}_{1c}} \right|, \text{ Нп}, \qquad (11.8)$$

$$B = \frac{1}{2} \arg \left(\frac{\underline{U}_1 \underline{I}_1}{\underline{U}_2 \underline{I}_2} \right),$$

где A — характеристическая (или собственная) постоянная ослабления четырехполюсника*, Нп или дБ; B — характеристическая (или собственная) постоянная фазы четырехполюсника, рад или град.

Характеристические параметры можно определить через параметры формы $\underline{A}$:

$$\underline{Z}_{1c} = \sqrt{\frac{\underline{A}_{11}\underline{A}_{12}}{\underline{A}_{21}\underline{A}_{22}}}; \quad \underline{Z}_{2c} = \sqrt{\frac{\underline{A}_{22}\underline{A}_{12}}{\underline{A}_{21}\underline{A}_{11}}}; \qquad (11.9)$$

$$\operatorname{th} \underline{\Gamma} = \sqrt{\frac{\underline{A}_{12}\underline{A}_{21}}{\underline{A}_{11}\underline{A}_{22}}}; \quad \underline{\Gamma} = \ln \left(\sqrt{\underline{A}_{11}\underline{A}_{22}} + \sqrt{\underline{A}_{12}\underline{A}_{21}} \right), \qquad (11.10)$$

* Согласно ГОСТ 1494—77 для четырехполюсника введен термин о с л а б л е н и е вместо ранее употреблявшегося з а т у х а н и е.

и, наоборот, параметры формы A могут быть выражены через характеристические параметры:

$$\left.\begin{aligned} \underline{A}_{11} &= \sqrt{\frac{\underline{Z}_{1c}}{\underline{Z}_{2c}}}\,\mathrm{ch}\,\underline{\Gamma};\quad \underline{A}_{12} = \sqrt{\underline{Z}_{1c}\underline{Z}_{2c}}\,\mathrm{sh}\,\underline{\Gamma};\\ \underline{A}_{21} &= \frac{1}{\sqrt{\underline{Z}_{1c}\underline{Z}_{2c}}}\,\mathrm{sh}\,\underline{\Gamma};\quad \underline{A}_{22} = \sqrt{\frac{\underline{Z}_{2c}}{\underline{Z}_{1c}}}\,\mathrm{ch}\,\underline{\Gamma}. \end{aligned}\right\} \qquad (11.11)$$

Примеры даны в задачах 11.19 и 11.21.

5. Параметры холостого хода и короткого замыкания. В расчетах используются также параметры холостого хода $\underline{Z}_{1x}$ и $\underline{Z}_{2x}$ и короткого замыкания $\underline{Z}_{1к}$ и $\underline{Z}_{2к}$, измеренные соответственно со стороны первичных и вторичных зажимов, которые связаны между собой соотношением

$$\underline{Z}_{1x}/\underline{Z}_{2x} = \underline{Z}_{1к}/\underline{Z}_{2к}. \qquad (11.12)$$

Характеристические параметры выражаются через параметры холостого хода и короткого замыкания:

$$\underline{Z}_{1c} = \sqrt{\underline{Z}_{1x}\underline{Z}_{1к}};\quad \underline{Z}_{2c} = \sqrt{\underline{Z}_{2x}\underline{Z}_{2к}}; \qquad (11.13)$$

$$\mathrm{th}\,\underline{\Gamma} = \sqrt{\underline{Z}_{1к}/\underline{Z}_{1x}} = \sqrt{\underline{Z}_{2к}/\underline{Z}_{2x}}. \qquad (11.14)$$

Сопротивления холостого хода и короткого замыкания определяются через характеристические параметры или A-параметры так:

$$\left.\begin{aligned} \underline{Z}_{1x} &= \underline{Z}_{1c}\,\mathrm{cth}\,\underline{\Gamma} = \underline{A}_{11}/\underline{A}_{21};\quad \underline{Z}_{1к} = \underline{Z}_{1c}\,\mathrm{th}\,\underline{\Gamma} = \underline{A}_{12}/\underline{A}_{22};\\ \underline{Z}_{2x} &= \underline{Z}_{2c}\,\mathrm{cth}\,\underline{\Gamma} = \underline{A}_{22}/\underline{A}_{21};\quad \underline{Z}_{2к} = \underline{Z}_{2c}\,\mathrm{th}\,\underline{\Gamma} = \underline{A}_{12}/\underline{A}_{11}. \end{aligned}\right\} \qquad (11.15)$$

A-параметры четырехполюсника вычисляются по сопротивлениям холостого хода и короткого замыкания по формулам

$$\left.\begin{aligned} \underline{A}_{11} &= \frac{\underline{Z}_{1x}}{\sqrt{\underline{Z}_{2x}(\underline{Z}_{1x}-\underline{Z}_{1к})}};\quad \underline{A}_{12} = \sqrt{\frac{\underline{Z}_{2x}}{\underline{Z}_{1x}-\underline{Z}_{1к}}};\\ \underline{A}_{21} &= \frac{1}{\sqrt{\underline{Z}_{2x}(\underline{Z}_{1x}-\underline{Z}_{1к})}};\quad \underline{A}_{22} = \sqrt{\frac{\underline{Z}_{2x}}{\underline{Z}_{1x}-\underline{Z}_{1к}}}. \end{aligned}\right\} \qquad (11.16)$$

Примеры даны в задачах 11.8; 11.11.

6. Симметричные четырехполюсники. В частном случае симметричного четырехполюсника все приведенные формулы упрощаются, если учесть, что при этом имеются равенства

$$\underline{A}_{11} = \underline{A}_{22},\quad \underline{Z}_{1c} = \underline{Z}_{2c} = \underline{Z}_c,\quad \underline{Z}_{1x} = \underline{Z}_{2x} = \underline{Z}_x,\quad \underline{Z}_{1к} = \underline{Z}_{2к} = \underline{Z}_к. \qquad (11.17)$$

В частности, для симметричного Т-образного четырехполюсника, у которого $\underline{Z}_{1т} = \underline{Z}_{3т} = \underline{Z}_1/2$, $\underline{Z}_{2т} = \underline{Z}_2$ (см. рис. 5 в табл. 11.2),

$$\operatorname{sh}\frac{\underline{\Gamma}}{2} = \sqrt{\frac{\underline{Z}_1}{4\underline{Z}_2}}, \quad \underline{Z}_c = \underline{Z}_т = \sqrt{\underline{Z}_1\underline{Z}_2\left(1+\frac{\underline{Z}_1}{4\underline{Z}_2}\right)}. \qquad (11.18)$$

Для симметричного П-образного четырехполюсника, у которого $\underline{Z}_{2п} = \underline{Z}_{3п} = 2\underline{Z}_2$ (см. рис. 6 в табл. 11.2),

$$\operatorname{sh}\frac{\underline{\Gamma}}{2} = \sqrt{\frac{\underline{Z}_1}{4\underline{Z}_2}}; \quad \underline{Z}_c = \underline{Z}_п = \sqrt{\frac{\underline{Z}_1\underline{Z}_2}{1+\dfrac{\underline{Z}_1}{4\underline{Z}_2}}}. \qquad (11.19)$$

Для симметричного мостового четырехполюсника (см. рис. 7 в табл. 11.2)

$$\operatorname{th}\frac{\underline{\Gamma}}{2} = \sqrt{\frac{\underline{Z}_a}{\underline{Z}_b}}; \quad \underline{Z}_c = \underline{Z}_м = \sqrt{\underline{Z}_a\underline{Z}_b}. \qquad (11.20)$$

7. Эквивалентность четырехполюсников. Четырехполюсники эквивалентны, если они имеют одинаковые: а) параметры одной из форм основных уравнений ($\underline{Y}$, $\underline{Z}$, $\underline{H}$, $\underline{F}$, $\underline{A}$ или $\underline{B}$) или б) характеристические параметры, или в) параметры холостого хода и короткого замыкания.

8. Входное сопротивление четырехполюсника. Это сопротивление со стороны зажимов *1—1′* (рис. 11.2, *а*) может быть определено через его $\underline{A}$-параметры или через параметры холостого хода и короткого замыкания, или через характеристические параметры:

$$\underline{Z}_{1вх} = \frac{\underline{A}_{11}\underline{Z}_н + \underline{A}_{12}}{\underline{A}_{21}\underline{Z}_н + \underline{A}_{22}} = \underline{Z}_{1х}\frac{\underline{Z}_{2к} + \underline{Z}_н}{\underline{Z}_{2х} + \underline{Z}_н} = \underline{Z}_{1с}\operatorname{th}(\underline{\Gamma} + \underline{n}), \qquad (11.21а)$$

где

$$\underline{n} = \frac{1}{2}\ln\frac{\underline{Z}_{2с} + \underline{Z}_н}{\underline{Z}_{2с} - \underline{Z}_н}; \qquad (11.21б)$$

$\underline{Z}_н$ — сопротивление нагрузки.

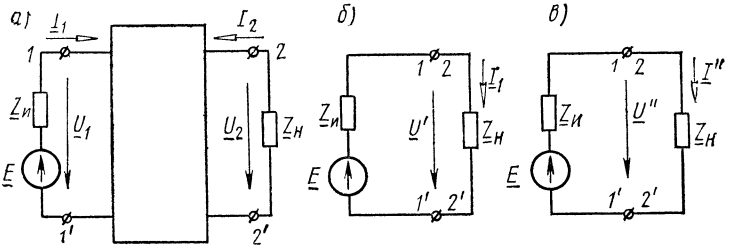


Рис. 11.2

Если сопротивление источника $\underline{Z}_{\text{и}}$ не равно характеристическому сопротивлению четырехполюсника $\underline{Z}_{1c}$ со стороны входных зажимов, то имеет место несогласованность сопротивлений на входе, а если сопротивление нагрузки $\underline{Z}_{\text{н}} \neq \underline{Z}_{2c}$, то — несогласованность на выходе. Относительная величина несогласованности определяется коэффициентами отражения (несогласованности) на входе $\underline{p}_{\text{и}}$ и на выходе $\underline{p}_{\text{н}}$:

$$\underline{p}_{\text{и}} = \frac{\underline{Z}_{\text{и}} - \underline{Z}_{1c}}{\underline{Z}_{\text{и}} + \underline{Z}_{1c}}; \quad \underline{p}_{\text{н}} = \frac{\underline{Z}_{\text{н}} - \underline{Z}_{2c}}{\underline{Z}_{\text{н}} + \underline{Z}_{2c}}. \tag{11.22}$$

Погрешность входного сопротивления — относительная величина отклонения $\underline{Z}_{1\text{вх}}$ от $\underline{Z}_{1c}$, определяемая по формуле

$$\frac{\underline{Z}_{1\text{вх}} - \underline{Z}_{1c}}{\underline{Z}_{1\text{вх}} + \underline{Z}_{1c}} = \underline{p}_{\text{н}} e^{-2\underline{\Gamma}}. \tag{11.23а}$$

Отсюда

$$\underline{Z}_{1\text{вх}} = \underline{Z}_{1c} \frac{1 + \underline{p}_{\text{н}} e^{-2\underline{\Gamma}}}{1 - \underline{p}_{\text{н}} e^{-2\underline{\Gamma}}}. \tag{11.23б}$$

Пример дан в задаче 11.30.

9. Выражение различных величин в обобщенной цепи четырехполюсника, подключенного к источнику с э. д. с. $\underline{E}$ и внутренним сопротивлением $\underline{Z}_{\text{и}}$ и нагруженного на сопротивление $\underline{Z}_{\text{н}}$. Для такого четырехполюсника (см. рис. 11.2, *а*) в табл. 11.4 приводятся некоторые важные расчетные формулы, выраженные через A-параметры.

Таблица 11.4

Определяемые величины	Расчетные формулы
Входное напряжение $\underline{U}_1$	$\underline{E} \dfrac{\underline{A}_{11}\underline{Z}_{\text{н}} + \underline{A}_{12}}{\underline{A}_{11}\underline{Z}_{\text{н}} + \underline{A}_{12} + \underline{A}_{21}\underline{Z}_{\text{н}}\underline{Z}_{\text{и}} + \underline{A}_{22}\underline{Z}_{\text{и}}}$
Входной ток $\underline{I}_1$	$\underline{E} \dfrac{\underline{A}_{21}\underline{Z}_{\text{н}} + \underline{A}_{22}}{\underline{A}_{11}\underline{Z}_{\text{н}} + \underline{A}_{12} + \underline{A}_{21}\underline{Z}_{\text{н}}\underline{Z}_{\text{и}} + \underline{A}_{22}\underline{Z}_{\text{и}}}$
Выходное напряжение $\underline{U}_2$	$\underline{E} \dfrac{\underline{Z}_{\text{н}}}{\underline{A}_{11}\underline{Z}_{\text{н}} + \underline{A}_{12} + \underline{A}_{21}\underline{Z}_{\text{н}}\underline{Z}_{\text{и}} + \underline{A}_{22}\underline{Z}_{\text{и}}}$
Выходной ток $\underline{I}_2$	$\underline{E} \dfrac{-1}{\underline{A}_{11}\underline{Z}_{\text{н}} + \underline{A}_{12} + \underline{A}_{21}\underline{Z}_{\text{н}}\underline{Z}_{\text{и}} + \underline{A}_{22}\underline{Z}_{\text{и}}}$

Продолжение табл. 11.4

Определяемые величины	Расчетные формулы
Входное сопротивление $\underline{Z}_{1\text{вх}} = \underline{U}_1/\underline{I}_1$	$\dfrac{\underline{A}_{11}\underline{Z}_\text{н} + \underline{A}_{12}}{\underline{A}_{21}\underline{Z}_\text{н} + \underline{A}_{22}}$
Выходное сопротивление $\underline{Z}_{2\text{вых}} = -\underline{U}_2/\underline{I}_2$	$\dfrac{\underline{A}_{12} + \underline{A}_{22}\underline{Z}_\text{и}}{\underline{A}_{11} + \underline{A}_{21}\underline{Z}_\text{и}}$
Коэффициент передачи напряжения $\underline{T}_U = \underline{U}_2/\underline{U}_1$	$\dfrac{\underline{Z}_\text{н}}{\underline{A}_{11}\underline{Z}_\text{н} + \underline{A}_{12}}$
Коэффициент передачи тока $\underline{T}_I = \underline{I}_2/\underline{I}_1$	$\dfrac{-1}{\underline{A}_{21}\underline{Z}_\text{н} + \underline{A}_{22}}$
Передаточная проводимость $\underline{Y}_\text{пер} = \underline{I}_2/\underline{U}_1$	$\dfrac{-1}{\underline{A}_{11}\underline{Z}_\text{н} + \underline{A}_{12}}$
Передаточное сопротивление $\underline{Z}_\text{пер} = \underline{U}_2/\underline{I}_1$	$\dfrac{-\underline{Z}_\text{н}}{\underline{A}_{21}\underline{Z}_\text{н} + \underline{A}_{22}}$

10. Рабочая и вносимая постоянные передачи. Рабочей постоянной передачи при включении четырехполюсника между нагрузкой $\underline{Z}_\text{н}$ и источником с э. д. с. $\underline{E}$ и сопротивлением $\underline{Z}_\text{и}$ (см. рис. 11.2, *а*) называется величина, равная

$$\underline{\Gamma}_\text{р} = \frac{1}{2}\ln\frac{\underline{U}'\,\underline{I}'}{\underline{U}_2\underline{I}_2} = \frac{1}{2}\ln\frac{\dfrac{\underline{E}^2}{4\underline{Z}_\text{и}}}{\underline{I}_2^2\underline{Z}_\text{н}} = \ln\frac{\underline{E}}{2\underline{U}_2} + \frac{1}{2}\ln\frac{\underline{Z}_\text{н}}{\underline{Z}_\text{и}}. \quad (11.24)$$

Здесь $\underline{U}'$ и $\underline{I}'$ относятся к схеме рис. 11.2, *б*, в которой сопротивление нагрузки берется равным сопротивлению источника $\underline{Z}_\text{и}$ и подключается непосредственно к источнику. Напряжение $\underline{U}_2$ и ток $\underline{I}_2$ относятся к схеме рис. 11.2, *а*, в которой нагрузка $\underline{Z}_\text{н}$ подключается к источнику э. д. с. через четырехполюсник.

Рабочую постоянную передачи четырехполюсника можно вычислить по формуле

$$\underline{\Gamma}_\text{р} = \underline{\Gamma} + \ln\frac{\underline{Z}_\text{и} + \underline{Z}_{1\text{с}}}{2\sqrt{\underline{Z}_\text{и}\underline{Z}_{1\text{с}}}} + \ln\frac{\underline{Z}_\text{н} + \underline{Z}_{2\text{с}}}{2\sqrt{\underline{Z}_\text{н}\underline{Z}_{2\text{с}}}} +$$

$$+\ln\left(1-\underline{p}_{\text{и}}\underline{p}_{\text{н}}e^{-2\underline{\Gamma}}\right)=A_{\text{р}}+jB_{\text{р}},\qquad(11.25)$$

где $\underline{\Gamma}$ — характеристическая постоянная передачи четырехполюсника; $A_{\text{р}}$ — рабочее ослабление; $B_{\text{р}}$ — рабочая фазовая постоянная; $\underline{p}_{\text{и}}$ и $\underline{p}_{\text{п}}$ — коэффициенты несогласованности [см. формулы (11.22)].

Рабочее ослабление может быть определено по одной из формул

$$A_{\text{р}}=\ln\frac{E}{2U_2}+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\underline{Z}_{\text{н}}}{\underline{Z}_{\text{и}}}\right|,\qquad(11.26\text{а})$$

$$A_{\text{р}}=A+\ln\left|\frac{\underline{Z}_{\text{и}}+\underline{Z}_{1c}}{2\sqrt{\underline{Z}_{\text{и}}\underline{Z}_{1c}}}\right|+\ln\left|\frac{\underline{Z}_{\text{н}}+\underline{Z}_{2c}}{2\sqrt{\underline{Z}_{\text{н}}\underline{Z}_{2c}}}\right|+$$

$$+\ln\left|1-\underline{p}_{\text{и}}\underline{p}_{\text{н}}e^{-2\underline{\Gamma}}\right|,\ \text{Нп},\qquad(11.26\text{б})$$

где A — характеристическое ослабление четырехполюсника; $\underline{p}_{\text{и}}$ и $\underline{p}_{\text{н}}$ — коэффициенты отражения (несогласованности) на входе и выходе.

Вносимая постоянная передачи

$$\underline{\Gamma}_{\text{вн}}=\frac{1}{2}\ln\frac{\underline{U}_2''\underline{I}_2''}{\underline{U}_2\underline{I}_2}=A_{\text{вн}}+jB_{\text{вн}},\qquad(11.27)$$

где $\underline{U}_2''$ и $\underline{I}_2''$ — напряжение и ток на нагрузке при непосредственном подключении ее к источнику э. д. с. (рис. 11.2, *в*); $\underline{U}_2$ и $\underline{I}_2$ — напряжение и ток в той же нагрузке при подключении ее к источнику э. д. с. через четырехполюсник (см. рис. 11.2, *а*); $A_{\text{вн}}$ — вносимое ослабление; $B_{\text{вн}}$ — вносимая фазовая постоянная.

Вносимое ослабление

$$A_{\text{вн}}=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\underline{U}_2''\underline{I}_2''}{\underline{U}_2\underline{I}_2}\right|=\underline{A}+\ln\left|\frac{\underline{Z}_{\text{и}}+\underline{Z}_{1c}}{2\sqrt{\underline{Z}_{\text{и}}\underline{Z}_{1c}}}\right|+\ln\left|\frac{\underline{Z}_{\text{н}}+\underline{Z}_{2c}}{2\sqrt{\underline{Z}_{\text{н}}\underline{Z}_{2c}}}\right|+$$

$$+\ln\left|1-\underline{p}_{\text{и}}\underline{p}_{\text{н}}e^{-2\underline{\Gamma}}\right|-\ln\left|\frac{\underline{Z}_{\text{и}}+\underline{Z}_{\text{н}}}{2\sqrt{\underline{Z}_{\text{и}}\underline{Z}_{\text{н}}}}\right|,\ \text{Нп}.\qquad(11.28)$$

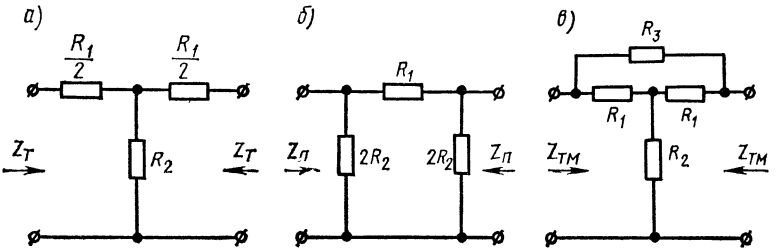


Рис. 11.3

Вносимое и рабочее ослабление могут быть отрицательными даже для пассивной цепи, что характеризует изменение условий согласования источника с нагрузкой при включении между ними четырехполюсника.

Пример дан в задаче 11.30.

11. Удлинители. Это четырехполюсники, составленные из чисто активных сопротивлений и выполненные по схемам рис. 11.3, *а — в*. При расчете удлинителя обычно задаются его характеристическим ослаблением и модулем характеристического сопротивления. В этом случае элементы удлинителя рассчитываются по формулам:
для схемы рис. 11.3, *а*

$$R_1 = 2Z_т \operatorname{th} \frac{A}{2}, \quad R_2 = \frac{Z_т}{\operatorname{sh} A}; \tag{11.29а}$$

для схемы рис. 11.3, *б*

$$R_1 = Z_п \operatorname{sh} A, \quad R_2 = \frac{Z_п}{2 \operatorname{th} \frac{A}{2}}; \tag{11.29б}$$

для схемы рис. 11.3, *в*

$$R_1 = Z_{тм}, \quad R_2 = \frac{R_1}{2}\left(\operatorname{cth} \frac{A}{2} - 1\right), \; R_3 = R_1^2 / R_2. \tag{11.29в}$$

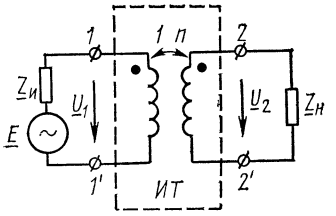


Рис. 11.4

Пример дан в задаче 11.37.

12. Трансформаторы для согласования сопротивлений источника $Z_и$ и нагрузки $Z_н$.

Идеальный трансформатор *ИТ* (рис. 11.4) не имеет потерь и рассеяния, индуктивности катушек бесконечно велики, но их отношение конечно и равно квадрату чисел витков

$$L_2/L_1 = w_2^2/w_1^2 = n^2, \quad n = \sqrt{L_2/L_1}. \tag{11.30}$$

Если задаться коэффициентом трансформации

$$n = U_2/U_1 = \sqrt{Z_н/Z_и}, \tag{11.31}$$

то $Z_н$ и $Z_и$ окажутся подключенными согласованно, т. е.

$$Z_{1вх} = Z_н/n^2 = Z_и, \quad Z_{2вх} = n^2 Z_и = Z_н. \tag{11.32}$$

Переходный трансформатор служит для согласования модулей сопротивлений аппаратуры и цепей связи. При согласовании по модулю сопротивления источника $|\underline{Z}_и|$ с нагрузкой $|\underline{Z}_н|$ коэффициент трансформации

$$n = \sqrt{\left|\frac{\underline{Z}_н}{\underline{Z}_{1вх}}\right|} = \sqrt{\left|\frac{\underline{Z}_н}{\underline{Z}_и}\right|}. \tag{11.33}$$

Расчет трансформатора ведется по заданной величине рабочего ослабления, которое определяется по формуле

$$A_{\text{р}} = A_1 + A_2 + A_3, \tag{11.34}$$

где $A_1 = \ln\left[1 + \frac{R_1}{|\underline{Z}_{\text{и}}|}\right]$ — постоянная составляющая рабочего ослабления; $A_2 = \frac{1}{2}\ln\left[1 + \frac{|\underline{Z}_{\text{и}}^2|}{4\omega^2 L_1^2}\right]$ — переменная составляющая в области низких частот;
$A_3 = \frac{1}{2}\ln\left[1 + \frac{\omega^2\sigma^2 L_1}{4|\underline{Z}_{\text{и}}|^2}\right]$ — переменная составляющая в области высоких частот.

Оптимальная величина индуктивности определяется из равенства $A_2 = A_3$. В этом случае для расчета параметров обмоток трансформатора используются следующие формулы:

$$\left.\begin{aligned} &R_1 = |\underline{Z}_{\text{и}}|\left(e^{A_1} - 1\right); \quad \sigma = 4\frac{\omega_1}{\omega_2}\left(e^{2A_2} - 1\right); \\ &L_1 = \frac{|\underline{Z}_{\text{и}}|}{\sqrt{\omega_1\omega_2\sigma}}; \quad R_2 = R_1 n^2; \quad L_2 = L_1 n^2. \end{aligned}\right\} \tag{11.35}$$

Здесь σ — коэффициент рассеяния; ω_1 и ω_2 — соответственно наинизшая и высшая угловые частоты, при которых должен работать трансформатор.

13. Минимально-фазовый четырехполюсник. Минимально-фазовым называют четырехполюсник, у которого все нули функции передачи, записанной в операторной форме, лежат в левой части комплексной плоскости p.

Неминимально-фазовым четырехполюсником называют такой четырехполюсник, у которого хотя бы один нуль передаточной функции лежит в правой части плоскости p.

Примеры даны в задачах 12.41 и 12.42.

14. Устойчивость. Линейные электрические цепи, у которых свободные колебания имеют затухающий характер, называются устойчивыми. Так, например, любая пассивная цепь является устойчивой. В линейных цепях с зависимыми источниками (например, в цепях с электронными лампами или транзисторами) свободные колебания могут иметь затухающий характер — тогда цепь устойчива, а если они неограниченно возрастают, то цепь неустойчива.

При изучении четырехполюсников практическое значение имеют только такие четырехполюсники, у которых после выключения внешних э. д. с. не развиваются непрерывно нарастающие процессы. Такие четырехполюсники называют устойчивыми. Входные и передаточные функции устойчивого четырехполюсника

$$F(\overline{p}) = \frac{A(\overline{p})}{B(\overline{p})} = \frac{a_n p^n + a_{n-1}p^{n-1} + \cdots + a_1 p + a_0}{b_m p^m + b_{m-1}p^m + \cdots + b_1 p + b_0} =$$

$$= H \frac{A(\overline{p})}{b_m (p - p_1)(p - p_2) \ldots (p - p_m)}$$

не содержат полюсов в правой комплексной полуплоскости ($\mathrm{Re}\{p_k\} \leqslant 0$ при $k = 1, 2, \ldots, n$), а их полюсы на мнимой оси всегда простые (некратные).

Для проверки на устойчивость достаточно приравнять нулю знаменатель $B(\overline{p}) = 0$, тогда полученное уравнение называется характеристическим, и проверить, что расположение его корней, являющихся нулями полинома $B(\overline{p})$, т. е. полюсами функции $F(\overline{p})$, удовлетворяет указанным выше условиям. Пример в задаче 11.59.

Для проверки того, что нули $B(p)$ принадлежат левой комплексной полуплоскости (такие полиномы $B(p)$ называют полиномами Гурвица, см. сноску на с. 412), можно пользоваться алгебраическими критериями. Так, заведомо не являются полиномами Гурвица полиномы, коэффициенты которых имеют неодинаковые знаки (см. задачу 11.60, а, б). Полином $B(\overline{p})$ является полиномом Гурвица тогда и только тогда, когда отношения его четной и нечетной частей могут быть разложены в цепную дробь*:

$$\frac{b_0 + b_2 p^2 + \cdots}{b_1 p + b_3 p^3 + \cdots} = c_0 \frac{1}{p} + \cfrac{1}{c_1 \frac{1}{p} + \cfrac{1}{c_2 \frac{1}{p} + \cdot \cdot \cdot + \cfrac{1}{c_n \frac{1}{p}}}}$$

с точно n положительными коэффициентами c_k. Пример в задаче 11.60.

Рассмотрим устойчивый четырехполюсник с передаточной функцией $T(\overline{p}) = U_2(\overline{p})/U_1(\overline{p})$ (рис. 11.5, *а*). Неустойчивым может оказаться четырехполюсник, образованный из устойчивого четырехполюсника после введения положительной обратной связи, как показано на рис. 11.5, *б*. Для проверки устойчивости последнего четырехполюсника можно применить следующий критерий Найквиста. В комплексной плоскости p по часовой стрелке обходится замкнутый кон-

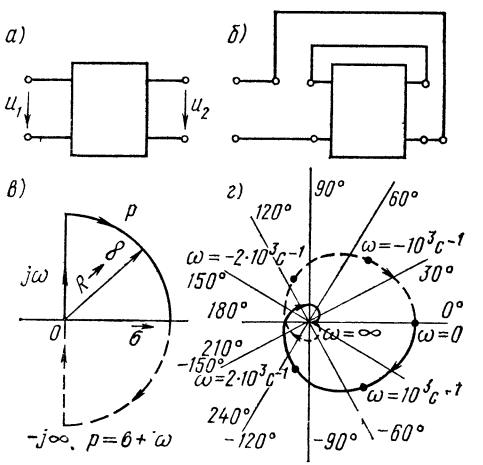


Рис. 11.5

* Вопрос о разложении полиномов в цепную дробь подробно освещен в гл. 14 [см., например, задачу 14.5].

тур (рис. 11.5, *в*), образованный мнимой осью $p = j\omega$ (ω изменяется от $-\infty$ до $+\infty$), которая замыкается по дуге окружности бесконечного радиуса ($R \to \infty$). При этом конец вектора, изображающего в комплексной плоскости комплексное число $T(p)$, описывает также замкнутую кривую — диаграмму Найквиста (рис. 11.5, *г*). Устойчивость при введении обратной связи (рис. 11.5, *б*) не нарушается тогда, когда диаграмма Найквиста для исходного четырехполюсника (рис. 11.5, *а*) (до введения обратной связи) не охватывает точки $p = 1$.

Примеры в задачах 11.61 и 11.62.

УПРАЖНЕНИЯ И ЗАДАЧИ

А. Параметры четырехполюсника. Т- и П-схемы замещения четырехполюсника

11.1. Найти A-параметры Т-образного четырехполюсника (рис. 11.6, *а*), если $R = 100$ Ом, $X_L = 200$ Ом, $X_C = 100$ Ом. Проверить выполнимость соотношения $\underline{A}_{11}\underline{A}_{22} - \underline{A}_{12}\underline{A}_{21} = 1$.

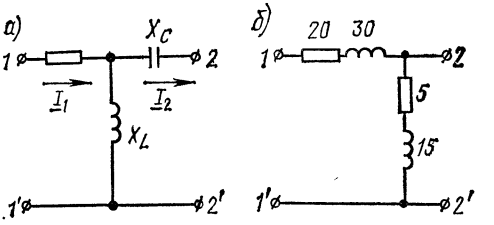


Рис. 11.6

Р е ш е н и е. Искомые A-параметры найдем по (11.6д):

$$\underline{A}_{11} = \left(\frac{\underline{U}_1}{\underline{U}_2}\right)_{\underline{I}_2=0} = \frac{\underline{U}_1}{\dfrac{\underline{U}_1}{R + jX_L} jX_L} = \frac{R + jX_L}{jX_L} = \frac{100 + j200}{j\,200} = 1 - j\,0{,}5.$$

Для определения параметра A_{12} предварительно найдем ток I_2 в режиме короткого замыкания:

$$(\underline{I}_2)_{\underline{U}_2=0} = -\frac{\underline{U}_1}{R + \dfrac{X_L X_C}{jX_L - jX_C}} \cdot \frac{jX_L}{jX_L - jX_C} = -\frac{jX_L}{X_L X_C + jR(X_L - X_C)};$$

$$\underline{A}_{12} = \left(\frac{\underline{U}_1}{-\underline{I}_2}\right)_{\underline{U}_2=0} = \frac{X_L X_C + jR(X_L - X_C)}{jX_L} = (50 - j100)\ \text{Ом};$$

$$\underline{A}_{21} = \left(\frac{\underline{I}_1}{\underline{U}_2}\right)_{\underline{I}_2=0} = \frac{I_1}{jX_L \underline{I}_1} = -j0{,}005\ \text{См}.$$

$$\underline{A}_{22} = \left(-\frac{\underline{I}_1}{\underline{I}_2}\right)_{\underline{U}_2=0} = \frac{\underline{I}_1}{\underline{I}_1 \dfrac{jX_L}{jX_L - jX_C}} = \frac{X_L - X_C}{X_L} = 0{,}5.$$

Те же результаты могут быть получены по формулам (11.7д).

Проверка. $\underline{A}_{11}\underline{A}_{22} - \underline{A}_{12}\underline{A}_{21} = (1 - j0{,}5)0{,}5 - (50 - j100) \times$ $\times (-j0{,}005) = 1$.

11.2. Для четырехполюсника задачи 11.1 вычислить $\underline{Y}$-, $\underline{Z}$-, $\underline{H}$- и $\underline{F}$-параметры.

11.3. Для четырехполюсника рис. 11.6, *б* вычислить $\underline{A}$-, $\underline{Z}$- и $\underline{Y}$-параметры. Значения сопротивлений в омах указаны на рисунке.

11.4. Найти комплексные сопротивления Т- и П-образных схем, эквивалентных четырехполюснику, параметры которого

$$\underline{A}_{11} = 0{,}6 + j0{,}1, \quad \underline{A}_{12} = (17 + j72) \text{ Ом}, \quad \underline{A}_{22} = 0{,}5 + j0{,}2.$$

Указание. Искомые сопротивления найти из формул (11.7д, е).

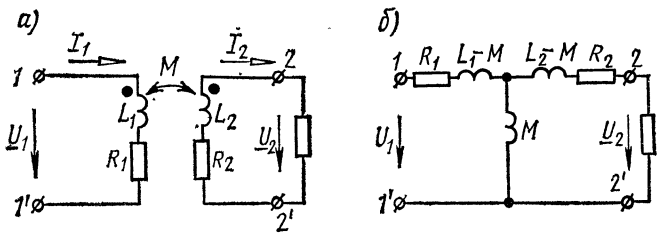


Рис. 11.7

11.5. Параметры трансформатора без стального сердечника (рис. 11.7, *а*): $R_1 = 2$ Ом, $L_1 = 0{,}5$ мГн, $R_2 = 3$ Ом и $L_2 = 0{,}72$ мГн. Коэффициент связи между обмотками трансформатора $k = 0{,}5$. Чему равны $\underline{A}$-параметры четырехполюсника, эквивалентного указанному трансформатору, при частоте $f = 10$ кГц? Определить комплексные сопротивления Т- и П-образных четырехполюсников, эквивалентных трансформатору.

Указание. Заданная схема может быть заменена эквивалентной схемой рис. 11.7, *б* (см. гл. 4, п. 5 основных положений).

11.6. Вычислить комплексные сопротивления при частоте $f = 10$ кГц для Т-образной схемы, эквивалентной автотрансформатору без стального сердечника (рис. 11.8), параметры которого $R_1 = 2$ Ом, $L_1 = 0{,}35$ мГн, $R_2 = 3$ Ом, $L_2 = 0{,}5$ мГн и $M = 0{,}25$ мГн.

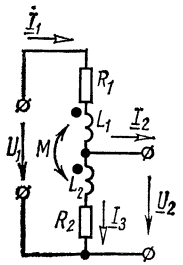


Рис. 11.8

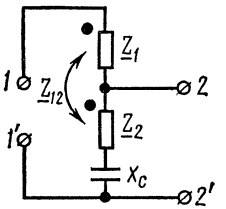


Рис. 11.9

Указание. Составить уравнения Кирхгофа, затем совместно решить их так, чтобы первичные напряжения и ток были выражены через вторичные напряжения и ток. Сравнив соответствующие коэффициенты полученных уравнений с (11.1 д), по-

лучить $\underline{A}$-параметры. Зная их, найти искомые сопротивления по формулам (11.7д).

11.7. В месте соединения воздушных и кабельных линий связи используются автотрансформаторы с конденсаторами (рис. 11.9). Вычислить $\underline{A}$-параметры четырехполюсника, если

$$\underline{Z}_1 = \underline{Z}_2 = (5 + j20)\ \text{Ом},\ \underline{Z}_{12} = j10\ \text{Ом},\ \underline{Z}_3 = -jX_C = -j30\ \text{Ом}.$$

Б. Входное сопротивление четырехполюсника

11.8. $\underline{A}$-параметры четырехполюсника имеют следующие значения (см. задачу 11.1): $\underline{A}_{11} = 1 - j0{,}5$; $\underline{A}_{21} = -0{,}005$ См, $\underline{A}_{22} = 0{,}5$. Определить сопротивления холостого хода и короткого замыкания со стороны первичных и вторичных зажимов. Проверить выполнимость соотношения $\underline{Z}_{1\text{х}} : \underline{Z}_{1\text{к}} = \underline{Z}_{2\text{х}} : \underline{Z}_{2\text{к}}$.

Указание. Из формулы (11.4) найти $\underline{A}_{12}$, а затем искомые сопротивления по (11.15).

11.9. Для схемы рис. 11.6, *б* вычислить входные сопротивления при холостом ходе и коротком замыкании двумя способами: непосредственным вычислением указанных сопротивлений; с помощью $\underline{A}$-параметров.

11.10. У несимметричного четырехполюсника со стороны первичных зажимов были измерены напряжения, токи и мощности при холостом ходе и коротком замыкании, а также со стороны вторичных зажимов — напряжение, ток и мощность при холостом ходе. Определить $\underline{A}$-параметры четырехполюсника, если измерения показали:

$$U_{1\text{х}} = 10\ \text{В},\quad I_{1\text{х}} = 316\ \text{мА},\quad P_{1\text{х}} = 3\ \text{Вт}\ (\varphi_{1\text{х}} > 0);$$

$$U_{1\text{к}} = 5\ \text{В},\quad I_{1\text{к}} = 139\ \text{мА},\quad P_{1\text{к}} = 0{,}576\ \text{Вт}\ (\varphi_{1\text{к}} > 0);$$

$$U_{2\text{х}} = 6\ \text{В},\quad I_{2\text{х}} = 600\ \text{мА},\quad P_{2\text{х}} = 0\ (\varphi_{2\text{х}} < 0).$$

Указание. Для каждого режима работы четырехполюсника найти полное сопротивление, его фазу и комплексное сопротивление по формулам $Z = U/I$, $\varphi = \operatorname{arctg} P/UI$, $\underline{Z} = Ze^{j\varphi}$. Для определения $\underline{A}$-параметров использовать формулы (11.16).

11.11. Для симметричного четырехполюсника опыты холостого хода и короткого замыкания дали результаты: $U_{1\text{х}} = 10$ В, $I_{1\text{х}} = 1$ А, $P_{1\text{х}} = 10$ Вт, $U_{1\text{к}} = 10$ В, $I_{1\text{к}} = 0{,}8$ А, $P_{1\text{к}} = 8$ Вт.

Вычислить $\underline{A}$-параметры этого четырехполюсника и начертить Т-образную схему замещения.

11.12. Рассчитать входное сопротивление со стороны зажимов *1—1′* четырехполюсника задачи 11.1 при нагрузке зажимов *2—2′* на сопротивление $\underline{Z}_{\text{н}} = R_{\text{н}} = 200$ Ом. То же со стороны зажимов *2—2′* при нагрузке со стороны зажимов *1—1′* на сопротивление $Z_{\text{и}} = R_{\text{и}} = 150$ Ом.

В. Схемы соединения четырехполюсников

11.13. Два одинаковых четырехполюсника задачи 11.1 соединены каскадно по схемам, изображенным на рис. 11.10, *а*, *б*, *в*. Для каждого из случаев определить $\underline{A}$-параметры сложного четырехполюсника.

Р е ш е н и е. а. Выходные зажимы первого четырехполюсника соединены с входными зажимами второго (рис. 11.10, *а*).

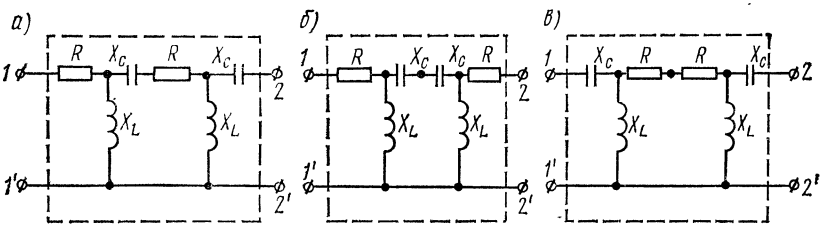


Рис. 11.10

При каскадном соединении четырехполюсников матрица $[\underline{A}_a]$ результирующего четырехполюсника равна произведению соответствующих матриц соединяемых четырехполюсников*:

$$[\underline{A}_a] = [\underline{A}'][\underline{A}''] = \begin{bmatrix} \underline{A}'_{11} & \underline{A}'_{12} \\ \underline{A}'_{21} & \underline{A}'_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{A}''_{11} & \underline{A}''_{12} \\ \underline{A}''_{21} & \underline{A}''_{22} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \underline{A}'_{11}\underline{A}''_{11} + \underline{A}'_{12}\underline{A}''_{21} & \underline{A}'_{11}\underline{A}''_{12} + \underline{A}'_{12}\underline{A}''_{22} \\ \underline{A}'_{21}\underline{A}''_{11} + \underline{A}'_{22}\underline{A}''_{21} & \underline{A}'_{21}\underline{A}''_{12} + \underline{A}'_{22}\underline{A}''_{22} \end{bmatrix};$$

$$\underline{A}_{11a} = \underline{A}'_{11}\underline{A}''_{11} + \underline{A}'_{12}\underline{A}''_{21} = (1 - j0{,}5)^2 + (50 - j100) \times (-j0{,}005) =$$

$$= 0{,}25 - j1{,}25;$$

$$\underline{A}_{12a} = \underline{A}'_{11}\underline{A}''_{12} + \underline{A}'_{12}\underline{A}''_{22} = (25 - j175) \text{ Ом};$$

$$\underline{A}_{21a} = \underline{A}'_{21}\underline{A}''_{11} + \underline{A}'_{22}\underline{A}''_{21} = -(25 + j75) \cdot 10^{-4} \text{ См};$$

$$\underline{A}_{22a} = \underline{A}'_{21}\underline{A}''_{12} + \underline{A}'_{22}\underline{A}''_{22} = -0{,}25 - j0{,}25.$$

б. Выходные зажимы первого четырехполюсника соединены с выходными зажимами второго (рис. 11.10, *б*).

В этом случае в матрице второго четырехполюсника коэффициенты $\underline{A}'_{11}$ и $\underline{A}''_{22}$ меняются местами:

$$[\underline{A}_б] = [\underline{A}'][\underline{A}''] = \begin{bmatrix} \underline{A}'_{11} & \underline{A}'_{12} \\ \underline{A}'_{21} & \underline{A}'_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{A}''_{22} & \underline{A}''_{12} \\ \underline{A}''_{21} & \underline{A}''_{11} \end{bmatrix} =$$

---

* См. приложение 3.

$$= \begin{bmatrix} \underline{A}'_{11}\underline{A}''_{22} + \underline{A}''_{12}\underline{A}''_{21} & \underline{A}'_{11}\underline{A}''_{12} + \underline{A}'_{12}\underline{A}''_{11} \\ \underline{A}'_{21}\underline{A}''_{22} + \underline{A}'_{22}\underline{A}''_{21} & \underline{A}'_{21}\underline{A}''_{12} + \underline{A}'_{22}\underline{A}''_{11} \end{bmatrix};$$

$$\underline{A}_{11б} = \underline{A}'_{11}\underline{A}'_{22} + \underline{A}'_{12}\underline{A}''_{21} = -j0{,}5 = \underline{A}_{22б};$$

$$\underline{A}_{12б} = \underline{A}'_{11}\underline{A}''_{12} + \underline{A}'_{12}\underline{A}''_{11} = -j250 \text{ Ом};$$

$$\underline{A}_{21б} = \underline{A}'_{21}\underline{A}''_{22} + \underline{A}'_{22}\underline{A}''_{21} = -j0{,}005 \text{ См}.$$

в. Входные зажимы первого четырехполюсника соединены с входными зажимами второго (рис. 11.10, *в*).

В этом случае в матрице первого четырехполюсника коэффициенты $\underline{A}'_{11}$ и $\underline{A}''_{22}$ меняются местами:

$$[\underline{A}_в] = [\underline{A}'][\underline{A}''] = \begin{bmatrix} \underline{A}'_{22} & \underline{A}'_{12} \\ \underline{A}'_{21} & \underline{A}'_{11} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{A}''_{11} & \underline{A}''_{12} \\ \underline{A}''_{21} & \underline{A}''_{22} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \underline{A}'_{22}\underline{A}''_{11} + \underline{A}'_{12}\underline{A}''_{21} & \underline{A}'_{22}\underline{A}''_{12} + \underline{A}'_{12}\underline{A}''_{22} \\ \underline{A}'_{21}\underline{A}''_{11} + \underline{A}'_{11}\underline{A}''_{21} & \underline{A}'_{21}\underline{A}''_{21} + \underline{A}'_{11}\underline{A}''_{22} \end{bmatrix};$$

$$\underline{A}_{11в} = -j0{,}5 = \underline{A}_{22в}, \quad \underline{A}_{12в} = (50 - j100) \text{ Ом},$$

$$\underline{A}_{21в} = (-0{,}005 - j0{,}01) \text{ См}.$$

11.14. Решить предыдущую задачу, применив ее условия к двум одинаковым четырехполюсникам рис. 11.6.

11.15. Два одинаковых четырехполюсника задачи 11.1 соединены каскадно, но так, что выходные зажимы первого перекрещены (рис. 11.11). Определить $\underline{A}$-параметры результирующего четырехполюсника.

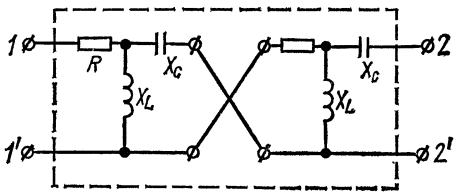


Рис. 11.11

Указание. При перекрещивании выходных зажимов первого четырехполюсника у всех его $\underline{A}$-параметров знаки меняются на обратные.

11.16. Два одинаковых четырехполюсника из задачи 11.1 соединены: а) последовательно; б) параллельно; в) последовательно-параллельно; г) параллельно-последовательно. Для каждого из случаев начертить схему регулярного соединения и определить $\underline{A}$-параметры сложного четырехполюсника.

11.17. Дан четырехполюсник, $\underline{A}$-параметры которого известны. Определить $\underline{A}$-параметры результирующего четырехполюсника, обведенного штриховой линией на рис. 11.12, *а — г*.

11.18. Разорванный четырехполюсник, параметры которого $R_1 = 150$ Ом, $R_2 = 200$ Ом, соединен по схеме рис. 11.13, *а* с четырех-

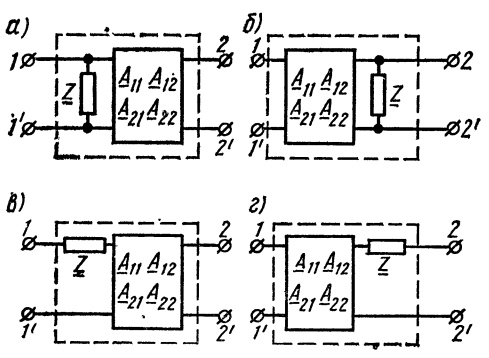


Рис. 11.12

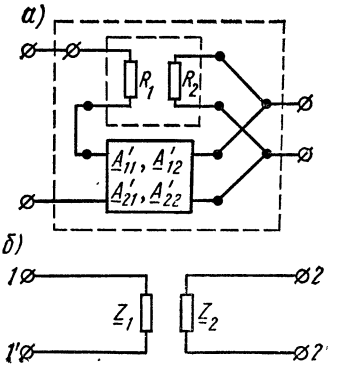


Рис. 11.13

полюсником задачи 11.1. Найти $\underline{A}$-параметры сложного четырехполюсника.

Примечание. Разорванным называется четырехполюсник, входные и выходные зажимы которого не связаны между собой. Схема разорванного четырехполюсника приведена на рис. 11.13, *б*. Его параметры:

$$\underline{Y}_{11} = 1/\underline{Z}_1, \quad \underline{Y}_{12} = \underline{Y}_{21} = 0, \quad \underline{Y}_{22} = 1/\underline{Z}_2;$$

$$\underline{Z}_{11} = \underline{Z}_1, \quad \underline{Z}_{12} = \underline{Z}_{21} = 0, \quad \underline{Z}_{22} = \underline{Z}_2;$$

$$\underline{H}_{11} = \underline{Z}_1, \quad \underline{H}_{12} = \underline{H}_{21} = 0, \quad \underline{H}_{22} = 1/\underline{Z}_2.$$

Указание. Соединение, показанное на рис. 11.13, *а*, является последовательно-параллельным соединением четырехполюсников. Поэтому матрица H результирующего четырехполюсника должна быть равна сумме $\underline{H}$-матриц соединяемых четырехполюсников.

11.19. Четырехполюсник задачи 11.1 соединен каскадно с идеальным трансформатором, коэффициент трансформации которого $1 : n = 0{,}5$ (рис. 11.14, *а* и *б*). Найти $\underline{A}$-параметры результирующего четырехполюсника.

Примечание. Следует обратить внимание на то, что только при $n = 1$ матрица $[\underline{A}]$ четырехполюсника не изменяется, независимо от того, где включен идеальный трансформатор — на входе или на выходе.

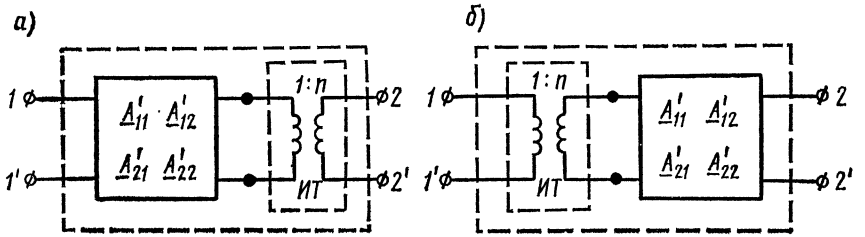


Рис. 11.14

Г. Характеристические параметры, их связь с другими параметрами четырехполюсника. Повторные параметры

11.20. Для четырехполюсника задачи 11.1 найти характеристические параметры $\underline{Z}_{1c}$, $\underline{Z}_{2c}$, $\underline{\Gamma}$.

Решение. Способ 1. Использование $\underline{A}$-параметров четырехполюсника. По формулам (11.9) получим

$$\underline{Z}_{1c} = \sqrt{\frac{\underline{A}_{11}\underline{A}_{12}}{\underline{A}_{21}\underline{A}_{22}}} = \sqrt{\frac{(1 - j0{,}5)(50 - j100)}{-j0{,}005 \cdot 0{,}5}} = \sqrt{5 \cdot 10^4} = 224 \text{ Ом};$$

$$\underline{Z}_{2c} = \sqrt{\frac{\underline{A}_{22}\underline{A}_{12}}{\underline{A}_{21}\underline{A}_{11}}} = \sqrt{\frac{0{,}5(50 - j100)}{-j\,0{,}005\,(1 - j0{,}5)}} =$$

$$= \sqrt{\frac{56e^{-j63°30'}}{0{,}0056e^{-j116°30'}}} = \sqrt{10^4 e^{j53°}} = 100e^{j26°30'} \text{ Ом}.$$

Из формулы (11.10):

$$e^{\underline{\Gamma}} = e^{A} \cdot e^{jB} = \sqrt{\underline{A}_{11}\underline{A}_{22}} + \sqrt{\underline{A}_{12}\underline{A}_{21}} =$$

$$= \sqrt{(1 - j0{,}5)\ 0{,}5} + \sqrt{-j0{,}005\,(50 - j100)} = \sqrt{0{,}56e^{-j26°30'}} +$$

$$+ \sqrt{0{,}56e^{-j153°30'}} = 0{,}748e^{-j13°15'} + 0{,}748e^{-j76°45'} =$$

$$= 0{,}902 - j0{,}902 = 1{,}275e^{-j45°};$$

$$e^{A} = 1{,}275, \quad A = \ln 1{,}275 = 0{,}243 \text{ Нп} = 2{,}1 \text{ дБ};$$

$$e^{jB} = e^{-j45°}, \quad B = -45° = -0{,}785 \text{ рад};$$

$$\underline{\Gamma} = A + jB = 0{,}243 - j0{,}785\ .$$

Способ 2. Использование параметров холостого хода и короткого замыкания (см. ответ к задаче 11.8). По формулам (11.13) найдем:

$$\underline{Z}_{1c} = \sqrt{\underline{Z}_{1x}\underline{Z}_{1k}} = \sqrt{(100 + j200)(100 - j200)} = 224 \text{ Ом};$$

$$\underline{Z}_{2c} = \sqrt{\underline{Z}_{2x}\underline{Z}_{2k}} = \sqrt{j100\,(80 - j60)} = \sqrt{10^4 e^{j53°}} =$$

$$= 100e^{j26°30'} \text{ Ом, а по формуле (11.14)}$$

$$\operatorname{th} \underline{\Gamma} = \sqrt{\frac{\underline{Z}_{2k}}{\underline{Z}_{2x}}} = \sqrt{\frac{80 - j60}{j100}} = \sqrt{e^{-j127°}} = e^{-j63°30'} =$$

$$= 0{,}446 - j0{,}895.$$

Отсюда для определения $\underline{\Gamma}$ поступим так:

$$\operatorname{th}\underline{\Gamma} = \frac{\operatorname{sh}\underline{\Gamma}}{\operatorname{ch}\underline{\Gamma}} = \frac{e^{\underline{\Gamma}} - e^{-\underline{\Gamma}}}{e^{\underline{\Gamma}} + e^{-\underline{\Gamma}}} \cdot \frac{e^{\underline{\Gamma}}}{e^{-\underline{\Gamma}}} = \frac{e^{2\underline{\Gamma}} - 1}{e^{2\underline{\Gamma}} + 1},$$

откуда

$$e^{2\underline{\Gamma}} = e^{2A} e^{j2B} = \frac{1 + \operatorname{th}\underline{\Gamma}}{1 - \operatorname{th}\underline{\Gamma}} = \frac{1 + 0{,}446 - j0{,}895}{1 - 0{,}446 + j0{,}895} = 1{,}63e^{-j90°};$$

$$e^{2A} = 1{,}63, \quad 2A = \ln 1{,}63 = 0{,}486, \quad A = 0{,}243 \text{ Нп};$$

$$e^{j2B} = e^{-j90°}, \quad 2B = -90°, \quad B = -45° = -0{,}785 \text{ рад}.$$

11.21. Определить характеристические параметры четырехполюсника рис. 12.6.

11.22. Известны характеристические параметры четырехполюсника: $\underline{Z}_{1c} = 224$ Ом, $\underline{Z}_{2c} = 100\, e^{j26°30'}$ Ом, $\underline{\Gamma} = 0{,}244 - j0{,}785$. Найти его $\underline{A}$-параметры.

Р е ш е н и е. Искомые параметры найдем по формулам (11.11). Для этого вначале вычислим $\operatorname{sh}\underline{\Gamma}$ и $\operatorname{ch}\underline{\Gamma}$ (см. приложение 2):

$$\operatorname{sh}\underline{\Gamma} = \operatorname{sh}(0{,}244 - j\,0{,}785) = \operatorname{sh}0{,}244 \cdot \cos(-0{,}785) + j \operatorname{ch}0{,}244 \times$$

$$\times \sin(-0{,}785) = 0{,}243 \cdot 0{,}707 + j1{,}032(-0{,}707) =$$

$$= 0{,}172 - j0{,}73 = 0{,}75e^{-j76°45'};$$

$$\operatorname{ch}\underline{\Gamma} = \operatorname{ch}(0{,}244 - j0{,}785) = \operatorname{ch}0{,}244 \cos(-0{,}785) +$$

$$+ j \operatorname{sh}0{,}244 \sin(-0{,}785) = 0{,}75e^{-j13°15'};$$

$$\underline{A}_{11} = \sqrt{\frac{\underline{Z}_{1c}}{\underline{Z}_{2c}}} \operatorname{ch}\underline{\Gamma} = \sqrt{\frac{224}{100e^{j26°30'}}} \cdot 0{,}75e^{-j13°15'} = 1{,}12e^{-j26°30'};$$

$$\underline{A}_{12} = 112e^{-j63°30'} \text{ Ом}; \quad \underline{A}_{21} = -j0{,}005 \text{ См}; \quad \underline{A}_{22} = 0{,}5.$$

11.23. Определить $\underline{A}$-параметры симметричного четырехполюсника, если

$$\underline{Z}_c = 680e^{j3°26'} \text{ Ом и } \underline{\Gamma} = 18{,}35e^{j86°15'}.$$

11.24. Для несимметричного четырехполюсника задачи 11.1 найти повторные сопротивления.

П р и м е ч а н и е. Повторным сопротивлением называется такое сопротивление нагрузки, при котором входное сопротивление равно этому нагрузочному.

11.25. При каком сопротивлении нагрузки $\underline{Z}_н$, подключенной ко вторичным зажимам симметричного четырехполюсника рис. 11.10,*б*, входное сопротивление $\underline{Z}_{1вх}$ равно $\underline{Z}_н$?

11.26. Параметры четырехполюсника $\underline{A}_{11} = 1{,}3 + j0{,}2$, $\underline{A}_{21} = 0{,}05$ См, $\underline{A}_{22} = 1 - j0{,}5$. При каком активном сопротивлении нагрузки напряжение $\underline{U}_1$ и ток $\underline{I}_1$ совпадают по фазе?

Д. Эквивалентность четырехполюсников

11.27. Показать, что четырехполюсник задачи 11.1 и четырехполюсник, изображенный на рис. 11.15, эквивалентны. Величины сопротивлений на рисунке даны в омах.

11.28. Показать, что четырехполюсник задачи 11.1 не может быть физически реализован в виде эквивалентного П-образного четырехполюсника.

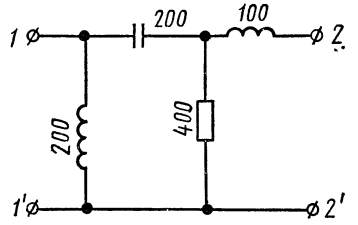


Рис. 11.15

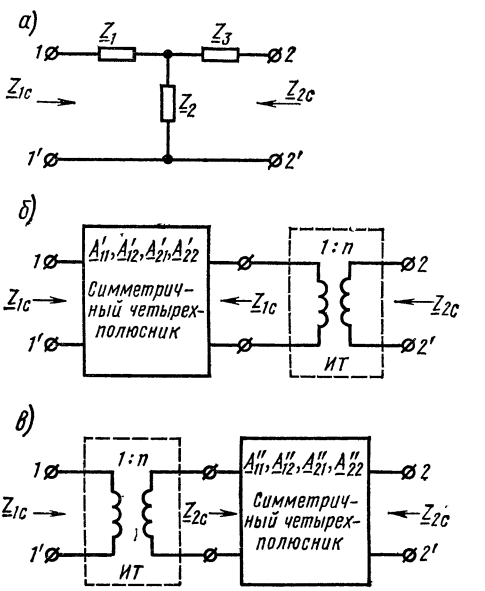


Рис. 11.16

11.29. Найти сопротивления $\underline{Z}_a$ и $\underline{Z}_b$ мостового четырехполюсника (см. рис. 7 в табл. 11.2), эквивалентного симметричному Т-образному четырехполюснику (см. рис. 5. в табл. 11.2), элементы которого $\underline{Z}_{1т} = \underline{Z}_{3т}$, $\underline{Z}_{2т}$ известны.

11.30. Несимметричный четырехполюсник рис. 11.16, *а* имеет сопротивления: $\underline{Z}_1 = (100 + j200)$ Ом, $\underline{Z}_2 = 200$ Ом, $\underline{Z}_3 = (1000 + j800)$ Ом. Преобразовать его в эквивалентный симметричный четырехполюсник, соединенный каскадно с идеальным трансформатором.

Р е ш е н и е. Рассмотрим два варианта преобразования.

1. Идеальный трансформатор присоединен к выходным зажимам симметричного четырехполюсника (рис. 11.16, *б*).

Коэффициенты матрицы $[A]$ заданного несимметричного четырехполюсника находим по формулам (11.7 д):

$$\underline{A}_{11} = 1{,}5 + j1; \quad \underline{A}_{12} = 800\,(1 + j3) \text{ Ом}, \quad \underline{A}_{21} = 0{,}005 \text{ См},$$

$$\underline{A}_{22} = 6 + j4.$$

Матрица $[\underline{A}]$ несимметричного четырехполюсника должна быть равна $\underline{A}$-матрице сложного четырехполюсника:

$$\begin{bmatrix} \underline{A}_{11}\underline{A}_{12} \\ \underline{A}_{21}\underline{A}_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{A}'_{11}\underline{A}'_{12} \\ \underline{A}'_{21}\underline{A}'_{11} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{n} & 0 \\ 0 & n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{A}'_{11}\frac{1}{n} & \underline{A}'_{12}n \\ \underline{A}'_{21}\frac{1}{n} & \underline{A}'_{11}n \end{bmatrix}.$$

Отсюда следует

$$\underline{A}_{11}\frac{1}{n} = \underline{A}_{11}\,(1),\quad \underline{A}'_{12}n = \underline{A}_{12}\,(2),\quad \underline{A}'_{21}\frac{1}{n} = \underline{A}_{21}\,(3),\quad \underline{A}'_{11}n = \underline{A}_{22}\,(4).$$

Путем деления формулы (4) на (1) получаем

$$n^2 = \frac{\underline{A}_{22}}{\underline{A}_{11}} = \frac{6+j4}{1{,}5+j1} = 4,\quad n = 2.$$

Из соотношений (1), (2), (3) следует:

$$\underline{A}'_{11} = \underline{A}'_{22} = n\underline{A}_{11} = 2\,(1{,}5 + j1) = 3 + j2;$$

$$\underline{A}'_{12} = \frac{\underline{A}_{12}}{n} = 400\,(1 + j3)\ \text{Ом};\quad \underline{A}'_{21} = n\underline{A}_{21} = 0{,}01\ \text{См}.$$

2. Идеальный трансформатор присоединен к входным зажимам симметричного четырехполюсника (рис. 11.16, *в*), тогда

$$\begin{bmatrix} \underline{A}_{11}\underline{A}_{12} \\ \underline{A}_{21}\underline{A}_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{n} & 0 \\ 0 & n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{A}'_{11} & \underline{A}'_{12} \\ \underline{A}'_{21} & \underline{A}'_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{n}\underline{A}'_{11} & \frac{1}{n}\underline{A}'_{12} \\ n\underline{A}'_{21} & n\underline{A}'_{11} \end{bmatrix};$$

$$\frac{1}{n}\underline{A}'_{11} = \underline{A}_{11},\quad \underline{A}'_{12}/n = \underline{A}_{12},\quad n\underline{A}'_{21} = \underline{A}_{21},\quad n\underline{A}'_{11} = \underline{A}_{22};$$

$$n^2 = \underline{A}_{22}/\underline{A}_{11} = 4,\quad n = 2;\quad \underline{A}'_{11} = \underline{A}'_{22} = n\underline{A} = 3 + j2;$$

$$\underline{A}'_{12} = n\underline{A}_{12} = 1600\,(1 + j3)\ \text{Ом};\quad \underline{A}'_{21} = \underline{A}_{21}/n = 0{,}0025\ \text{См}.$$

Е. Коэффициенты отражения, эхо. Вносимое и рабочее ослабление. Коэффициенты передачи напряжения, тока

11.31. Четырехполюсник задачи 11.1 включен между источником, сопротивление которого $\underline{Z}_{\text{и}} = R_{\text{и}} = 150$ Ом, и нагрузкой $\underline{Z}_{\text{н}} =$

$= R_н = 200$ Ом. Определить коэффициенты отражения со стороны нагрузки $\underline{p}_н$ и источника $\underline{p}_и$. Вычислить входное сопротивление четырехполюсника $\underline{Z}_{1вх}$ и его отклонение (по модулю в процентах) от характеристического сопротивления $\underline{Z}_{1c}$. Найти ослабление эха $A_{эхо}$. Найти вносимое $A_{вн}$ и рабочее $A_р$ ослабление. Подсчитать коэффициенты передачи напряжения T_U и тока T_I.

Р е ш е н и е. Требуемые в дальнейших расчетах величины $\underline{Z}_{1c}$, $\underline{Z}_{2c}$ и $\underline{\Gamma}$ были найдены в решении задачи 11.20. По формулам (11.22) находим:

$$\underline{p}_н = \frac{\underline{Z}_н - \underline{Z}_{2c}}{\underline{Z}_н + \underline{Z}_{2c}} = \frac{200 - 100e^{j26°30'}}{200 + 100e^{j26°30'}} = 0{,}407e^{-j30°45'};$$

$$\underline{p}_и = \frac{\underline{Z}_и - \underline{Z}_{1c}}{\underline{Z}_и + \underline{Z}_{1c}} = \frac{150 - 224}{150 + 224} = -0{,}198.$$

Входное сопротивление (см. ответ к задаче 11.12):

$$\underline{Z}_{1вх} = 260 + j120 = 286e^{j24°50'} \text{ Ом}.$$

Отклонение входного сопротивления от характеристического по модулю в процентах равно

$$\frac{|\underline{Z}_{1вх}| - |\underline{Z}_{1c}|}{|\underline{Z}_{1c}|} 100 = \frac{286 - 224}{224} 100 = 27{,}7\%.$$

Ослабление эха $A_{эхо}$ — величина, обратная модулю натурального логарифма ρ:

$$\rho = \frac{\underline{Z}_и - \underline{Z}_{1вх}}{\underline{Z}_и + \underline{Z}_{вх}} = \frac{150 - (260 + j120)}{150 + 260 + j120} = 0{,}381e^{-j116°10'};$$

$$A_{эхо} = \ln \frac{1}{\rho} = \ln \frac{1}{0{,}381} = \ln 2{,}62 = 0{,}965 \text{ Нп} = 8{,}4 \text{ дБ}.$$

Рабочее и вносимое ослабления находим по (11.26б) и (11.28). Для этого предварительно вычисляем значения отдельных слагаемых, входящих в эти выражения; $A = 0{,}243$ Нп найдено в решении задачи 11.20:

$$A_1 = \ln \left| \frac{\underline{Z}_и + \underline{Z}_{1c}}{2\sqrt{\underline{Z}_и \underline{Z}_{1c}}} \right| = \ln \left| \frac{150 + 224}{2\sqrt{150 \cdot 224}} \right| = \ln 1{,}02 = 0{,}02 \text{ Нп};$$

$$A_2 = \ln\left|\frac{\underline{Z}_н + \underline{Z}_{2c}}{2\sqrt{\underline{Z}_н \underline{Z}_{2c}}}\right| = \ln\left|\frac{200 + 89{,}5 + j44{,}6}{2\sqrt{200 \cdot 100 e^{j26°30'}}}\right| =$$

$$= \ln\left|\frac{289{,}5 + j44{,}6}{2 \cdot 141 e^{j13°15'}}\right| = \ln\frac{292{,}9}{282{,}8} = \ln 1{,}0356 = 0{,}035 \text{ Нп}.$$

$$A_3 = \ln\left|1 - \underline{p}_и \underline{p}_н e^{-2\underline{\Gamma}}\right| = \ln\left|1 + 0{,}27 \cdot 0{,}407 e^{-j30°45'} \times\right.$$

$$\left. \times e^{-(0{,}243 - j0{,}785)}\right| = \ln\left|1 + 0{,}0675 e^{j59°15'}\right| =$$

$$= \ln|\,1{,}0345 + j0{,}058\,| = \ln 1{,}036 = 0{,}035 \text{ Нп};$$

$$A_4 = \ln\left|\frac{\underline{Z}_и + \underline{Z}_н}{2\sqrt{\underline{Z}_и \underline{Z}_н}}\right| = \ln\left|\frac{150 + 200}{2\sqrt{150 \cdot 200}}\right| = \ln 1{,}01 = 0{,}01 \text{ Нп}.$$

Итак,

$$A_{вн} = A + A_1 + A_2 + A_3 - A_4 = 0{,}243 + 0{,}02 + 0{,}035 + 0{,}035 -$$
$$- 0{,}01 = 0{,}323 \text{ Нп} = 2{,}8 \text{ дБ}.$$

Рабочее ослабление

$$A_р = A_{вн} + A_4 = 0{,}323 + 0{,}01 = 0{,}333 \text{ Нп} = 2{,}9 \text{ дБ}.$$

Коэффициент передачи напряжения и тока находим по формулам табл. 11.4:

$$T_U = \frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_1} = \frac{\underline{Z}_н}{\underline{A}_{11}\underline{Z}_н + \underline{A}_{12}} = \frac{200}{(1 - j0{,}5)\,200 + 50 - j100} = 0{,}625 e^{j38°40'};$$

$$T_I = \frac{\underline{I}_2}{\underline{I}_1} = \frac{1}{\underline{A}_{21}\underline{Z}_н + \underline{A}_{22}} = \frac{1}{-j0{,}005 \cdot 200 + 0{,}5} = 0{,}894 e^{j63°30'}.$$

11.32. Решить задачу 11.31, применив ее условие к четырехполюснику схемы рис. 11.6, который включен между $Z_и = R_и = 6$ Ом и $Z_н = R_н = 10$ Ом.

11.33. Два симметричных четырехполюсника, параметры которых $\underline{A}'_{11}$, $\underline{A}'_{12}$, $\underline{A}'_{21}$, $\underline{A}'_{22}$ и $\underline{A}''_{11}$, $\underline{A}''_{12}$, $\underline{A}''_{21}$, $\underline{A}''_{22}$, соединены каскадно. К входным зажимам первого четырехполюсника подведен источник напряжения с внутренним сопротивлением $\underline{Z}_и$, а к выходным зажимам второго присоединена нагрузка с сопротивлением $\underline{Z}_н$.

Определить входное сопротивление со стороны источника, коэффициенты передачи напряжения и тока, если характеристические сопротивления четырехполюсников равны ($\underline{Z}_{1c} = \underline{Z}_{2c} = \underline{Z}_c$) и выполняются условия согласования на входе и выходе ($\underline{Z}_и = \underline{Z}_{1c} = \underline{Z}_н = \underline{Z}_{2c} = \underline{Z}_c$).

11.34. Вычислить рабочее и вносимое ослабления четырехполюсника (см. рис. 11.2, *а*), если $E_и = 3$ В, $Z_и = 600$ Ом, $U_2 = 0{,}1$ В и $Z_н = 400$ Ом.

11.35. Определить рабочее и вносимое ослабления четырехполюсника рис. 11.2, *а*, если $I_1 = 1$ мА, $Z_и = Z_{1c} = 10^3$ Ом, $I_2 = 0{,}08$ мА, $Z_н = Z_{2c} = 10^5$ Ом.

Ж. Удлинители

11.36. Найти значения сопротивлений, требующихся для составления Т-, П-образных и Т-образного мостового симметричных уравновешенных удлинителей, имеющих характеристическое сопротивление 500 Ом и ослабление 1 Нп.

11.37. На рис. 11.17, *а* изображен симметричный уравновешенный Т-образный удлинитель, используемый в трактах аппаратуры телемеханики КП-59, собранный из активных сопротивлений $R_1/4 = 138,5$ Ом, $R_2 = 510$ Ом.

Определить характеристическое сопротивление и ослабление удлинителя. Рассчитать его входное сопротивление при нескольких значениях нагрузки $R_н$, изменяющейся в пределах от $R_н = 0{,}5\,Z_{2c}$ до $R_н = 2Z_{2c}$, и построить график зависимости входного сопротивления удлинителя от нагрузки, указав на нем точки, соответствующие $R_н = Z_{2c}$, а также режимам холостого хода и короткого замыкания.

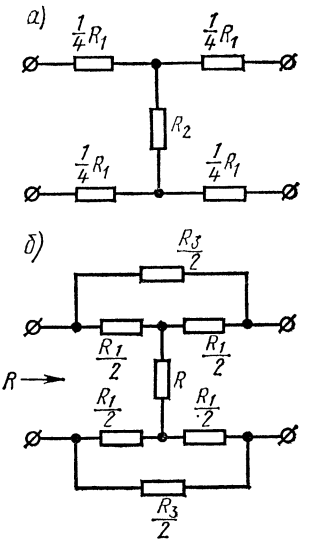


Рис. 11.17

11.38. Для изменения степени подавления сигналов используют удлинитель, входное сопротивление которого должно оставаться постоянным при регулировании уровня сигнала. Рассчитать симметричный уравновешенный Т-образный мостовой удлинитель (рис. 11.17, *б*) с входным сопротивлением $R = 600$ Ом в двух случаях:

1) уровень напряжения на выходе должен быть меньше, чем на входе, на 20 дБ; 2) на 40 дБ.

При расчете положить, что удлинитель имеет два переменных сопротивления R_2 и R_3 и что $R_1^2 = R_2R_3$. Для каждого из рассчитанных случаев указать, во сколько раз напряжение на выходе меньше, чем напряжение на входе.

Р е ш е н и е.

1. Расчет ведем по формулам (11.29в):

$$A = 20 \text{ дБ} = 0{,}115 \cdot 20 \text{ Нп} = 2{,}3 \text{ Нп}; \quad R_1 = R = 600 \text{ Ом};$$

$$R_2 = \frac{R_1}{2}\left(\operatorname{cth}\frac{A}{2} - 1\right) = 300\,(\operatorname{cth} 1{,}15 - 1) = 67 \text{ Ом};$$

$$R_3 = \frac{R_1^2}{R_2} = \frac{600^2}{67} = 5380 \text{ Ом}; \quad \frac{U_2}{U_1} = e^{-A} = e^{-2{,}3} = 0{,}1.$$

2. $A = 40$ дБ $= 0{,}115 \cdot 40$ Нп $= 4{,}6$ Нп; $R_1 = R = 600$ Ом; $R_2 = 6{,}06$ Ом; $R_3 = 5{,}94 \cdot 10^4$ Ом; $U_2/U_1 = 0{,}01$.

3. Трансформаторы для согласования сопротивлений четырехполюсника и нагрузки

11.39. Определить коэффициент трансформации идеального трансформатора, включенного между источником с сопротивлением $\underline{Z}_и = 200$ Ом и нагрузкой с сопротивлением $\underline{Z}_н = 150$ Ом для согласования модулей сопротивлений (рис. 11.18). Показать, что при найденной величине коэффициента трансформации происходит согласование.

Р е ш е н и е. Коэффициент трансформации [см. формулу (11.31)]

$$n = \sqrt{\underline{Z}_н/\underline{Z}_и} = \sqrt{150/200} = 0{,}865.$$

Входное сопротивление трансформатора

$$Z_{вх} = \frac{A_{11}Z_н + A_{12}}{A_{21}Z_н + A_{22}} = \frac{\frac{1}{n}Z_н + 0}{0\,Z_н + n} = \frac{Z_н}{n^2} = \frac{150}{0{,}865^2} = 200 \text{ Ом}.$$

Таким образом, $Z_{вх} = Z_и = 200$ Ом.

11.40. Рассчитать выходной трансформатор усилителя, работающего в диапазоне частот 100—4000 Гц. Внутреннее сопротивление

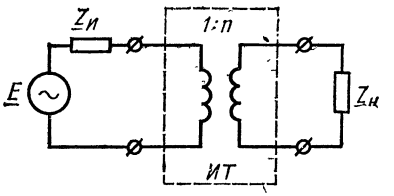


Рис. 11.18

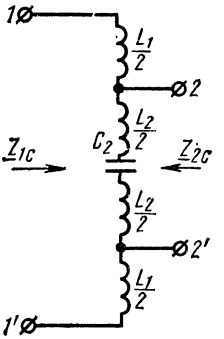


Рис. 11.19

усилителя $R_i = 10^4$ Ом, сопротивление нагрузки $R_н = 10^3$ Ом. При расчете принять, что постоянная составляющая рабочего ослабления трансформатора $a_1 = 0{,}44$ дБ, а переменные составляющие рабочего ослабления на нижней и верхней частотах $a_2 = a_3 = 1$ дБ.

Указание. Использовать формулы (11.35).

11.41. Рассчитать автотрансформатор (рис. 11.19) для согласования модуля волнового сопротивления воздушной линии $|Z_{в1}| = 600$ Ом с модулем волнового сопротивления кабеля $|Z_{в2}| = 200$ Ом в диапазоне частот 300 — 10 000 Гц.

Указание. Характеристические сопротивления автотрансформатора: $Z_{1c} = |Z_{в1}| = 600$ Ом, $Z_{2c} = |Z_{в2}| = 200$ Ом.

Расчет параметров автотрансформатора ведется по формулам

$$n = \sqrt{Z_{1c}/Z_{2c}} - 1; \quad L_1 = \frac{n}{\omega}\sqrt{Z_{1c}/Z_{2c}};$$

$$L_2 = L_1/n^2; \quad C_2 = 1/\omega^2 L_2.$$

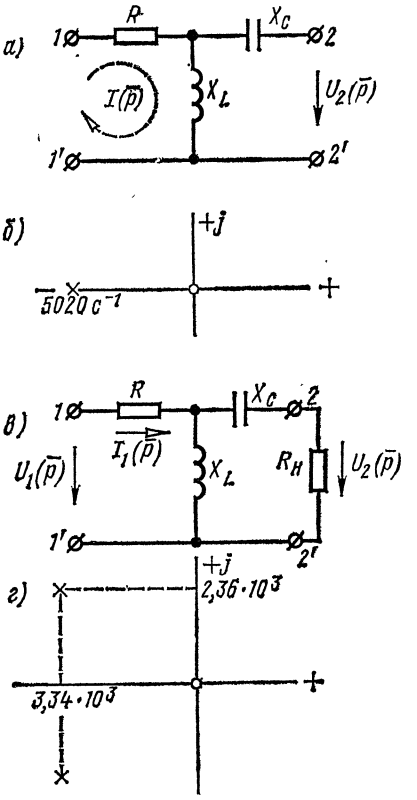


Рис. 11.20

И. Полюсно-нулевое изображение передаточных и входной функций. Минимально- и неминимально-фазовые четырехполюсники

11.42. Четырехполюсник задачи 11.1 используется на частоте $f = 1600$ Гц. Найти передаточную функцию $U_2(\bar{p})/E(\bar{p})$ в режиме холостого хода и при активной нагрузке $R_н = 200$ Ом. Определить нули и полюсы этой функции и показать на рисунке полюсно-нулевое изображение.

Р е ш е н и е. 1. В режиме холостого хода (рис. 11.20, *а*):

$$U_2(\bar{p}) = I(\bar{p})\,pL = \frac{U_1(\bar{p})}{R + pL}\,pL; \quad T(\bar{p}) = \frac{U_2(\bar{p})}{U_1(\bar{p})} = \frac{pL}{R + pL} = \frac{Q(\bar{p})}{P(\bar{p})}.$$

Нули функции $U_2(\bar{p})$ являются корнями уравнения $Q(\bar{p}) = 0$, а полюсы — корнями уравнения $P(\bar{p}) = 0$. В данном случае $pL = 0$, $p_1 = 0$, $R + pL = 0$,

$$p_2 = -\frac{R}{L} = -\frac{R\omega}{X_L} = -\frac{100 \cdot 2\pi \cdot 1600}{200} = -5020 \text{ с}^{-1}.$$

Полюсно-нулевое изображение показано на рис. 11.20, *б*.

2. В режиме нагрузки (рис. 11.20, *в*):

$$Z(\overline{p}) = R + \frac{pL\left(R_{\text{н}} + \dfrac{1}{pC}\right)}{pL + R_{\text{н}} + \dfrac{1}{pC}} = \frac{p^2LC(R + R_{\text{н}}) + p(L + RR_{\text{н}}C)}{p^2LC + pCR_{\text{н}} + 1};$$

$$I_2(\overline{p}) = I_1(\overline{p})\frac{pL}{R_{\text{н}} + pL + \dfrac{1}{pC}} = \frac{U_1(\overline{p})}{Z(\overline{p})} \cdot \frac{p^2LC}{p^2LC + pCR_{\text{н}} + 1};$$

$$U_2(\overline{p}) = I_2(\overline{p})R = \frac{U_1(\overline{p})}{Z(\overline{p})} \cdot \frac{p^2LCR_{\text{н}}}{p^2LC + pCR_{\text{н}} + 1};$$

$$T(\overline{p}) = \frac{U_2(\overline{p})}{U_1(\overline{p})} = \frac{p^2R_{\text{н}}LC}{p^2LC(R + R_{\text{н}}) + p(L + RR_{\text{н}}C) + R} = \frac{Q(\overline{p})}{P(\overline{p})}.$$

Определяем нули функции $T(\overline{p})/Q(\overline{p}) = p^2R_{\text{н}}LC = 0$, $p_1 = 0$. Находим полюсы функции $T(\overline{p})$. Для этого вначале вычисляем L и C:

$$L = \frac{X_L}{\omega} = \frac{200}{2\pi \cdot 1600} = 0{,}02 \text{ Гн}; \quad C = \frac{1}{\omega X_C} = \frac{1}{2\pi \cdot 1600 \cdot 100} = 10^{-6} \text{ Ф},$$

$$P(\overline{p}) = p^2LC(R + R_{\text{н}}) + p(L + RR_{\text{н}}C) + R =$$
$$= 6 \cdot 10^{-6}p^2 + 0{,}04p + 100 = 0.$$

Корни этого квадратного уравнения равны:

$$p_2 = (-3{,}34 + j2{,}36) \cdot 10^3 \text{ с}^{-1}; \quad p_4 = (-3{,}34 - j2{,}36) \cdot 10^3 \text{ с}^{-1}.$$

Полюсно-нулевое изображение показано на рис. 11.20, *г*.

11.43. В схеме цепи, изображенной на рис. 11.21, *а*, $R = 100$ Ом, $L = 20$ мГн, $C = 1$ мкФ, $R_{\text{н}} = 200$ Ом. Построить амплитудно-частотную и фазочастотную характеристики коэффициента передачи напряжения $T_U(j\omega)$. Определить передаточное сопротивление при $\omega = 10^4$ с$^{-1}$.

Р е ш е н и е. Расчет $T_U(j\omega)$ ведем по формуле (см. табл. 11.4)

$$T_U(j\omega) = \frac{U_2(j\omega)}{U_1(j\omega)} = \frac{1}{\underline{A}_{11} + \underline{A}_{12}/Z_{\text{н}}}.$$

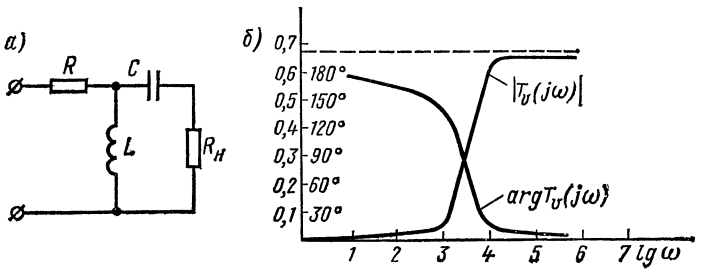


Рис. 11.21

Предварительно по (11.7д) находим выражения $\underline{A}_{11}$ и $\underline{A}_{12}$ в функции угловой частоты:

$$\underline{A}_{11} = 1 + \frac{R}{j\omega L} = 1 + \frac{100}{j\omega 20 \cdot 10^{-3}} = 1 - j\,\frac{5000}{\omega};$$

$$\underline{A}_{12} = R - j\,\frac{1}{\omega C} - j\,\frac{R\,\frac{1}{\omega C}}{j\omega L} = \left(100 - \frac{5 \cdot 10^9}{\omega^2}\right) - j\,\frac{10^6}{\omega}.$$

Результаты расчетов заносим в табл. 11.5.

Таблица 11.5

ω, с$^{-1}$	$\underline{A}_{11}$	$\underline{A}_{12}$, Ом	$\underline{A}_{11} + \underline{A}_{12}/R_н$	$T_U(j\omega)$
0	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	0
10^3	$1-j5$	$-4900-j1000$	$-23{,}5-j10$	$0{,}0392e^{j157}$
10^4	$1-j0{,}5$	$50-j100$	$1{,}25-j1$	$0{,}625e^{j38°40'}$
10^5	$1-j0{,}05$	$99{,}5-j10$	$1{,}498-j0{,}1$	$0{,}667e^{j30°50'}$
10^6	$1-j0{,}005$	$100-j1$	$1{,}5-j0{,}01$	$0{,}667e^{j0°23'}$
10^7	$1-j0{,}0005$	$100-j0{,}1$	$1{,}5-j0{,}001$	$0{,}667e^{j0°6'}$
∞	1	100	1,5	0,667

По результатам расчетов на рис. 11.21, *б* построен график (в логарифмическом масштабе оси абсцисс) амплитудно-частотной $T_U(\omega)$ и фазочастотной $\arg T(j\omega)$ характеристик коэффициента передачи. Передаточное сопротивление — это отношение напряжения на нагрузке к входному току:

$$\underline{Z}_{21} = \frac{\underline{U}_2}{\underline{I}_1} = \frac{\underline{U}_2}{\underline{A}_{21}\underline{U}_2 + \underline{A}_{22}\underline{I}_2} = \frac{1}{\underline{A}_{21} + \underline{A}_{22}/R_н}.$$

Параметры $\underline{A}_{21}$ и $\underline{A}_{22}$ находим по (11.7д): $\underline{A}_{21} = -j0{,}005$ См, $\underline{A}_{22} = 0{,}5$. Подставляя эти значения в предыдущую формулу, получим

$$\underline{Z}_{21} = \frac{1}{\left(-j0{,}005 + \frac{0{,}5}{200}\right)} = 179e^{j63°40'}\ \text{Ом}.$$

11.44. Показать, что четырехполюсник (рис. 11.22) является минимально-фазовым.

Р е ш е н и е. Находим в операторной форме $U_2(\overline{p})$ и, беря его отношение к $U_1(\overline{p})$, получаем

$$T(\overline{p}) = \frac{U_2(\overline{p})}{U_1(\overline{p})} =$$

$$= \frac{p^2(pL + R_2)C_1C_3R_4}{p^3LC_1C_3R_4 + p^2(LC_3 + LC_1 + C_1C_3R_2R_4) + p(C_1R_2 + C_3R_2 + C_3R_4) + 1}.$$

Нули функции $T(\overline{p})$ равны: $p_1 = p_2 = 0$, $p_3 = -R_2/L$.

Функция $T(\overline{p})$ не имеет нулей, расположенных в правой полуплоскости. Значит, четырехполюсник является минимально-фазовым.

11.45. Показать, что четырехполюсники рис. 11.23, *а* и *б* не являются минимально-фазовыми

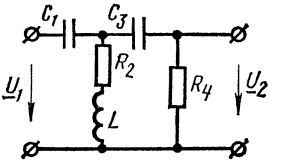


Рис. 11.22

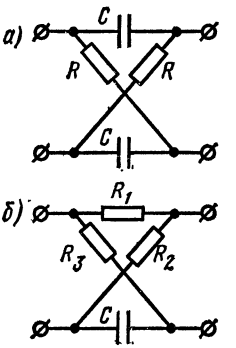


Рис. 11.23

Р е ш е н и е. Для рис. 11.23, *а* и *б* в режиме холостого хода $\underline{U}_1 = \underline{A}_{11}\underline{U}_2$.

Следовательно,

$$T(\overline{p}) = \frac{U_2(\overline{p})}{U_1(\overline{p})} = \frac{1}{\underline{A}_{11}(\overline{p})}.$$

Для мостового симметричного четырехполюсника [см. формулу (11.7ж)]:

$$\underline{A}_{11} = \frac{\underline{Z}_a + \underline{Z}_b}{\underline{Z}_b - \underline{Z}_a};\quad \underline{A}_{11}(\overline{p}) = \frac{R + \frac{1}{pC}}{R - \frac{1}{pC}} = \frac{RCp + 1}{RCp - 1};$$

$$T(\overline{p}) = \frac{1}{A_{11}(\overline{p})} = \frac{RCp - 1}{RCp + 1}.$$

Нуль функции $T(p)$ равен $p_1 = 1/RC$.

Нуль передаточной функции расположен в правой полуплоскости. Значит, четырехполюсник не является минимально-фазовым.

К. Активные неавтономные четырехполюсники *

11.46. Определить Y-параметры четырехполюсника с зависимым источником тока ($S\underline{U}_1$), изображенного на рис. 11.24 (схема замещения электронной лампы в области низких частот с общим катодом, работающей без сеточного тока $I_1 = 0$).

Р е ш е н и е. Из первого уравнения (11.1а) при $\underline{I}_1 = 0$ следует, что $\underline{Y}_{11} = 0$ и $\underline{Y}_{12} = 0$. Согласно первому закону Кирхгофа

$$\underline{I}_2 = S\underline{U}_1 + \frac{1}{R_i}\underline{U}_2,$$

где S — крутизна характеристики; R_i — внутреннее сопротивление лампы переменному току. Приравнивая коэффициенты в последнем

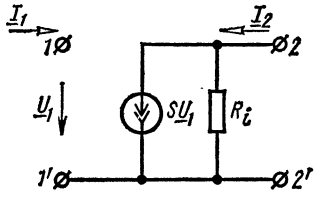


Рис. 11.24

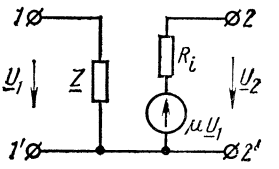


Рис. 11.25

уравнении к коэффициентам $\underline{Y}_{21}$ и $\underline{Y}_{22}$ во втором уравнении (11.1а), получим

$$\underline{Y}_{21} = S; \quad \underline{Y}_{22} = 1/R_i.$$

11.47. Определить Z-параметры четырехполюсника с зависимым источником напряжения $\mu\underline{U}_1$, изображенного на рис. 11.25 [схема замещения электронной лампы в области низких частот с общим катодом, работающей без сеточного тока, когда к входным зажимам $1—1'$ (сетка — катод) подключено сопротивление $\underline{Z}$]. Здесь μ — статический коэффициент усиления, R_i — внутреннее сопротивление лампы переменному току.

Р е ш е н и е. Составим уравнения Кирхгофа для контуров

$$1—1' \text{ и } 2—2': \quad \underline{U}_1 = \underline{Z}\underline{I}_1 + 0 \cdot \underline{I}_2; \quad \underline{U}_2 = \mu\underline{U}_1 +$$

$$+ R_i\underline{I}_2 = \mu\underline{Z}\,\underline{I}_1 + R_i\underline{I}_2.$$

Сопоставляя их с уравнениями (11.1б), имеем: $\underline{Z}_{11} = \underline{Z}$;

$$\underline{Z}_{12} = 0; \quad \underline{Z}_{21} = \mu\underline{Z}; \quad \underline{Z}_{22} = R_i.$$

П р и м е ч а н и е. Матрица [Z] такой схемы при отсутствии сопротивления $\underline{Z}$ не применяется, так как она теряет смысл.

---

* Задачи данной подтемы составил доц. Б. Ф. Аносович.

11.48. На рис. 11.26, *а* изображена схема электронной лампы, параллельно электродам которой включены проводимости $\underline{Y}_1$, $\underline{Y}_2$, $\underline{Y}_3$ (схема лампы в области высоких частот, работающей без сеточного тока). Определить $\underline{Y}$-параметры схемы.

Р е ш е н и е. Заданную схему можно представить как параллельное соединение двух четырехполюсников (рис. 11.26, *б*). Соединение этих четырехполюсников является регулярным, поэтому можно написать, что матрица $[\underline{Y}]$ сложного четырехполюсника равна сумме матриц I и II четырехполюсников, соединенных параллельно:

$$[\underline{Y}] = [\underline{Y}'][\underline{Y}''].$$

Уже было доказано (см. задачу (11.46), что матрица $[\underline{Y}']$ лампы имеет вид

$$[\underline{Y}'] = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ S & G_i \end{bmatrix},$$

где $G_i = 1/R_i$.

Как известно, матрица $[\underline{Y}'']$ пассивного П-образного четырехполюсника (см. табл. 11.2, п. 6)

$$[\underline{Y}''] = \begin{bmatrix} \underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 & -\underline{Y}_2 \\ -\underline{Y}_2 & \underline{Y}_2 + \underline{Y}_3 \end{bmatrix}.$$

Поэтому

$$[\underline{Y}] = \begin{bmatrix} \underline{Y}_{11} & \underline{Y}_{12} \\ \underline{Y}_{21} & \underline{Y}_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 & -\underline{Y}_2 \\ S - \underline{Y}_2 & \underline{Y}_2 + \underline{Y}_3 + G_i \end{bmatrix}.$$

11.49. Определить коэффициент передачи напряжения T_U (коэффициент усиления) схемы цепи рис. 11.26, *а*, когда проводимость нагрузки на выходных зажимах *2—2'* равна $Y_н$.

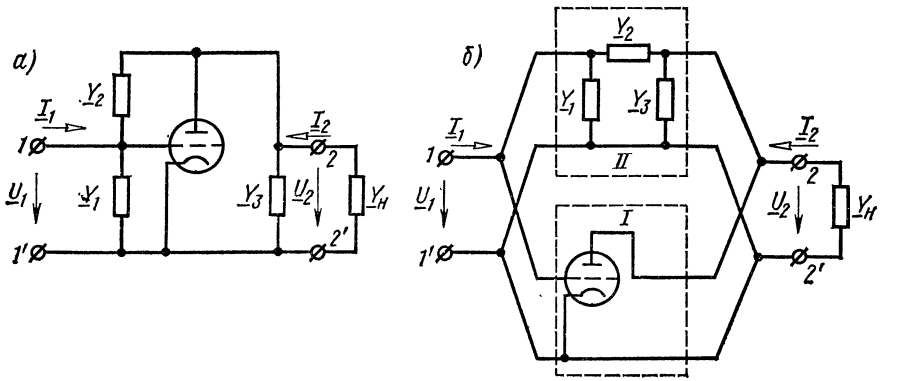


Рис. 11.26

Р е ш е н и е. Определим сначала T_U в общем виде. Так как $\underline{I}_2 = -\underline{Y}_н\underline{U}_2$, то из второго уравнения (11.1а) следует, что

$$-\underline{Y}_н\underline{U}_2 = \underline{Y}_{21}\underline{U}_1 + \underline{Y}_{22}\underline{U}_2 .$$

Отсюда

$$\underline{T}_U = \frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_1} = -\frac{\underline{Y}_{21}}{\underline{Y}_{22} + \underline{Y}_н}.$$

Используя найденные значения $\underline{Y}_{21}$ и $\underline{Y}_{22}$ из предыдущей задачи, найдем

$$\underline{T}_U = \frac{\underline{Y}_2 - S}{\underline{Y}_2 + \underline{Y}_3 + G_i + \underline{Y}_н}.$$

11.50. Определить входное сопротивление четырехполюсника, изображенного на рис. 11.26, *а*.

Р е ш е н и е. Согласно уравнениям (11.1а) и, учитывая, что $\underline{I}_2 = -\underline{Y}_н\underline{U}_2$, получим

$$\underline{I}_1 = \underline{Y}_{11}\underline{U}_1 + \underline{Y}_{12}\underline{U}_2; \quad 0 = \underline{Y}_{21}\underline{U}_1 + (\underline{Y}_{22} + \underline{Y}_н)\underline{U}_2.$$

Решим эту систему уравнений относительно $\underline{U}_2$:

$$\underline{U}_2 = \frac{\begin{vmatrix} \underline{Y}_{11} & \underline{I}_1 \\ \underline{Y}_{21} & 0 \end{vmatrix}}{\Delta} = -\frac{\underline{Y}_{21}}{\Delta}\underline{I}_1,$$

где определитель системы $\Delta = \underline{Y}_{11}(\underline{Y}_{22} + \underline{Y}_н) - \underline{Y}_{12}\underline{Y}_{21}$. Подставим это значение $\underline{U}_2$ в первое уравнение (11.1а) и получим

$$\underline{I}_1 = \underline{Y}_{11}\underline{U}_1 - \frac{\underline{Y}_{12}\underline{Y}_{21}}{\Delta}\underline{I}_1.$$

Отсюда после простых преобразований

$$\underline{Z}_{вх} = \frac{\underline{U}_1}{\underline{I}_1} = \frac{\underline{Y}_{22} + \underline{Y}_н}{|\underline{Y}| + \underline{Y}_{11}\underline{Y}_н},$$

где

$$|\underline{Y}| = \underline{Y}_{11}\underline{Y}_{22} - \underline{Y}_{12}\underline{Y}_{21}.$$

Подставляя в последнее уравнение $\underline{Y}$-параметры заданной схемы, найдем

$$\underline{Z}_{вх} = \frac{\underline{Y}_2 + \underline{Y}_3 + G_i + \underline{Y}_н}{\underline{Y}_2(\underline{Y}_1 + S) + (\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2)(\underline{Y}_3 + G_i + \underline{Y}_н)}.$$

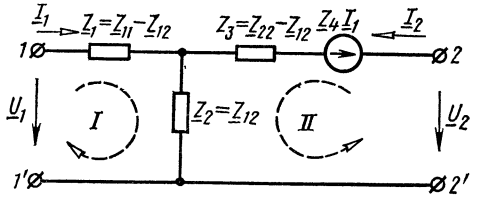


Рис. 11.27

11.51. На рис. 11.27 изображена схема цепи Т-образного активного четырехполюсника с зависимым источником напряжения $\underline{Z}_4\underline{I}_1$. Значения элементов схемы $\underline{Z}_1$, $\underline{Z}_2$, $\underline{Z}_3$, выраженные через $\underline{Z}$-параметры, показаны на схеме.

Определить $\underline{Z}_4$ при условии, что уравнения передачи четырехполюсника в форме $\underline{Z}$ должны соответствовать уравнениям (11.1б).

Р е ш е н и е. Применяя метод контурных токов, можно для приведенной схемы определить матрицу $[\underline{Z}]$:

$$[\underline{Z}] = \begin{bmatrix} \underline{Z}_{11} & \underline{Z}_{12} \\ \underline{Z}_{21} & \underline{Z}_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{Z}_{11} & \underline{Z}_{12} \\ \underline{Z}_4 + \underline{Z}_{12} & \underline{Z}_{22} \end{bmatrix}.$$

Из равенства матриц следует, что для поставленных условий должно быть

$$\underline{Z}_{21} = \underline{Z}_4 + \underline{Z}_{12}, \text{ или } \underline{Z}_4 = \underline{Z}_{21} - \underline{Z}_{12}.$$

Если $\underline{Z}_4 = 0$, т. е. $\underline{Z}_{21} = \underline{Z}_{12}$, то схема превращается в обратимый пассивный четырехполюсник.

11.52. На рис. 11.28 изображена схема цепи П-образного активного четырехполюсника с зависимым источником тока $\underline{Y}_4\underline{U}_1$. Значения элементов схемы $\underline{Y}_1$, $\underline{Y}_2$, $\underline{Y}_3$, выраженные через $\underline{Y}$-параметры, показаны на схеме.

Определить коэффициент $\underline{Y}_4$ при условии, что уравнения передачи четырехполюсника в форме $\underline{Y}$ должны соответствовать уравнениям (11.1б).

11.53. Известны $H_б$-параметры транзистора в рабочей точке, включенного по схеме с общей базой: $\underline{H}_{11б} = 25$ Ом, $\underline{H}_{12б} = 1 \cdot 10^{-4}$, $\underline{H}_{21б} = -0{,}95$, $\underline{H}_{22б} = 0{,}5 \cdot 10^{-6}$ См. Определить $\underline{Z}_б$-параметры.

11.54. На рис. 11.29 изображена Т-образная схема замещения транзистора с общей базой в области низких частот с зависимым ис-

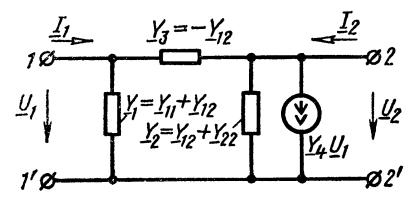


Рис. 11.28

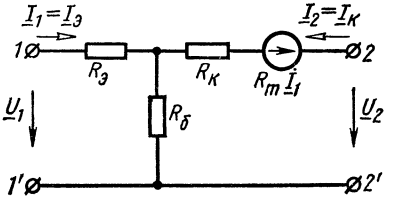


Рис. 11.29

точником напряжения $R_m \underline{I}_1$. На этой схеме обозначены: $\underline{I}_1 = \underline{I}_э$ — ток эмиттера, $\underline{I}_2 = \underline{I}_к$ — ток коллектора, $R_э$, $R_б$ и $R_к$ — соответственно сопротивления эмиттера, базы и коллектора.

Определить элементы схемы $R_э$, $R_б$, $R_к$ и R_m при значениях $\underline{Z}_б$-параметров, указанных в задаче 11.53.

Р е ш е н и е. Элементы такой схемы через Z-параметры в общем виде были определены в задаче 11.49. Поэтому (см. рис. 11.27)

$$R_э = \underline{Z}_{1б} = \underline{Z}_{11б} - \underline{Z}_{12б} = 215 - 200 = 15 \text{ Ом};$$

$$R_б = \underline{Z}_{2б} = \underline{Z}_{12б} = 200 \text{ Ом};$$

$$R_к = \underline{Z}_{3б} - \underline{Z}_{22б} = 2 \cdot 10^6 - 200 = 1\,999\,800 \text{ Ом};$$

$$R_m = \underline{Z}_{4б} = \underline{Z}_{21б} - \underline{Z}_{12б} = 1{,}9 \cdot 10^6 - 200 = 1\,899\,800 \text{ Ом}.$$

11.55. Определить коэффициент передачи тока T_I при коротком замыкании зажимов $2—2'$ и значениях элементов схемы предыдущей задачи.

Р е ш е н и е. В этом случае $\underline{U}_2 = 0$. Поэтому для выходного контура можно написать контурное уравнение (где $\underline{I}_1 = \underline{I}_{11}$, $\underline{I}_2 = \underline{I}_{22}$)

$$\underline{I}_2 (R_к + R_б) + \underline{I}_1 (R_m + R_б) = 0.$$

Отсюда

$$\underline{T}_I \Big|_{\underline{U}_2 = 0} = \frac{\underline{I}_2}{\underline{I}_1}\Big|_{\underline{U}_2 = 0} = -\frac{R_m + R_б}{R_к + R_б} \approx -\frac{R_m}{R_к},$$

так как $R_б \ll R_m$ и $R_б \ll R_к$.

Следовательно,

$$\underline{T}_I \Big|_{\underline{U}_2 = 0} = -\frac{1\,899\,800}{1\,999\,800} = -0{,}95 = 0{,}95 e^{j\pi}.$$

11.56. На рис. 11.30, *а* изображена схема транзистора с общим эмиттером для переменного тока, в цепь которого включено сопротив-

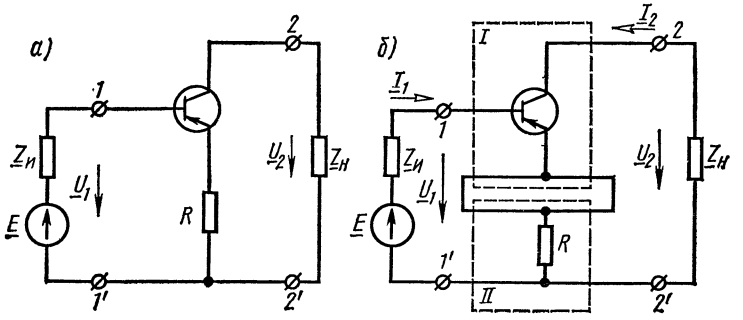


Рис. 11.30

ление R (схема усилителя с последовательной обратной связью). Сопротивление нагрузки $Z_н = 10^4$Ом, сопротивление источника $Z_и = 10^3$ Ом, $R = 100$ Ом; $Z_э$-параметры транзистора в рабочей точке равны: $Z_{11э} = 275$ Ом, $Z_{12э} = 25$ Ом, $Z_{21э} = 969\ 975$ Ом, $Z_{22э} = 30\ 025$ Ом.

Определить: 1) входное сопротивление $Z_{вх}$; 2) коэффициенты передачи напряжения T_U и тока T_I; 3) выходное сопротивление $Z_{вых}$.

Р е ш е н и е. Представленную схему можно изобразить как последовательное соединение (регулярное) двух (*I* и *II*) четырехполюсников (рис. 11.30, *б*) с Z-матрицами:

$$[Z'_э] = \begin{bmatrix} Z_{11э} & Z_{12э} \\ Z_{21э} & Z_{22э} \end{bmatrix}, \quad [Z''] = \begin{bmatrix} R & R \\ R & R \end{bmatrix}.$$

Матрица сложного четырехполюсника имеет вид

$$[Z] = [Z'_э] + [Z''] = \begin{bmatrix} Z_{11э} + R & Z_{12э} + R \\ Z_{21э} + R & Z_{22э} + R \end{bmatrix}.$$

Подставляя заданные параметры схемы, получим: $Z_{11} = 375$ Ом, $Z_{12} = 125$ Ом, $Z_{21} = -969\ 875$ Ом, $Z_{22} = 30\ 125$ Ом. Теперь воспользуемся формулами табл. 11.4, заменив в ней с помощью табл. 11.2 A-параметры Z-параметрами. После преобразований получим

$$|Z| = Z_{11}Z_{22} - Z_{12}Z_{21} = 132{,}5 \cdot 10^6;$$

$$Z_{1вх} = \frac{|Z| + Z_{11}Z_н}{Z_{22} + Z_н} = \frac{132{,}5 \cdot 10^6 + 375 \cdot 10^4}{30125 + 10000} = 3400 \text{ Ом};$$

$$T_U = \frac{Z_{21}Z_н}{|Z| + Z_{11}Z_н} = \frac{-969\,875 \cdot 10^4}{132{,}5 \cdot 10^6 + 375 \cdot 10^4} = -70 = 70e^{j\pi};$$

$$T_I = -\frac{Z_{21}}{Z_{22} + Z_н} = \frac{969\,875}{30\,125 + 10\,000} = 24{,}25;$$

$$Z_{2\,вых} \frac{|Z| + Z_{22}Z_и}{Z_{11} + Z_и} = \frac{132{,}5 \cdot 10^6 + 30\,125 \cdot 10^3}{375 + 1000} = 118 \cdot 10^3 \text{ Ом}.$$

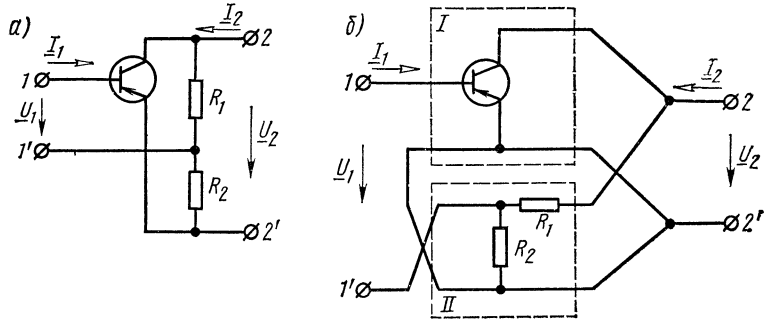


Рис. 11.31

11.57. На рис. 11.31, *а* изображена схема транзистора с общим эмиттером для переменного тока с последовательно-параллельной обратной связью.

Известны $h_э$-параметры транзистора в рабочей точке и сопротивления R_1 и R_2. Определить в общем виде H-параметры сложного четырехполюсника.

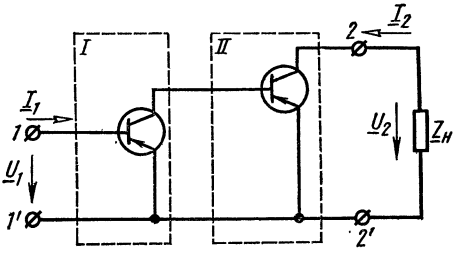


Рис. 11.32

Р е ш е н и е. На рис. 11.31, *б* представлена та же схема в виде последовательно-параллельного соединения двух четырехполюсников *I* и *II*. Для того чтобы соединение четырехполюсников было регулярным, провода на входе $I—I'$ четырехполюсника скрещены.

Матрица $[h_э]$ активного четырехполюсника *I* имеет вид

$$[h_э] = \begin{bmatrix} h_{11э} & h_{12э} \\ h_{21э} & h_{22э} \end{bmatrix}.$$

Матрица $[Z]$ пассивного четырехполюсника *II* без скрещивания проводов на входе равна

$$[Z] = \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_2 & R_2 \\ R_2 & R_1+R_2 \end{bmatrix}.$$

Для определения матрицы $[h]$ по известной матрице [Z] четырехполюсника *II* воспользуемся табл. 11.1:

$$h_{11} = \frac{|Z|}{Z_{22}} = \frac{R_1R_2}{R_1+R_2}; \quad h_{12} = \frac{Z_{12}}{Z_{22}} = \frac{R_2}{R_1+R_2};$$

$$h_{21} = -\frac{Z_{21}}{Z_{22}} = -\frac{R_2}{R_1+R_2}; \quad h_{22} = \frac{1}{Z_{22}} = \frac{1}{R_1+R_2}.$$

Теперь определим h^*-параметры четырехполюсника *II* со скрещенными проводами на его входе:

$$h^*_{11} = h_{11}, \quad h^*_{12} = -h_{12}, \quad h^*_{21} = -h_{21}, \quad h^*_{22} = h_{22}.$$

H-параметры сложного четырехполюсника при последовательно-параллельном соединении образующих его четырехполюсников определяются уравнениями

$$H_{11} = h_{11э} + h^*_{11} = h_{11э} + \frac{R_1R_2}{R_1+R_2}; \quad H_{12} = h_{12э} + h^*_{12} = h_{12э} - \frac{R_2}{R_1+R_2};$$

$$H_{21} = h_{21э} + h^*_{21} = h_{21э} + \frac{R_2}{R_1+R_2}; \quad H_{22} = h_{22э} + h^*_{22} = h_{22э} + \frac{1}{R_1+R_2}.$$

11.58. Два транзистора, включенные по схеме с общим эмиттером, соединены каскадно (рис. 11.32). По своим электрическим свойствам

оба транзистора одинаковы и в рабочей точке имеют $h_э$-параметры: $h_{11э} = 2000$ Ом, $h_{12э} = 15 \cdot 10^{-4}$, $h_{21э} = 32{,}3$, $h_{22э} = 33{,}3 \cdot 10^{-6}$ См. Сопротивление нагрузки $Z_н = 1000$ Ом.

Определить: 1) A-параметры сложного четырехполюсника; 2) входное сопротивление; 3) коэффициент передачи напряжения.

Л. Устойчивость

11.59. Проверить, являются ли устойчивыми четырехполюсники с передаточными функциями следующего вида: а) $T_1(\overline{p}) = 10/(p^2 + 2p + 1)$; б) $T_2(\overline{p}) = 2p/(2p^2 + p - 1)$; в) $T_3(\overline{p}) = (p^2 - 1)/(p^2 + 2p + 2)$; г) $T_4(\overline{p}) = 2/(p^2 - 2p + 2)$; д) $T_5(\overline{p}) = p^2/(p^2 + 1)$; е) $T_6(\overline{p}) = p/(p^2 + 1)^2$.

Указание. Для каждой из функций проверить расположение нулей знаменателя на комплексной плоскости

11.60. Являются ли полиномами Гурвица следующие полиномы:

а) $B_1(\overline{p}) = p^3 + 3p^2 + 4p + 2$; б) $B_2(\overline{p}) = p^4 - 2p^3 + 2p^2 + p$;

в) $B_3(\overline{p}) = \frac{1}{120}p^5 + \frac{1}{24}p^4 + \frac{1}{6}p^3 + \frac{1}{2}p^2 + p + 1$;

г) $B_4(\overline{p}) = 8p^4 + 20p^3 + 40p^2 + 45p + 32$.

Решение для случая а. Отношение четной части полинома $B_1(\overline{p})$ к его нечетной части разлагаем в цепную дробь:

$$\frac{2 + 3p^2}{4p + p^3} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{p} + \cfrac{1}{\cfrac{8}{5} \cdot \cfrac{1}{p} + \cfrac{1}{\cfrac{5}{2} \cdot \cfrac{1}{p}}}.$$

Это разложение было выполнено последовательными делениями (с обращением после выполнения каждого этапа деления делителя в делимое и остатка в делитель):

$$\begin{array}{r|l}
2 + 3p^2 & 4p + p^3 \\
\hline
2 + \frac{1}{2}p^2 & \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{p} \\
\hline
4p + p^3 & \frac{5}{2}p^2 \\
\hline
4p + 0 & \frac{8}{5} \cdot \frac{1}{p} \\
\hline
\frac{5}{2}p^2 & p^3 \\
\hline
\frac{5}{2}p^2 & \frac{5}{2} \cdot \frac{1}{p} \\
\hline
0 &
\end{array}$$

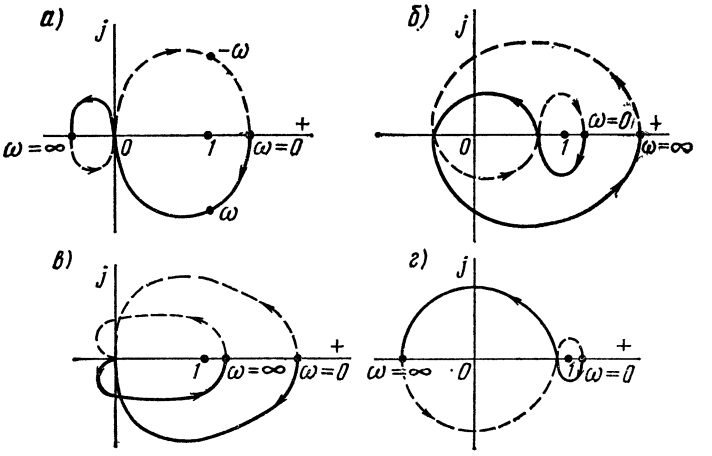


Рис. 11.33

Разложение содержит ровно n ($n = 3$) положительных коэффициентов: $c_1 = \frac{1}{2}$, $c_2 = \frac{8}{5}$, $c_3 = \frac{5}{2}$. Значит, выражение $B_1(\overline{p}) = 2 + 4p + 3p^2 + p^3$ действительно является полиномом Гурвица.

11.61. Диаграммы Найквиста нескольких устойчивых четырехполюсников показаны на рис. 11.33, *а*, *б*, *в*, *г*. Будут ли устойчивы схемы с каждым из этих четырехполюсников после введения положительной обратной связи, как показано на рис. 11.5, *б*?

ГЛАВА ДВЕНАДЦАТАЯ

ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ФИЛЬТРЫ

ОСНОВНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ И СООТНОШЕНИЯ

1. Электрические фильтры. Это четырехполюсники, обладающие избирательными свойствами; они пропускают токи в определенной полосе частот с небольшим ослаблением (полоса пропускания, или прозрачности), а токи с частотами, лежащими вне этой полосы, — с большим ослаблением (полоса затухания или задерживания).

2. Звенья и полузвенья фильтров. На рис. 12.1 изображены Т-, Г- и П-образные схемы фильтров. Т- и П-образные звенья могут быть образованы цепочечным соединением соответствующих полузвеньев Г-образной формы так, что при этом выполняются условия согласования по характеристическим сопротивлениям. Это связано с тем, что для всех схем рис. 12.1 характеристические сопротивления со стороны Т- и П-входов соответственно определяются по одинаковым формулам

$$\underline{Z}_{\text{т}} = \sqrt{\underline{Z}_1\underline{Z}_2\left(1+\frac{\underline{Z}_1}{4\underline{Z}_2}\right)}\ ;\quad \underline{Z}_{\text{п}} = \sqrt{\frac{\underline{Z}_1\underline{Z}_2}{1+\dfrac{\underline{Z}_1}{4\underline{Z}_2}}}\,. \qquad (12.1)$$

Характеристическое сопротивление реактивного фильтра в полосе пропускания — активное, а в полосе задерживания — реактивное.

Характеристическая (собственная) постоянная передачи $\underline{\Gamma}_C$ для Т- и П-образных схем (рис. 12.1) имеет одну и ту же величину

$$\underline{\Gamma}_C = A_C + jB_C = \underline{\Gamma}_{\text{т}} = \underline{\Gamma}_{\text{п}} \qquad (12.2)$$

и вычисляется по одной из формул

$$\operatorname{sh}\frac{\underline{\Gamma}_C}{2} = \sqrt{\frac{\underline{Z}_1}{4\underline{Z}_2}}\ ;\quad \operatorname{ch}\underline{\Gamma}_C = 1+\frac{\underline{Z}_1}{2\underline{Z}_2}\,, \qquad (12.3)$$

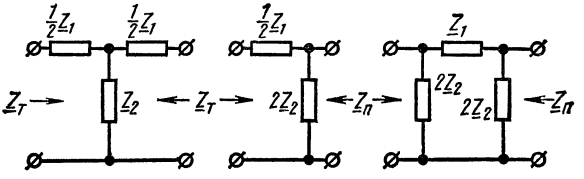


Рис. 12.1

а характеристическая постоянная передачи для Г-образного полузвена (рис. 12.1) равняется половине характеристической постоянной передачи Т- и П-образных звеньев, т. е.

$$\underline{\Gamma}_{\Gamma} = \frac{\underline{\Gamma}_{\mathrm{T}}}{2} = \frac{\underline{\Gamma}_{\mathrm{П}}}{2} = \frac{\underline{\Gamma}_{C}}{2} = \frac{\underline{A}_{C}}{2} + j\frac{\underline{B}_{C}}{2}. \qquad (12.4)$$

Здесь $\underline{A}_C$ и $\underline{B}_C$ соответственно характеристическая (собственная) постоянная ослабления и характеристическая постоянная фазы фильтра типа Т или П.

При изучении теории и расчете реактивных фильтров удобно ввести параметр Ω, называемый нормированной частотой, который определяется по формуле

$$\Omega = \sqrt{\left|\frac{\underline{Z}}{4\underline{Z}_2}\right|}. \qquad (12.5)$$

3. Характеристики фильтров. В табл. 12.1 приведены формулы характеристик Т-, Г- и П-образных реактивных фильтров (рис. 12.1, *а* — *в*), у которых $\underline{Z}_1 = jX_1$, $\underline{Z}_2 = jX_2$. Выражение этих характеристик в различных областях частот определяется величиной и знаком отношения $\underline{Z}_1/4\underline{Z}_2$.

Таблица 12.1

Полоса пропускания	$-1 \leqslant \frac{\underline{Z}_1}{4\underline{Z}_2} \leqslant 0$	$A_C = 0$	$\sin B_C/2 = \pm\sqrt{\underline{Z}_1/4\underline{Z}_2}$
Полоса задерживания	$-\infty \leqslant \frac{\underline{Z}_1}{4\underline{Z}_2} \leqslant -1$	$\operatorname{ch}\frac{A_C}{2} = \sqrt{\left\|\frac{\underline{Z}_1}{4\underline{Z}_2}\right\|}$	$B_C = \pm\pi$
	$0 \leqslant \frac{\underline{Z}_1}{4\underline{Z}_2} \leqslant \infty$	$\operatorname{sh}\frac{A_C}{2} = \sqrt{\left\|\frac{\underline{Z}_1}{4\underline{Z}_2}\right\|}$	$B_C = 0$

Пример приведен в задаче 12.1

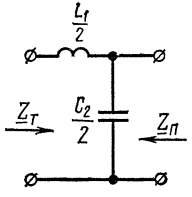
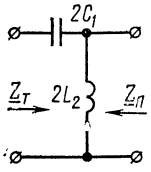
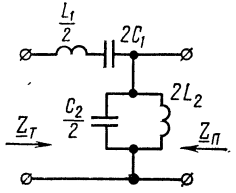
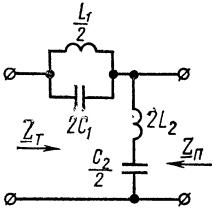
4. Фильтры типа *k*. Такими фильтрами называют Т-, П- и Г-образные схемы, у которых сопротивления $\underline{Z}_1$ продольных и $\underline{Z}_2$ поперечных плеч взаимно обратны, т. е.

$$\underline{Z}_1\underline{Z}_2 = R^2. \qquad (12.6)$$

Параметр $R = \sqrt{\underline{Z}_1\underline{Z}_2}$ называется номинальным характеристическим сопротивлением и для данного фильтра является величиной постоянной.

В табл. 12.2 приведены схемы полузвена и формулы параметров реактивных фильтров типа *k*: нижних частот (ФНЧ), верхних частот (ФВЧ), полоснопропускающих (ППФ) и полоснозаграждающих (ПЗФ).

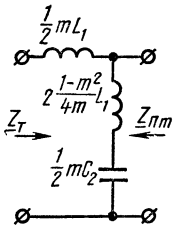
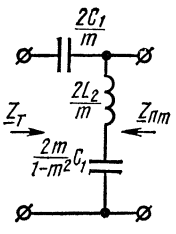
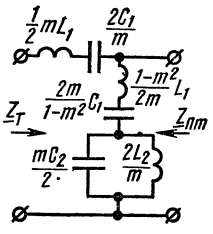
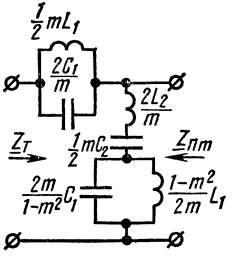
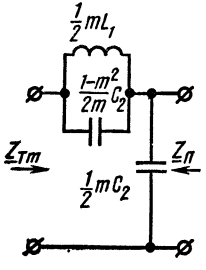
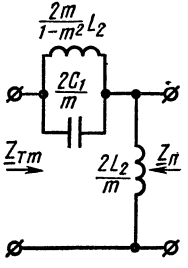
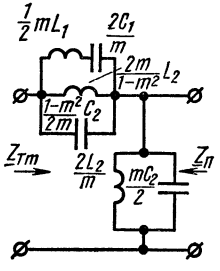
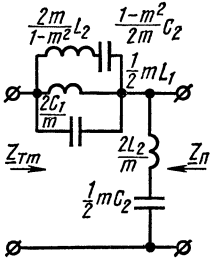
Таблица 12.2

Наименование фильтра		ФНЧ	ФВЧ	ППФ	ПЗФ
Схема полузвена					
$R = \sqrt{Z_1 Z_2}$		$\sqrt{\frac{L_1}{C_2}}$	$\sqrt{\frac{L_2}{C_1}}$	$\sqrt{\frac{L_1}{C_2}} = \sqrt{\frac{L_2}{C_1}}$	$\sqrt{\frac{L_1}{C_2}} = \sqrt{\frac{L_2}{C_1}}$
Частоты среза		$f_c = \frac{1}{\pi \sqrt{L_1 C_2}}$	$f_c = \frac{1}{4\pi \sqrt{L_2 C_1}}$	$f_{1,2} = \frac{1}{2\pi} \times \times \left[\sqrt{\frac{1}{L_1 C_2} + \frac{1}{L_1 C_1}} \mp \mp \frac{1}{\sqrt{L_1 C_2}} \right]$	$f_{1,2} = \frac{1}{8\pi} \times \times \left[\sqrt{\frac{1}{L_2 C_1} + \frac{16}{L_1 C_1}} \mp \mp \frac{1}{\sqrt{L_2 C_1}} \right]$
Полоса пропускания	$\sin \frac{B_c}{2}$ при $A_c = 0$	$\frac{f}{f_c}$	$-\frac{f_c}{f}$	Ω	$-\frac{1}{\Omega}$

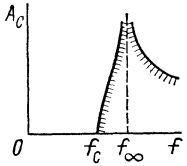
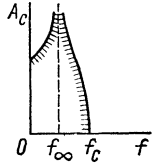
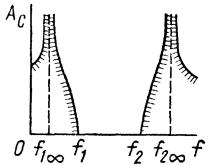
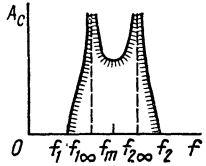
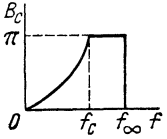
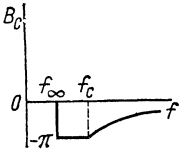
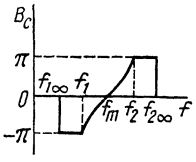
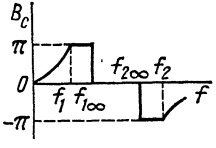
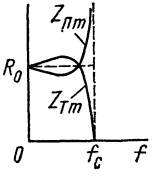
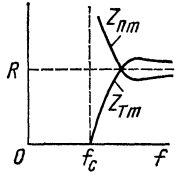
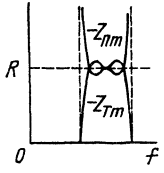
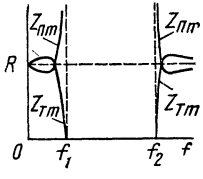
Наименование фильтра		ФНЧ	ФВЧ	ППФ	ПЗФ
Полоса задерживания	$\operatorname{ch}\frac{A_C}{2}$	$\frac{f}{f_c}$	$\frac{f_c}{f}$	$\lvert\Omega\rvert$	$\frac{1}{\lvert\Omega\rvert}$
	B_C	π	$-\pi$	$\mp\pi$	$\pm\pi$
$\underline{Z}_т$		$R\sqrt{1-\left(\frac{f}{f_c}\right)^2}$	$\mp R\sqrt{1-\left(\frac{f_c}{f}\right)^2}$	$\mp R\sqrt{1-\Omega^2}$	$\pm\sqrt{1-\frac{1}{\Omega^2}}$
$\underline{Z}_п$		$\pm\frac{R}{\sqrt{1-\left(\frac{f}{f_c}\right)^2}}$	$\frac{R}{\sqrt{1-\left(\frac{f_c}{f}\right)^2}}$	$\pm\frac{R}{\sqrt{1-\Omega^2}}$	$\pm\frac{R}{\sqrt{1-\frac{1}{\Omega^2}}}$
Формулы для расчета элементов фильтра		$L_1=\frac{R}{\pi f_c}$	$L_2=\frac{R}{4\pi f_c}$	$L_1=\frac{R}{\pi(f_2-f_1)}$ $L_2=\frac{R(f_2-f_1)}{4\pi f_1 f_2}$	$L_1=\frac{R(f_2-f_1)}{\pi f_1 f_2}$ $L_2=\frac{R}{4\pi(f_2-f_1)}$
		$C_2=\frac{1}{\pi f_c R}$	$C_1=\frac{1}{4\pi f_c R}$	$C_1=\frac{f_2-f_1}{4\pi f_1 f_2 R}$ $C_2=\frac{1}{\pi(f_2-f_1)R}$	$C_1=\frac{1}{4\pi(f_2-f_1)R}$ $C_2=\frac{f_2-f_1}{\pi f_1 f_2 R}$

Примечание. $\Omega=\dfrac{\frac{f}{f_m}-\frac{f_m}{f}}{\frac{f_2}{f_m}-\frac{f_m}{f_2}}$, где $f_m=\sqrt{f_1 f_2}$.

Таблица 12.3

Наименование фильтра	ФНЧ	ФВЧ	ППФ	ПЗФ
Схема последовательно-производного полузвена типа m				
Схема параллельно-производного полузвена типа m				

Продолжение табл. 12.3

Наименование фильтра	ФНЧ	ФВЧ	ППФ	ПЗФ
Характеристическая постоянная ослабления				
Характеристическая постоянная фазы				
Характеристическое сопротивление				

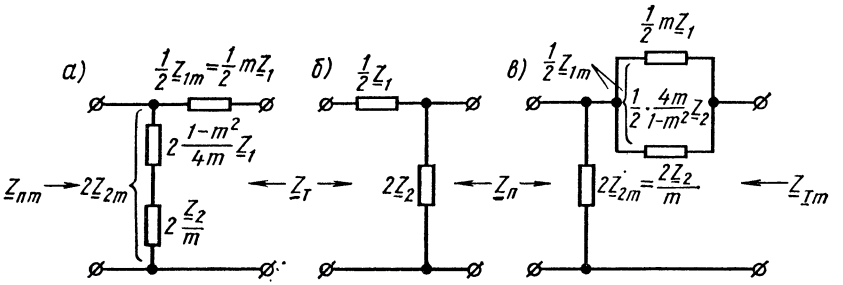


Рис. 12.2

Примеры даны в задачах 12.3; 12.10; 12.14.

5. Фильтры типа m (рис. 12.2, *а* и *в*). Такие фильтры являются производными фильтров типа k (рис. 12.2, *б*). Изменение плеч полузвена фильтра типа k по схеме рис. 12.2, *а* приводит к последовательно-производному полузвену фильтра типа m, характеристическое сопротивление $\underline{Z}_т$ которого совпадает с сопротивлением $\underline{Z}_т$ исходного звена фильтра типа k — прототипа производного фильтра. Изменение плеч полузвена фильтра типа k по схеме рис. 12.2, *в* приводит к параллельно-производному полузвену фильтра типа m, у которого характеристическое сопротивление $\underline{Z}_п$ совпадет с соответствующим сопротивлением прототипа — исходного звена фильтра типа k.

В табл. 12.3 приведены схемы полузвеньев и характеристики фильтров типа m.

Характеристические сопротивления $\underline{Z}_{пm}$ последовательно-производного и $\underline{Z}_{тm}$ параллельно-производного фильтров типа m выражаются формулами

$$\underline{Z}_{пm}=\underline{Z}_п\left[1+(1-m^2)\frac{\underline{Z}_1}{4\underline{Z}_2}\right]=\frac{R\,[1-(1-m^2)\,\Omega^2]}{\sqrt{1-\Omega^2}}; \qquad (12.7)$$

$$\underline{Z}_{тm}=\underline{Z}_т\frac{1}{1+(1-m^2)\dfrac{\underline{Z}_1}{4\,\underline{Z}_2}}=\frac{R\sqrt{1-\Omega^2}}{1-(1-m^2)\,\Omega^2},$$

где $\underline{Z}_т$ и $\underline{Z}_п$ определяются по формуле (12.1).

Характеристическое ослабление A_C в полосе задерживания и характеристическая фаза B_C в полосе пропускания определяются из выражений

$$\left.\begin{matrix}\operatorname{ch}\dfrac{A_C}{2}\\ \operatorname{sh}\dfrac{A_C}{2}\end{matrix}\right\}=\sqrt{\left|\frac{\underline{Z}_{1m}}{4\underline{Z}_{2m}}\right|}=\frac{m\,|\,\Omega\,|}{\sqrt{|\,1-(1-m^2)\,\Omega^2\,|}}; \qquad (12.8а)$$

$$\sin\frac{B_C}{2}=\sqrt{\left|\frac{\underline{Z}_{1m}}{4\underline{Z}_{2m}}\right|}=\frac{m\Omega}{\sqrt{1-(1-m^2)\,\Omega^2}},$$

где $\Omega=f/f_c$ для ФНЧ, $\Omega=f_c/f$ для ФВЧ,

$$\Omega=\frac{\dfrac{f}{f_m}-\dfrac{f_m}{f}}{\dfrac{f_2}{f_m}-\dfrac{f_m}{f_2}}\ \text{для ППФ},\qquad \Omega=\frac{\dfrac{f_2}{f_m}-\dfrac{f_m}{f_2}}{\dfrac{f}{f_m}-\dfrac{f_m}{f}}\ \text{для ПЗФ}\quad (12.8б)$$

при $f_m=\sqrt{f_1f_2}$.

В выражения (12.8а) входит функция $\mathrm{ch}\,\frac{Ac}{2}$, которая применяется при $1>(1-m^2)\Omega^2$, что соответствует разным знакам $\underline{Z}_{1m}$ и $\underline{Z}_{2m}$, и функция $\mathrm{sh}\frac{A}{2}$, используемая при $1<(1-m^2)\Omega^2$, что соответствует одинаковым знакам $\underline{Z}_{1m}$ и $\underline{Z}_{2m}$.

В полосе задерживания фильтра типа m частоты f_∞, при которых выполняется равенство

$$1/\Omega^2=1-m^2, \qquad (12.9а)$$

соответствуют бесконечному ослаблению.

Из (12.9а) с учетом (12.8а) частоты бесконечного ослабления вычисляются по формулам:

$$\text{для ФНЧ}\quad f_\infty=\frac{f_c}{\sqrt{1-m^2}};\quad \text{для ФВЧ}\quad f_\infty=f_c\sqrt{1-m^2}, \qquad (12.9б)$$

$$\text{для ППФ}\quad f_{1,2\infty}=\mp\frac{f_2-f_1}{2\sqrt{1-m^2}}+\sqrt{\frac{(f_2-f_1)^2}{4(1-m^2)}+f_m^2}.$$

Фильтры типа m с величиной m в пределах 0,506 — 0,62 имеют значительно более стабильное значение характеристических сопротивлений $\underline{Z}_{тm}$ и $\underline{Z}_{пm}$ в значительной части области пропускания (табл. 12.4). При $m=1$ фильтр типа m переходит в фильтр типа k.

Таблица 12.4

Наибольшее отклонение $\underline{Z}_{тm}$ и $\underline{Z}_{пm}$ от значения номинального характеристического сопротивления R, %	Значение m	Значение нормированной частоты Ω на границах рабочей полосы частот
±5	0,59	0,88
±10	0,542	0,94
±15	0,506	0,96
±20	0,473	0,97

Фильтры типов k и m могут быть соединены каскадно на основе равенства характеристических сопротивлений при одинаковых ча-

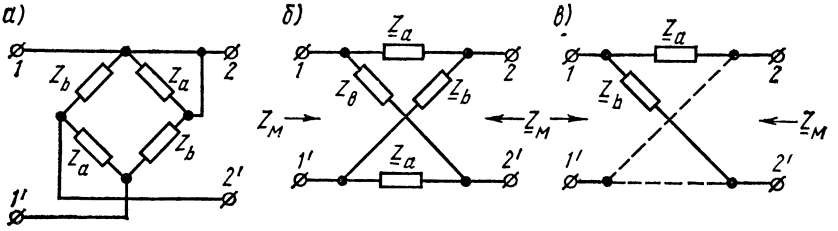


Рис. 12.3

стотах среза и номинальных характеристических сопротивлениях.

Примеры приведены в задачах 12.17; 12.19; 12.23.

6. Мостовые фильтры. На рис. 12.3, *а*, *б* и *в* показаны три эквивалентные формы (последняя — условная) изображения симметричных мостовых фильтров. Здесь $\underline{Z}_a$ и $\underline{Z}_b$ — соответственно продольное и диагональное сопротивления моста. Характеристическое сопротивление $\underline{Z}_м$ мостовой схемы и ее характеристическая постоянная передачи $\underline{\Gamma}_C$ определяются формулами

$$\underline{Z}_м = \sqrt{\underline{Z}_a \underline{Z}_b}; \quad \operatorname{th}\frac{\underline{\Gamma}_C}{2} = \sqrt{\frac{\underline{Z}_a}{\underline{Z}_b}}; \quad \underline{\Gamma}_C = \ln\frac{1+\sqrt{\dfrac{\underline{Z}_a}{\underline{Z}_b}}}{1-\sqrt{\dfrac{\underline{Z}_a}{\underline{Z}_b}}}. \qquad (12.10)$$

Характеристическое сопротивление $\underline{Z}_м$ реактивного мостового фильтра в полосе пропускания — активное, а в полосе задерживания — реактивное. Знак $\underline{Z}_м$ в полосе задерживания совпадает со знаком реактивного сопротивления продольного плеча X_a.

В полосе пропускания знаки характеристической фазы B_C и X_a совпадают, а в полосе непропускания знак B_C определяется из непре-

Таблица 12.5

Полоса пропускания	$-\infty \leqslant \dfrac{\underline{Z}_a}{\underline{Z}_b} \leqslant 0$	$A_C = 0$	$\operatorname{tg}\dfrac{B_C}{2} = \pm\sqrt{\underline{Z}_a/\underline{Z}_b}$	$\underline{Z}_м = \sqrt{\lvert\underline{Z}_a\underline{Z}_b\rvert}$
Полоса задерживания	$0 \leqslant \dfrac{\underline{Z}_a}{\underline{Z}_b} < 1$	$\operatorname{th}\dfrac{A_C}{2} = \sqrt{\lvert\underline{Z}_a/\underline{Z}_b\rvert}$	$B_C = 0$	$\underline{Z}_м = \pm j\sqrt{\lvert\underline{Z}_a\underline{Z}_b\rvert}$
	$1 \leqslant \dfrac{\underline{Z}_a}{\underline{Z}_b} \leqslant \infty$	$\operatorname{cth}\dfrac{A_C}{2} = \sqrt{\lvert\underline{Z}_a/\underline{Z}_b\rvert}$	$B_C = \pm\pi$	$\underline{Z}_м = j\sqrt{\lvert\underline{Z}_a\underline{Z}_b\rvert}$

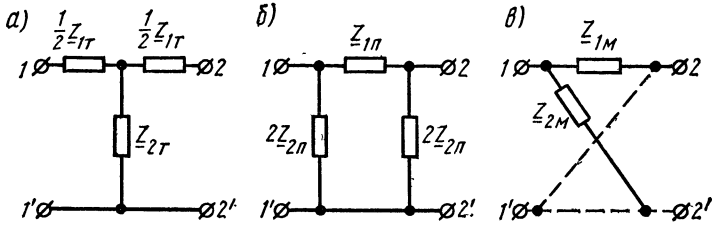


Рис. 12.4

рывности функции $B_C = B_C(\omega)$, которая изменяется скачком на $\pm\pi$ только в точках бесконечного собственного затухания, т. е. при $\underline{Z}_1 = \underline{Z}_2$.

Свойства реактивных мостовых фильтров, имеющих реактивные сопротивления плеч $\underline{Z}_a = jX_a$, $\underline{Z}_b = jX_b$, приведены в табл. 12.5.

Примеры приведены в задачах 12.28; 12.29; 12.30.

Характеристическое ослабление мостового фильтра бесконечно при $\underline{Z}_a = \underline{Z}_b$. Это позволяет проектировать балансные схемы, имеющие бесконечное ослабление при всех частотах.

Мостовой фильтр имеет наиболее общие характеристики и к его схеме может быть приведен симметричный фильтр произвольной схемы. В частности, симметричные Т- и П-образные фильтры (рис. 12.4, *а* и *б*) эквивалентны друг другу и мостовому фильтру (рис. 12.4, *в*) при условии

$$\underline{Z}_{1м} = \frac{\underline{Z}_{1т}}{2} = \frac{2\underline{Z}_{1п}\underline{Z}_{2п}}{\underline{Z}_{1п} + 4\underline{Z}_{2п}};$$

$$\underline{Z}_{2м} = 2\underline{Z}_{2т} + \frac{\underline{Z}_{1т}}{2} = 2\underline{Z}_{2п}. \quad (12.11)$$

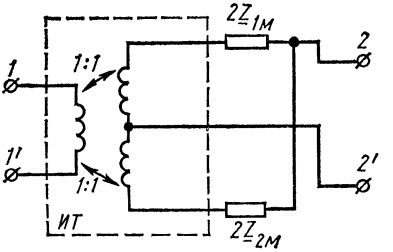


Рис. 12.5

Мостовые фильтры имеют сравнительно много элементов, поэтому их обычно реализуют эквивалентными Т-, П-образными фильтрами, а также в виде эквивалентных дифференциально-мостовых схем с применением идеальных трансформаторов (ИТ), как показано на рис. 12.5.

Пример дан в задаче 12.33.

УПРАЖНЕНИЯ И ЗАДАЧИ

А. Задачи на применение общей теории реактивных Т- и П-образных фильтров

12.1. На рис. 12.6, *а* — *г* изображены схемы звеньев симметричных цепочечных фильтров. Используя общетеоретические положения для Т- и П-образных фильтров (см. п. 2 и 3 основных положений

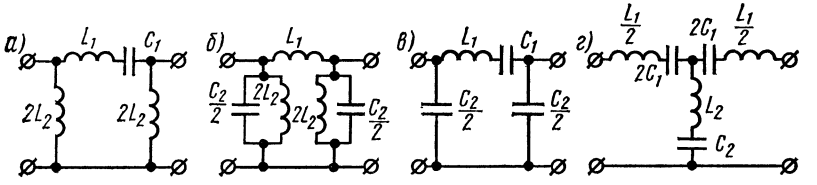


Рис. 12.6

и соотношений), для каждой из них определить, к какому типу по полосе пропускания она относится, и вычислить граничные частоты. Составить уравнения характеристических постоянной ослабления A_C и сопротивления $\underline{Z}_C$, построить соответствующие кривые в функции ω.

Д а н ы: для схемы *а* $L_1 = 10$ мГн; $L_2 = 1{,}5$ мГн, $C_1 = 1$ мкФ,
» » *б* $L_1 = 10$ мГн, $C_2 = 2{,}67$ мкФ, $L_2 = 1{,}5$ мГн,
» » *в* $L_1 = 10$ мГн, $C_1 = 1$ мкФ, $C_2 = 2$ мкФ,
» » *г* $L_1 = 10$ мГн, $L_2 = 1{,}5$ мГн, $C_1 = 1$ мкФ, $C_2 = 2{,}67$ мкФ.

Р е ш е н и е. Рассмотрим схему рис. 12.6, *а*.

Сопротивления $\underline{Z}_1$ и $\underline{Z}_2$ соответственно равны:

$$\underline{Z}_1 = \frac{L_1}{j\omega}(\omega_1^2 - \omega^2), \text{ где } \omega_1 = 1/\sqrt{L_1C_1}; \quad \underline{Z}_2 = j\omega L_2.$$

По этим уравнениям на рис. 12.7, *а* построены (в масштабе) частотные зависимости $\underline{Z}_1$ и $4\underline{Z}_2$. В соответствии с табл. 12.1 устанавливаем, что граничным частотам соответствуют точка *а*, где $\underline{Z}_1 = -4\,\underline{Z}_2$, и точка *b*, где $\underline{Z}_1 = 0$.

Интервал *а* — *b* представляет собой полосу пропускания. Итак, схема рис. 12.6, *а* соответствует полосовому фильтру. Вычислим частоты среза из условий:

$$\underline{Z}_1 = \frac{L_1}{j\omega}(\omega_1^2 - \omega^2) = -4\underline{Z}_2 = -j4\omega L_2$$

и

$$\underline{Z}_1 = \frac{L_1}{j\omega}(\omega_1^2 - \omega^2) = 0.$$

Из первого условия следует, что

$$\omega_a = \frac{1}{\sqrt{C_1(L_1 + 4L_2)}} = \frac{1}{\sqrt{10^{-6}(10 \cdot 10^{-3} + 4 \cdot 1{,}5 \cdot 10^{-3})}} =$$

$$= 7900 \text{ с}^{-1}, \text{ а из второго условия}$$

$$\omega_b = \frac{1}{\sqrt{L_1C_1}} = \frac{1}{\sqrt{10 \cdot 10^{-3} \cdot 10^{-6}}} = 10^4 \text{ с}^{-1} = \omega_1.$$

Уравнение кривой характеристического ослабления можно найти по формулам, приведенным в табл. 12.1.

$$\left.\begin{matrix}\operatorname{ch}\dfrac{A_C}{2}\\ \operatorname{sh}\dfrac{A_C}{2}\end{matrix}\right\} = \sqrt{\left|\frac{\underline{Z}_1}{4\underline{Z}_2}\right|} = \sqrt{\left|\frac{L_1}{4L_2}\left[1-\left(\frac{\omega_1}{\omega}\right)^2\right]\right|}.$$

Расчет по формуле $\operatorname{ch}\frac{Ac}{2}$ проводится в области частот от 0 до ω_a (где знаки $\underline{Z}_1$ и $\underline{Z}_2$ в полосе задерживания разные), а по формуле $\operatorname{sh}\frac{Ac}{2}$ — в области частот от ω_b до ∞ (где знаки $\underline{Z}_1$ и $\underline{Z}_2$ одинаковые). Уравнение кривой характеристического сопротивления [см.формулу (12.1)] имеет вид

$$\underline{Z}_{C\text{П}} = \sqrt{\frac{\underline{Z}_1\underline{Z}_2}{1+\dfrac{\underline{Z}_1}{4\underline{Z}_2}}} = \sqrt{\frac{L_1L_2\left(\omega_1^2-\omega^2\right)}{1+\dfrac{L_1}{4L_2}\left[1-\left(\dfrac{\omega_1}{\omega}\right)^2\right]}}.$$

Расчет кривых характеристического ослабления и характеристического сопротивления сведен в табл. 12.6.

Таблица 12.6

ω	$\left\|1-\left(\frac{\omega_1}{\omega}\right)^2\right\|$	$\operatorname{ch}\frac{A_C}{2}$	$\operatorname{sh}\frac{A_C}{2}$	A_C		$\underline{Z}_{C\text{П}}$, Ом
				Нп	дБ	
0	∞	∞	—	∞	∞	0
$0{,}5\omega_1$	3	2,24	—	2,9	25,2	$j16{,}8$
$0{,}79\omega_1=\omega_a$	0,6	1,0	—	0	0	∞
$0{,}85\omega_1$	0,38	—	—	—	—	33,4
$0{,}9\omega_1$	0,23	—	—	—	—	21,5
$0{,}95\omega_1$	0,105	—	—	—	—	13,5
$\omega_1=\omega_b$	0	—	0	0	0	0
$1{,}58\omega_1=\omega_c$	0,6	—	1,0	1,78	15,5	$j33{,}6$
$2\omega_1$	0,75	—	1,12	1,93	16,8	$j44{,}8$

Кривые A_C (ω) и $\underline{Z}_{C\text{П}}$ (ω), построенные по результатам расчета, изображены на рис. 12.7, *б* и *в*.

Расчеты для схем рис. 12.6, *б*, *в*, *г* рекомендуется проделать самостоятельно.

12.2. Показать, что два одинаковых индуктивно связанных контура (рис. 12.8, *а*) представляют собой полосовой фильтр. Определить частоты среза этого фильтра.

Р е ш е н и е. Заданная схема может быть заменена эквивалентной схемой рис. 12.8, *б*. Если использовать коэффициент связи

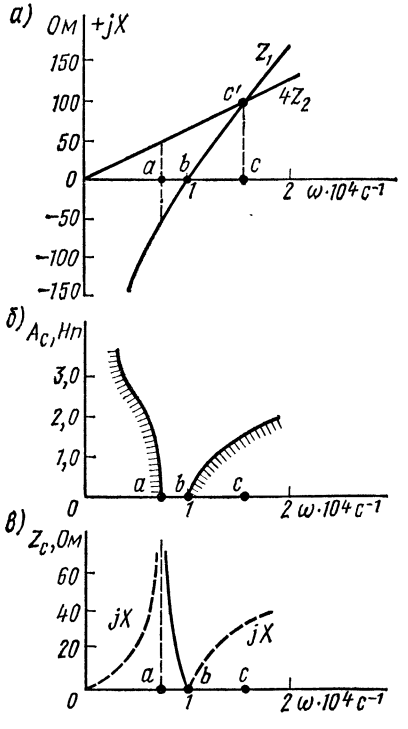


Рис. 12.7

$k = M/L$, формула сопротивления продольного плеча схемы примет вид

$$\underline{Z}_1 = 2\frac{L}{\omega}[\omega_0^2 - \omega^2(1-k)],$$

где $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$.

Сопротивление поперечного плеча $\underline{Z}_2 = j\omega M$. Графики $\underline{Z}_1(\omega)$ и $4\underline{Z}_2(\omega)$ изображены на рис. 12.8, *в*. Частоты среза определяются из условий: 1) $\underline{Z}_1 = -4\underline{Z}_2$; 2) $\underline{Z}_1 = 0$. Используя первое условие, получим

$$2\frac{L}{j\omega}[\omega_0^2 - \omega^2(1-k)] = -4j\omega M.$$

Отсюда

$$\omega_a = \omega_0/\sqrt{1+k}.$$

Из второго условия $\underline{Z}_1 = 0$ следует, что

$$\omega_b = \omega_0/\sqrt{1-k}.$$

Таким образом, полоса пропускания расположена между частотами ω_a и ω_b, т. е. заданная схема обладает свойствами полосового фильтра.

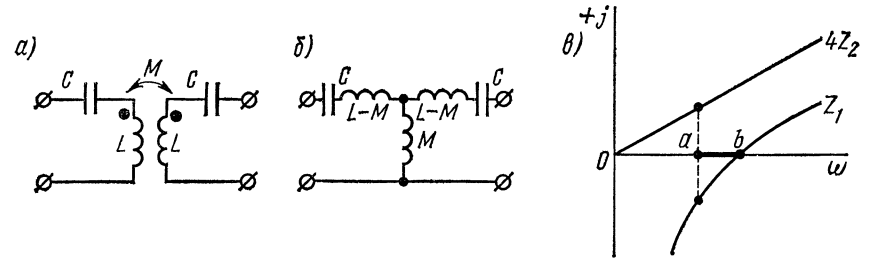


Рис. 12.8

Б. Фильтры типа k

12.3. Определить элементы Т-образного фильтра нижних частот типа k (см. табл. 12.2), номинальное характеристическое сопротивление которого $R = 600$ Ом, а частота среза $f_c = 3200$ Гц. Рассчитать ослабление на частоте $f = 6400$ Гц, выразив его в неперах, децибе-

лах и простым числом, равным отношению амплитуд входа и выхода, полагая, что при этой частоте фильтр нагружен на характеристическое сопротивление. Рассчитать и построить кривые зависимостей характеристического сопротивления $Z_г$, постоянной ослабления A_C и постоянной фазы B_C от частоты.

Начертить Т-схему ФНЧ в уравновешенном виде и написать на ней величины каждого из ее элементов.

Начертить П- и Г-схемы ФНЧ в уравновешенном виде, имеющие те же значения R и f_c.

Р е ш е н и е. По формулам табл. 12.2 определяем индуктивность, емкость элементов фильтра и постоянную ослабления A_C:

$$\frac{L_1}{2} = \frac{R}{2\pi f_c} = \frac{600}{2\pi \cdot 3200} \approx 0{,}03 \text{ Гн}; \quad C_2 = \frac{1}{\pi f_c R} = \frac{1}{\pi\, 3200 \cdot 600} =$$

$$= 0{,}166 \text{ мкФ};$$

$$A = 2 \operatorname{arch} f/f_c.$$

При $f = 6400$ Гц

$$A_C = 2\operatorname{arch} \frac{6400}{3200} = 2 \operatorname{arch} 2^* = 2{,}64 \text{ Нп} = 2{,}64 \cdot 8{,}69 = 23 \text{ дБ}.$$

Определим отношение амплитуд напряжения входа и выхода:

$$U_1/U_2 = e^{A_C} = e^{2{,}64} = 14.$$

Уравнение кривой $Z_т(\omega)$ имеет вид

$$Z_т = R\sqrt{1 - \left(\frac{f}{f_c}\right)^2} = R\sqrt{1 - \Omega^2}.$$

Таблица 12.7

Полоса	f, Гц	Ω	$\sqrt{1-\Omega^2}$	$Z_т$, Ом	$\operatorname{ch}\frac{A_C}{2}$	A_C, Нп	$\sin\frac{B_C}{2}$	B_C, град
Пропускания	0	0	0	600	—	0	0	0
	800	0,25	0,97	582	—	0	0,25	29
	1600	0,5	0,865	519	—	0	0,5	60
	2400	0,75	0,66	396	—	0	0,75	97
Задерживания	3200	1,0	0	0	1,0	0	1,0	180
	4000	1,25	j0,75	j450	1,25	1,39	—	180
	4800	1,5	j1,12	j672	1,5	1,92	—	180
	5600	1,75	j1,44	j865	1,75	2,32	—	180
	6400	2,0	j1,73	j1040	2,0	2,64	—	180

* Если задано x, то функцию arch x можно найти с помощью таблиц гиперболического косинуса либо вычислить по формуле $\operatorname{arch} x = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$. Например, $\operatorname{arch} 2 = \ln(2 + \sqrt{2^2 - 1}) = \ln(2 + \sqrt{3}) = \ln 3{,}732 \approx 1{,}32$.

Постоянная фазы в полосе задерживания имеет значение $+\pi$, а в полосе пропускания $B_C = 2 \arcsin f/f_c = 2 \arcsin \Omega$.

Расчет зависимостей $Z_т$, A_C и B_C от частоты приведен в табл. 12.7

По полученным результатам на рис. 12.9, *а* построены кривые, а на рис. 12.9, *б* начерчены схемы фильтров в уравновешенном виде.

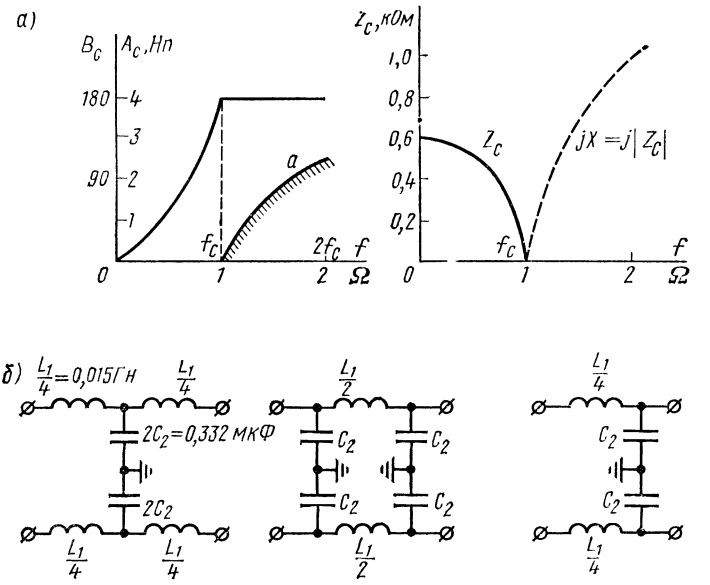


Рис. 12.9

12.4. Найти параметры элементов П-образного фильтра нижних частот типа k, номинальное характеристическое сопротивление которого $R = 600$ Ом и частота среза $f_c = 3200$ Гц.

Р е ш е н и е. Определяем индуктивность и емкость по формулам табл. 12.2:

$$L_1 = \frac{R}{\pi f_c} = \frac{600}{\pi 3200} \approx 0{,}06 \text{ Гн}; \quad \frac{C_2}{2} = \frac{1}{2\pi f_c R} = \frac{1}{2\pi \cdot 3200 \cdot 600} =$$

$$= 0{,}083 \text{ мкФ}.$$

12.5. Определить частоту среза Т-образного фильтра нижних частот типа k, предназначенного для телеграфирования, у которого индуктивность каждого плеча равняется 3 Гн, а емкость 5,3 мкФ.

12.6. Найти индуктивность $L_1/2$ и емкость C_2 Т-образного фильтра нижних частот типа k, номинальное характеристическое сопротивление которого $R = 600$ Ом, а постоянная ослабления на частоте 5,6 кГц равна 20 дБ. Найти частоту среза и отношение напряжений на входе U_1 и выходе U_2 при той же частоте 5,6 кГц, считая, что фильтр согласован с нагрузкой.

12.7. ФНЧ типа k, составленный из двух одинаковых звеньев с номинальным характеристическим сопротивлением $R = 600$ Ом, должен иметь постоянную ослабления, равную 46 дБ при частоте $f = 6{,}4$ кГц. Определить частоту среза, индуктивность и емкость одного звена фильтра.

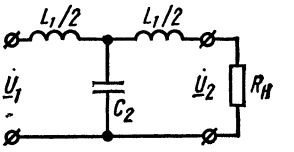


Рис. 12.10

12.8. Для фильтра задачи 12.3 рассчитать и построить в функции частоты кривые модуля коэффициента передачи по напряжению $|T_U|$ и $\ln\left|\frac{1}{T_U}\right|$ в режиме холостого хода.

Сравнить кривые постоянной характеристического ослабления A_c и $\ln\left|\frac{1}{T_U}\right|$ и объяснить причины их различия.

Р е ш е н и е. Схема фильтра приведена на рис. 12.10. В режиме холостого хода напряжения на входе и выходе фильтра могут быть записаны в виде

$$\underline{U}_1 = j\left(\frac{\omega L_1}{2} - \frac{1}{\omega C_2}\right)\underline{I} = \frac{1}{j\omega C_2}\left[1 - 2\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^2\right] I,$$

$$\underline{U}_2 = \underline{I}\,\frac{1}{j\omega C_2} = \frac{\underline{U}_1}{1 - 2\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^2}.$$

Отсюда получим формулу модуля коэффициента передачи

$$T_U = \left|\frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_1}\right| = \frac{1}{1 - \left(\frac{f}{f_c}\right)^2}.$$

Результаты расчета зависимостей $|T_U|$ и $\ln\left|\frac{1}{T_U}\right|$ от частоты приведены в табл. 12.8.

Таблица 12.8

f, Гц	f/f_c	$1-2(f/f_c)^2$	$\lvert T_U\rvert$	$\lvert 1/T_U\rvert$	$\ln\lvert 1/T_U\rvert$
0	0	1,0	1,0	1,0	0
800	0,25	0,875	1,143	0,875	—0,134
1600	0,5	0,5	2,0	0,5	—0,693
2260	0,707	0	∞	0	$-\infty$
2400	0,75	—0,125	8,0	0,125	—2,08
3200	1,0	—1,0	1,0	1,0	0
4000	1,25	—2,125	0,47	2,125	0,754
4800	1,5	—3,5	0,286	3,5	1,252
5600	1,75	—5,125	0,195	5,125	1,634
6400	2,0	—7,0	0,143	7,0	1,946

На рис. 12.11 по полученным данным построены кривые. Сопоставление кривой $\left|\frac{1}{T_U}\right|$ рис. 12.11 с кривой A_C рис. 12.9, *а* показывает, что они существенно различаются. Причина этого в том, что кривая $\ln\left|\frac{1}{T_U}\right|$ соответствует режиму холостого хода, а кривая $A_C(f)$ — режиму согласованной нагрузки.

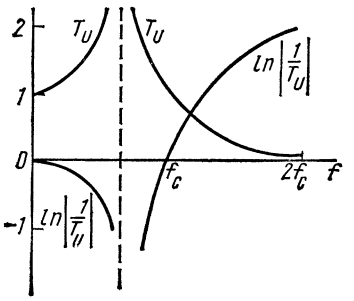


Рис. 12.11

Некоторое сближение кривых наблюдается лишь при частотах $f \gg f_c$, так как в этой области сопротивление фильтра $Z_т$ велико, а следовательно, режим согласованной нагрузки близок к холостому ходу.

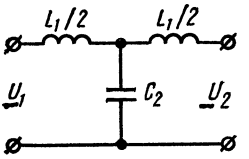


Рис. 12.12

12.9. ФНЧ нагружен на постоянное активное сопротивление $R_н$ (рис. 12.12). Рассчитать и построить кривую модуля коэффициента передачи по напряжению $T(\omega) = \underline{U}_2/\underline{U}_1$ и кривую $\ln\frac{1}{T(\omega)}$ для двух значений $R_н$: 1) $R_н = R$; 2) $R_н = 0{,}8\,R$.

Р е ш е н и е. Определяем параметры четырехполюсника $\underline{A}_{11}$ и $\underline{A}_{12}$ (см. табл. 11.2):

$$\underline{A}_{11} = 1 + \frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_2} = 1 + j\,\frac{\omega L_1}{2}\,j\omega C_2 = 1 - \frac{\omega^2 L_1 C_2}{2};$$

$$\underline{A}_{12} = 2\underline{Z}_1 + \frac{\underline{Z}_1^2}{\underline{Z}_2} = 2j\,\frac{\omega L_1}{2} + \frac{\left(\frac{j\omega L_1}{2}\right)^2}{\frac{1}{j\omega C_2}} = j\omega L_1\left(1 - \frac{\omega^2 L_1 C_2}{4}\right).$$

Если использовать выражение нормированной частоты $\Omega = \omega/\omega_c = \omega\sqrt{L_1 C_2}/2$, последние формулы примут вид

$$\underline{A}_{11} = 1 - 2\Omega^2; \quad \underline{A}_{12} = j\omega L_1(1 - \Omega^2).$$

Коэффициент передачи напряжения (см. табл. 11.4)

$$\underline{T}_U = \frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_1} = \frac{\underline{U}_2}{\underline{A}_{11}\underline{U}_2 + \underline{A}_{12}\underline{I}_2} = \frac{1}{\underline{A}_{11} + \underline{A}_{12}/R_н}.$$

Найдем выражение модуля коэффициента передачи $T(\omega)$ для двух заданных случаев:

$$1.\ R_{\text{н}} = R = \sqrt{L_1/C_2};\quad \frac{\underline{A}_{12}}{R_{\text{н}}} = \frac{j\omega L_1}{\sqrt{L_1/C_2}}(1-\Omega^2) = j2\Omega(1-\Omega^2);$$

$$\underline{T}_U = \frac{1}{\underline{A}_{11} + \underline{A}_{12}/R_{\text{н}}} = \frac{1}{(1-2\Omega^2) + j2\Omega(1-\Omega^2)}.$$

Модуль коэффициента передачи

$$T_U(\omega) = T(\omega) = \frac{1}{\sqrt{(1-2\Omega^2)^2 + 4\Omega^2(1-\Omega^2)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-4\Omega^4+4\Omega^6}}.$$

Найдем частоту, при которой это выражение будет максимально. Для этого достаточно приравнять нулю первую производную подкоренного выражения:

$$\frac{d}{d\Omega}(1-4\Omega^4+4\Omega^6) = -16\Omega^3 + 24\Omega^5 = 0,$$

отсюда

$$\Omega = \sqrt{2/3},\quad \omega = \Omega\omega_{\text{с}} = \sqrt{2/3}\ \omega_{\text{с}}.$$

При этой частоте

$$T(\omega)_{\max} = \sqrt{27/11} = 1{,}57.$$

Расчет кривых $T(\omega)$ и $\left|\ln\frac{1}{T(\omega)}\right|$ сведен в табл. 12.9.

Таблица 12.9

ω	Ω	$T(\omega)$	$1/T(\omega)$	$\lvert\ln 1/T(\omega)\rvert$
0	0	1,0	1,0	0
$0{,}25\omega_{\text{с}}$	0,25	1,01	0,99	0,01
$0{,}5\omega_{\text{с}}$	0,5	1,11	0,9	0,105
$0{,}75\omega_{\text{с}}$	0,75	1,5	0,667	0,405
$\sqrt{2/3}\omega_{\text{с}}$	$\sqrt{2/3}$	1,57	0,637	0,551
$\omega_{\text{с}}$	1,0	1,0	1,0	0
$1{,}5\omega_{\text{с}}$	1,5	0,195	5,12	1,633
$2\omega_{\text{с}}$	2,0	0,072	13,9	2,632

$$2.\ R_{\text{н}} = 0{,}8R = 0{,}8\sqrt{L_1/C_2},\quad \underline{A}_{12}/R_{\text{н}} = j2{,}5\Omega(1-\Omega^2),\quad T(\omega) = \frac{1}{(1-2\Omega)^2 + 6{,}25\Omega^2(1-\Omega^2)^2}.$$

Найдем частоту, при которой $T(\omega)$ имеет экстремальные значения. В результате получим

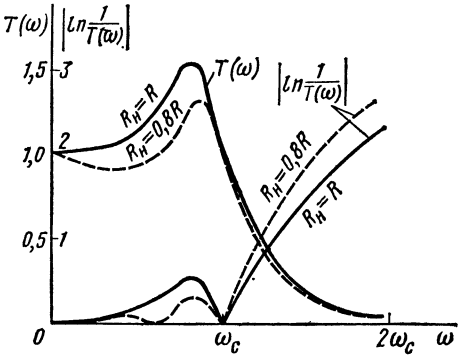


Рис. 12.13

$\Omega_1 = 0{,}862$; $\omega_1 = 0{,}862\omega_c$;
$\Omega_2 = 0{,}4$; $\omega_2 = 0{,}4\omega_c$.

Экстремальные значения $T(\omega)$ следующие: $T(\omega)_1 = 1{,}36$; $T(\omega)_2 = 0{,}925$.

Результаты расчета кривых $T(\omega)$ и $|\ln 1/T(\omega)|$ приведены в табл. 12.10, соответствующие кривые, построенные по результатам расчета, изображены на рис. 12.13.

Примечание. В рассмотренных случаях режим работы фильтра не является согласованным, так как нагрузка постоянна и для разных частот не является характеристической.

Таблица 12.10

ω	Ω	$T(\omega)$	$1/T(\omega)$	$\lvert \ln 1/T(\omega) \rvert$
0	0	1,0	1,0	0
$0{,}4\omega_c$	0,4	0,925	1,08	0,077
$0{,}6\omega_c$	0,6	1,0	1,0	0
$0{,}862\omega_c$	0,862	1,36	0,735	0,308
ω_c	1	1,0	1,0	0
$1{,}5\omega_c$	1,5	0,171	5,85	1,766
$2\omega_c$	2,0	0,0605	16,55	2,804

12.10. Требуется рассчитать Т-образный ФВЧ типа k, имеющий номинальное характеристическое сопротивление $R = 600$ Ом. Частота среза $f_c = 3200$ Гц. Построить характеристики A_C, B_C, $\underline{Z}_T$ в функции частоты f и в функции нормированной частоты $\Omega = f_c/f$.

Решение. Рассчитаем элементы фильтра, используя формулы и схему табл. 12.2:

$$L_2 = \frac{R}{2\omega_c} = \frac{600}{2 \cdot 2\pi \cdot 3200} \approx 0{,}015 \text{ Гн};$$

$$C_1 = \frac{1}{2\omega_c R} = \frac{1}{2 \cdot 2\pi \cdot 3200 \cdot 600} = 0{,}0415 \text{ мкФ}.$$

Уравнения кривых постоянных ослабления и фазы имеют вид: в полосе пропускания $A_C = 0$, $B_C = -2\arcsin f_c/f = -2\arcsin \Omega$, в полосе задерживания $A_C = 2\operatorname{arch} f_c/f = 2\operatorname{arch} \Omega$, $B_C = -\pi$.

Уравнение кривой характеристического сопротивления имеет вид

$$\underline{Z}_T = R\sqrt{1 - (f_c/f)^2} = R\sqrt{1 - \Omega^2}.$$

Расчет частотных характеристик сведен в табл. 12.11.

Таблица 12.11

Полоса	f, кГц	Ω	$\operatorname{ch}\frac{A_C}{2}$	$\sin\frac{B_C}{2}$	A_C, Нп	B_C, град	$\underline{Z}_т$, Ом
Задерживания	0	∞	∞	—	∞	—180	$-j\infty$
	0,8	4	4	—	4,13	—180	$-j2320$
	1,6	2	2	—	2,64	—180	$-j1040$
	2,4	1,33	1,33	—	1,59	—180	$-j526$
	3,2	1,0	1,0	—1,0	0	—180	0
Пропускания	4,0	0,8	—	—0,8	—	—106	360
	4,8	0,667	—	—0,667	—	—85	447
	5,6	0,572	—	—0,572	—	—70	492
	6,4	0,5	—	—0,5	—	—60	520

Кривые, построенные по полученным данным, изображены на рис. 12.14.

12.11. Определить частоту среза П-образного ФВЧ типа k, у которого $2L_2 = 0{,}4$ Гн, $C_1 = 0{,}7$ мкФ, и найти ослабление при $f = 0{,}5 f_c$.

12.12. Определить индуктивность и емкость ФВЧ типа k, если частота среза $f_c = 500$ Гц и номинальное характеристическое сопротивление $R = 1000$ Ом. Чему равна постоянная характеристического ослабления этого фильтра при частоте $f = 250$ Гц?

12.13. ФВЧ типа k, состоящий из двух звеньев с номинальным характеристическим сопротивлением $R = 5000$ Ом, должен иметь ослабление, равное 70 дБ при частоте $f = 250$ Гц. Определить частоту среза, индуктивность и емкость одного звена фильтра.

12.14. Частоты среза П-образного полосового фильтра типа k $f_1 = 12$ кГц, $f_2 = 15{,}2$ кГц, номинальное характеристическое сопротивление $R = 600$ Ом. Найти параметры элементов этого фильтра. Построить частотные характеристики A_C, B_C, $\underline{Z}_п$ в функции частоты и нормированной частоты Ω.

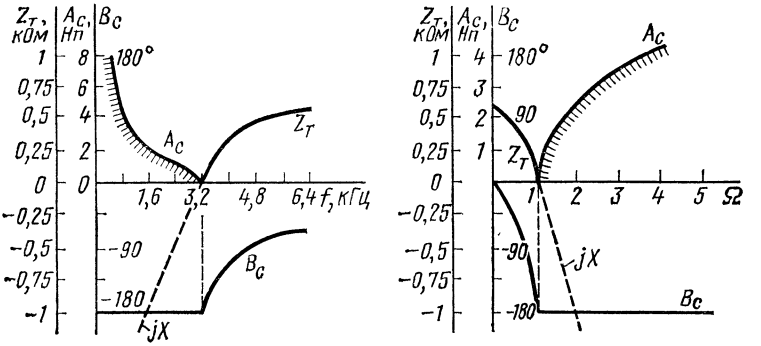


Рис. 12.14

Р е ш е н и е. Рассчитаем параметры элементов фильтра, используя формулы табл. 12.2:

$$L_1 = \frac{R}{\pi (f_2 - f_1)} = \frac{600}{3{,}14\,(15{,}2 - 12)\,10^3} = 0{,}06 \text{ Гн};$$

$$L_2 = \frac{R\,(f_2 - f_1)}{4\pi f_1 f_2} = \frac{600\,(15{,}2 - 12)\,10^3}{4 \cdot 3{,}14 \cdot 15{,}2 \cdot 12 \cdot 10^6} = 0{,}84 \text{ мГн};$$

$$C_1 = \frac{f_2 - f_1}{4\pi R f_1 f_2} = \frac{(15{,}2 - 12)\,10^3}{4 \cdot 3{,}14 \cdot 600 \cdot 15{,}2 \cdot 12 \cdot 10^6} = 2{,}33 \text{ нФ};$$

$$C_2 = \frac{1}{\pi (f_2 - f_1) R} = \frac{1}{3{,}14\,(15{,}2 - 12)\,10^3 \cdot 600} = 0{,}167 \text{ мкФ}.$$

Уравнения кривых постоянных характеристического ослабления и фазы имеют вид:

в полосе пропускания $A_C = 0$; $B = 2\arcsin \Omega$;

в полосе задерживания $A_C = 2\operatorname{arch} |\Omega|$, $B_C = \mp\pi$, где

$$\Omega = \frac{f/f_m - f_m/f}{f_2/f_m - f_m/f_2}, \quad f_m = \sqrt{f_1 f_2} = 10^3 \sqrt{12 \cdot 15{,}2} = 13{,}5 \text{ кГц}.$$

Уравнение кривой характеристического сопротивления имеет вид

$$\underline{Z}_\text{п} = R \Big/ \sqrt{1 - \Omega^2}.$$

Расчет частотных характеристик сведен в табл. 12.12.

Таблица 12.12

Полоса	f, кГц	Ω	$\sin \frac{B_C}{2}$	$\operatorname{ch} \frac{A_C}{2}$	A_C, Нп	B_C, град	$\underline{Z}_\text{п}$, Ом
Задерживания	0	$-\infty$	—	∞	∞	-180	0
	4	-13	—	13	6,52	-180	$j46{,}1$
	8	$-4{,}65$	—	4,65	4,44	-180	$j132$
	12	$-1{,}0$	$-1{,}0$	1,0	0	-180	∞
Пропускания	13	$-0{,}316$	$-0{,}316$	—	—	-37	632
	13,5	0	0	—	—	-0	600
	14	0,316	0,316	—	—	37	632
	15,2	1,0	1,0	1,0	0	180	∞
Задерживания	18	2,46	—	2,46	3,1	180	$-j268$
	20	3,4	—	3,4	3,8	180	$-j185$

На рис. 12.15 по полученным результатам построены частотные характеристики.

12.15. Т-образный полосовой фильтр (ППФ) типа k имеет следующие параметры: $L_1/2 = 30$ мГн, $L_2 = 0{,}84$ мГн, $2C_1 = 4{,}66$ нФ, $C_2 =$

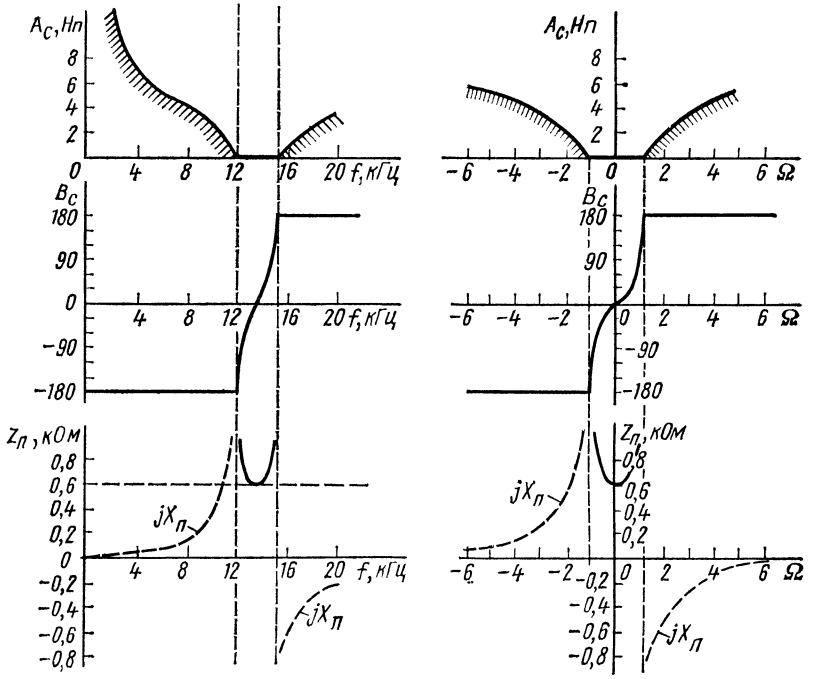


Рис. 12.15

= 167 нФ. Определить постоянную характеристического ослабления фильтра при частоте $f = 20$ кГц.

12.16. Рассчитать элементы заграждающего фильтра типа k, не пропускающего полосу частот от $f_1 = 20$ кГц до $f_2 = 23$ кГц, и определить его постоянную характеристического ослабления при частоте 21 кГц. Номинальное характеристическое сопротивление фильтра $R = 600$ Ом.

В. Фильтры типа m. Совместная работа фильтров типа k и m

12.17. Последовательно-производный ФНЧ типа m имеет частоту среза $f_c = 3200$ Гц и номинальное характеристическое сопротивление $R = 600$ Ом. Начертить схему и определить элементы Г-образного полузвена этого фильтра, если отклонение характеристического сопротивления $Z_{шm}$ от его номинального значения для рабочей полосы частот должно быть не более $\pm$ 10%. Рассчитать и построить кривые зависимостей характеристического сопротивления $Z_{шm}$, постоянные ослабления A_C и фазы B_C от частоты.

Р е ш е н и е. Схема Г-образного полузвена изображена на рис. 12.16. По табл. 12.4 находим величину параметра $m = 0{,}542$,

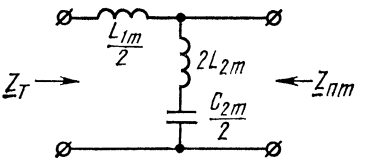


Рис. 12.16

обеспечивающего требуемую степень постоянства величины характеристического сопротивления $\pm$ 10% в пределах рабочей полосы частот ($0 \div 0{,}94$) $f_c = 0 \div 3000$ Гц. Для расчета элементов производного фильтра типа m определим по формулам табл. 12.2 элементы прототипа ФНЧ типа k:

$$L_1 = \frac{R}{\pi f_c} = \frac{600}{3{,}14 \cdot 3200} = 0{,}06 \text{ Гн};$$

$$C_2 = \frac{1}{\pi f_c R} = \frac{1}{3{,}14 \cdot 3200 \cdot 600} = 0{,}167 \text{ мкФ}.$$

Расчет элементов Г-образного полузвена произведем по формулам табл. 12.3:

$$L_{1m}/2 = mL_1/2 = 16{,}25 \text{ мГн}; \quad 2L_{2m} = 2\,\frac{1-m^2}{4m}\,L_1 = 39 \text{ мГн};$$

$$C_{2m}/2 = mC_2/2 = 0{,}045 \text{ мкФ}.$$

Уравнения кривых зависимостей $Z_{пт}$, A_c, B_c от частоты определим по (12.7) и (12.8а):

$$Z_{пт} = \frac{R}{\sqrt{1-\Omega_2}}\,[1 - (1-m^2)\,\Omega^2];$$

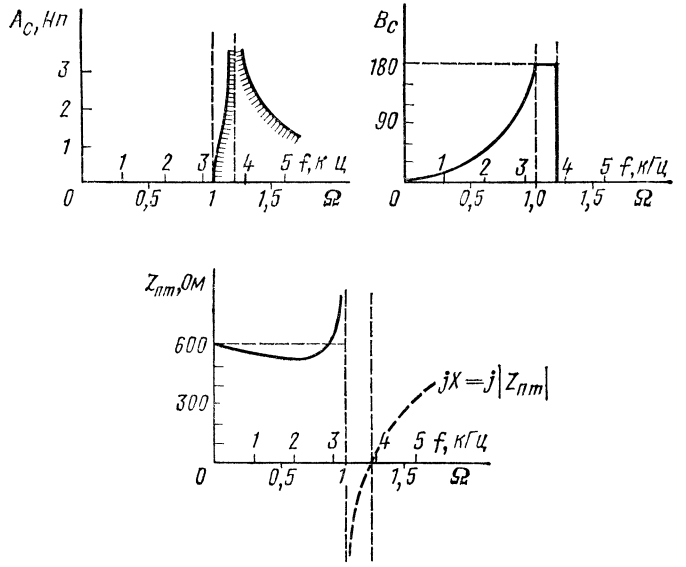


Рис. 12.17

$$A_C = 2\,\text{arch}\,\frac{m\Omega}{\sqrt{|1-(1-m^2)\,\Omega^2|}}\ (\text{при } f<f_\infty);$$

$$A_C = 2\,\text{arsh}\,\frac{m\Omega}{\sqrt{|1-(1-m^2)\,\Omega^2|}}\ (\text{при } f>f_\infty);$$

$$B_C = 2\arcsin\frac{m\Omega}{\sqrt{1-(1-m^2)\,\Omega^2}}\ (\text{в полосе пропускания});$$

$$B = \pm\pi,\ 0\ (\text{в полосе задерживания}).$$

До расчета характеристик по (12.9б) найдем частоту бесконечного затухания

$$f_\infty = \frac{f_c}{\sqrt{1-m^2}} = \frac{3200}{\sqrt{1-0{,}542^2}} = 3810\ \text{Гц}.$$

Расчет частотных характеристик сведен в табл. 12.13, а соответствующие кривые даны на рис. 12.17.

Таблица 12.13

Полоса	f, Гц	$\Omega = \frac{f}{f_c}$	$\text{sh}\frac{A_C}{2}$	$\text{ch}\frac{A_C}{2}$	$\sin\frac{B_C}{2}$	A_C, Нп	B_C, град	$Z_{\text{п}m}$, Ом
Пропускания	0	0	—	—	0	—	0	600
	800	0,25	—	—	0,138	—	16	591
	1600	0,5	—	—	0,298	—	35	571
	2400	0,75	—	—	0,523	—	63	546
	3200	1,0	—	1,0	1,0	0	180	∞
Задерживания	3600	1,125	—	1,84	—	2,44	180	$-j$ 143
	3810	1,19	∞	∞	—	∞	180	0
	4000	1,25	2,46	—	—	3,27	0	j 80
	4800	1,5	1,06	—	—	1,85	0	j 316

12.18. Т-образный параллельно-производный ФНЧ типа m имеет следующие параметры элементов (рис. 12.18):
$L_{1m} = 30$ мГн, $C_{1m} = 0{,}0625$ мкФ, $C_{2m} = 0{,}083$ мкФ. Определить частоту среза и постоянную ослабления фильтра при частоте 5 кГц.

12.19. Сложный ФНЧ имеет частоту среза $f_c = 3200$ Гц, его номинальное характеристическое сопротивление $R = 600$ Ом. Фильтр состоит из звена типа k и звена типа $m = 0{,}542$, соединенных каскадно на основе согласования характеристических сопротивлений. На входе и выходе фильтра характеристическое сопротивление должно иметь характер $Z_{\text{п}m}$.

Требуется выбрать и начертить схему фильтра, рассчитать его эле-

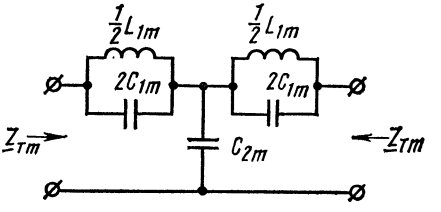


Рис. 12.18

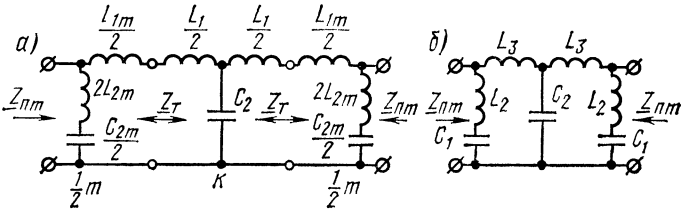


Рис. 12.19

менты и построить кривую характеристического ослабления в функции частоты f.

Р е ш е н и е. При составлении схемы сложного фильтра, состоящего из двух звеньев, на входе и выходе применяют полузвенья типа m, в середине — звено типа k. Поскольку на входе и выходе фильтра характеристическое сопротивление должно иметь характер $\underline{Z}_{\text{п}\,m}$, согласование звеньев будет производиться на основе равенства характеристических сопротивлений $\underline{Z}_{\text{т}}$. Поэтому оконечные полузвенья типа m должны быть последовательно-производными.

Схема, отвечающая изложенным требованиям, изображена на рис. 12.19, *а*. После упрощений схема фильтра принимает вид рис. 12.19, *б*. Элементы звеньев рассчитаны в задачах 12.3 и 12.17: $L_1 = 0{,}06$ Гн, $C_2 = 0{,}167$ мкФ, $L_{1\,m} = 0{,}0325$ Гн, $L_{2\,m} = 19{,}5$ мГн, $C_{2\,m} = 0{,}09$ мкФ.

Параметры элементов сложного фильтра (см. рис. 12.19, *б*) следующие: $L_2 = 2L_{2m} = 39$ мГн, $L_3 = \frac{L_{1m} + L_1}{2} = 46$ мГн, $C_1 = \frac{C_{2m}}{2} =$ $= 0{,}045$ мкФ, $C_2 = 0{,}165$ мкФ.

При каскадном соединении звеньев на основе согласования характеристических сопротивлений общее ослабление равно сумме ослаблений отдельных звеньев: $A = A_m + A_k$. Значения A_k рассчитаны в задаче 12.3, значения A_m — в задаче 12.17. Складывая их, получим зависимость характеристического ослабления сложного фильтра от частоты (табл. 12.14).

Таблица 12.14

f, кГц	3,2	3,6	3,81	4,0	4,8	5,6
Ω	1	1,125	1,19	1,25	1,5	1,75
A_k, Нп	0	0,99	1,22	1,39	1,92	2,32
A_m, Нп	0	2,44	∞	3,27	1,85	1,59
$A = A_k + A_m$, Нп	0	3,43	∞	4,66	3,77	3,91
A, дБ	0	29,8	∞	40,5	32,8	34,0

Кривая частотной зависимости характеристического ослабления сложного фильтра изображена на рис. 12.20.

12.20. Определить параметр m и элементы оптимального Г-образного последовательно-производного ФВЧ типа m, характеристическое сопротивление $Z_{\text{ц}\,m}$ которого отклоняется от его номинального значения $R = 600$ Ом не более чем на 5% в рабочей области частот от 5600 Гц и выше. Чему равна частота среза фильтра?

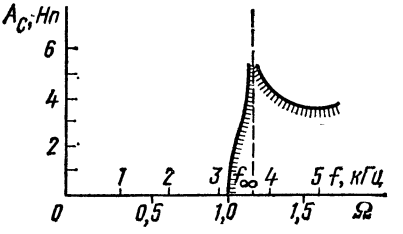


Рис. 12.20

12.21. ФВЧ задачи 12.11 соединен каскадно с ФВЧ типа m на основе согласования характеристических сопротивлений. Начертить схему сложного симметричного фильтра, имеющего на входе и выходе характеристическое сопротивление фильтра типа m, и найти значение характеристической постоянной ослабления при частоте $f = 0{,}5\ f_c$, если $m = 0{,}59$.

12.22. Звенья и полузвенья ФНЧ на рис. 12.21, *а*, *б* и *в* имеют одинаковую частоту среза и номинальное значение характеристического сопротивления. То же — ФВЧ на рис. 12.21, *г*, *д*, *е*. Под каждым звеном или полузвеном дана величина параметра m. Указать, в каких случаях соединение осуществлено по принципу согласования характеристических сопротивлений.

12.23. Полосовой фильтр типа m ($m = 0{,}59$) соединен каскадно с ППФ задачи 12.14 по принципу согласования характеристических сопротивлений так, что получен симметричный фильтр, имеющий на входе и выходе характеристическое сопротивление фильтра типа m. Начертить схему соединения, рассчитать параметры элементов звена типа m и построить частотные зависимости A_C, B_C, $\underline{Z}_{\text{т}\,m}$ этого фильтра.

Р е ш е н и е. Схема каскадного соединения фильтров изображена на рис. 12.22. Для получения симметричного фильтра звено типа m

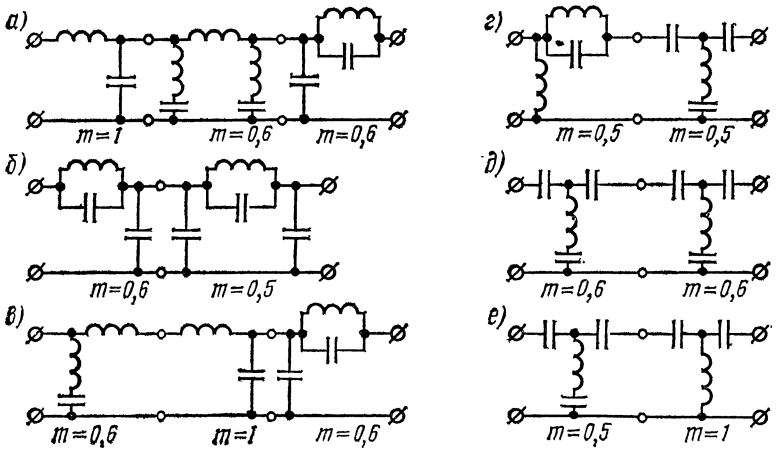


Рис. 12.21

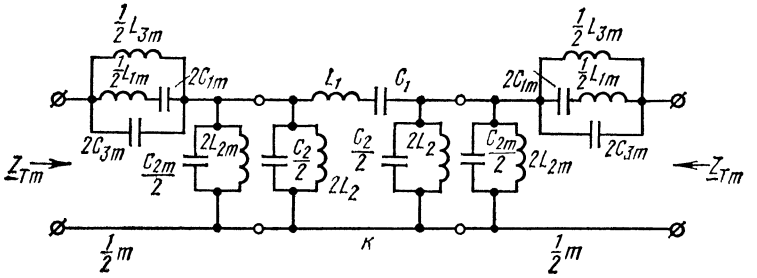


Рис. 12.22

разбито на два полузвена. Элементы звена типа k были рассчитаны в задаче 12.14: $L_1 = 0{,}06$ Гн, $L_2 = 0{,}84$ мГн, $C_1 = 2{,}33$ нФ, $C_2 = 0{,}167$ мкФ.

Элементы полузвеньев типа m рассчитываются по формулам табл. 12.3: $L_{1m} = mL_1 = 0{,}0354$ Гн; $L_{2m} = L_2/m = 1{,}42$ мГн;

$$L_{3m} = \frac{4m}{1-m^2} L_2 = 3{,}05 \text{ мГн}; \quad C_{1m} = \frac{C_1}{m} = 3{,}95 \text{ нФ};$$

$$C_{3m} = \frac{1-m^2}{4m} C_2 = 0{,}046 \text{ мкФ}.$$

Найдем частоты бесконечного ослабления по формулам (12.9а) с учетом значения Ω из (12.8б):

$$f_{1\infty} = \sqrt{\frac{(f_2-f_1)^2}{4(1-m^2)} + f_m^2} - \frac{f_2-f_1}{2\sqrt{1-m^2}} =$$

$$= \sqrt{\frac{(15{,}2-12)^2}{4(1-0{,}59^2)} + 13{,}5^2} - \frac{15{,}2-12}{2\sqrt{1-0{,}59^2}} = 13{,}68 - 2 = 11{,}68 \text{ кГц};$$

$$f_{2\infty} = \sqrt{\frac{(f_2-f_1)^2}{4(1-m)^2} + f_m^2} + \frac{f_2-f_1}{2\sqrt{1-m^2}} = 13{,}68 + 2 = 15{,}68 \text{ кГц}.$$

Таблица 12.15

f, кГц	Ω	$\operatorname{sh}\frac{A_C}{2}$	$\operatorname{ch}\frac{A_C}{2}$	$\sin\frac{B_C}{2}$	A_C, Нп	B_C, град	Z_{Tm}, Ом
0	$-\infty$	0,73	—	—	1,36	0	0
4	—13	0,735	—	—	1,37	0	j 71
8	—4,65	0,745	—	—	1,38	0	j 209
11,68	—1,24	∞	∞	—	∞	—180	∞
12	—1,0	—	1,0	—1,0	0	—180	0
13	—0,316	—	—	—0,193	—	— 22	610
13,5	0	—	—	0	—	0	600
14	0,316	—	—	0,193	—	22	610
15,2	1,0	—	1,0	1,0	0	180	0
15,68	1,24	∞	∞	—	∞	180	∞
18	2,46	0,85	—	—	1,54	0	$-j$ 463
20	3,4	0,785	—	—	1,44	0	$-j$ 297

Уравнения частотных зависимостей A_C, B_C приведены в задаче 12.17, формула нормированной частоты Ω — в задаче 12.14. Характеристическое сопротивление $\underline{Z}_{\text{т}\,m}$ определяется по формуле (12.7). Расчет характеристик сведен в табл. 12.15.

Зависимости A_C, B_C, $\underline{Z}_{\text{т}\,m}$ от частоты изображены на рис. 12.23.

12.24. Начертить схему и рассчитать элементы Т-образного параллельно-производного ППФ типа m ($m = 0{,}59$, $R = 1$ кОм) с полосой частот от $f_1 = 2{,}0$ МГц до $f_2 = 2{,}2$ МГц. Вычислить его характеристическое ослабление при частоте 1 МГц.

12.25. Составить схему согласованного ППФ, имеющего четыре звена, в том числе: два звена типа k, одно параллельно-производное звено типа m ($m = m_1$), одно последовательно-производное звено типа m ($m = m_2$). Характеристическое сопротивление сложного фильтра со стороны входа и выхода должно иметь характер $Z_{\text{г}\,m}$.

12.26. Определить частоты бесконечного ослабления и величину характеристического ослабления при $f = 15$ кГц П-образного ПЗФ типа m ($m = 0{,}59$, $R = 200$ кОм) с полосой непропускания от 10 до 20 кГц.

12.27. ФВЧ задачи 12.10 включен для работы между источником и нагрузкой, сопротивления которых одинаковы и равны $R_{\text{и}} = R_{\text{н}} = 600$ Ом. Рассчитать и построить кривую рабочего ослабления в

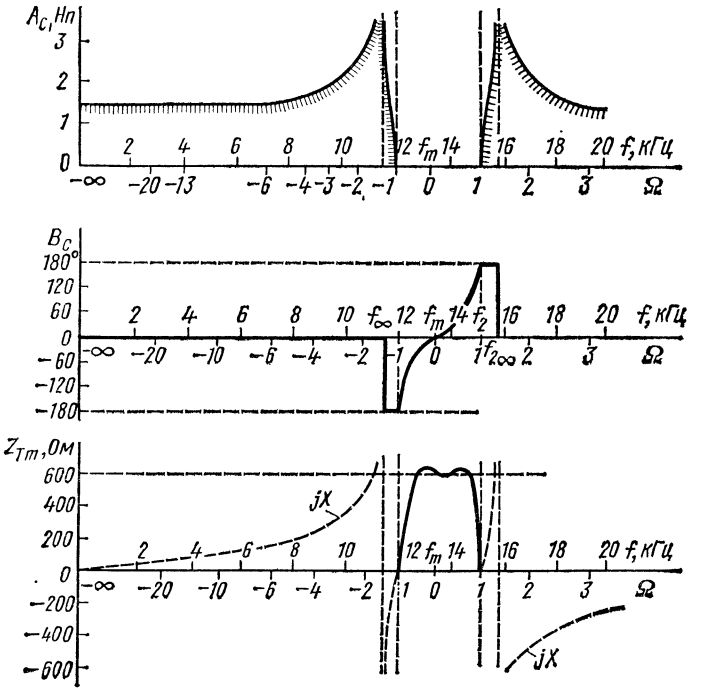


Рис. 12.23

полосе пропускания и задерживания и входного сопротивления в полосе пропускания.

Р е ш е н и е. Для симметричного фильтра при $\underline{Z}_{1c} = \underline{Z}_{2c} = \underline{Z}_c$ и $R_и = R_н$ используются следующие формулы рабочего ослабления: в полосе пропускания

$$A_р = \frac{1}{2} \ln \left| 1 + \frac{1}{4} \left(\frac{|\underline{Z}_c|}{R_н} - \frac{R_н}{|\underline{Z}_c|} \right)^2 \sin^2 B \right|,$$

в полосе задерживания

$$A_р = A_c + \ln \frac{1}{4} \left(\frac{|\underline{Z}_c|}{R_н} + \frac{R_н}{|\underline{Z}_c|} \right).$$

Расчет кривой рабочего ослабления сведен в табл. 12.16.

Таблица 12.16

f, кГц	A_C, Нп	B, град	$\lvert\underline{Z}_c\rvert$, Ом	$\ln\frac{1}{4}\left(\frac{\lvert\underline{Z}_c\rvert}{R_н}+\frac{R_н}{\lvert\underline{Z}_c\rvert}\right)$	$\frac{1}{4}\left(\frac{\underline{Z}_c}{R_н}-\frac{R_н}{\lvert\underline{Z}_c\rvert}\right)^2 \sin^2 B$	$A_р$, Нп
0	∞	— 180	∞	∞	—	∞
0,8	4,13	— 180	2320	0,01	—	4,14
1,6	2,64	— 180	1040	— 0,548	—	2,092
2,4	1,59	— 180	526	— 0,683	—	0,907
3,2	0	— 180	0	—	0	0
4,0	—	— 106	360	—	0,265	0,115
4,8	—	— 85	447	—	0,089	0,043
5,6	—	— 70	492	—	0,036	0,019
6,4	—	— 60	520	—	0,015	0,007

Входное сопротивление определяется по формуле (11.21а и б). Поскольку в полосе пропускания $\underline{Z}_c$ является активным сопротивлением (т. е. действительным числом), а $\underline{\Gamma}_c = jB_c$,

$$\text{th}\,(\underline{\Gamma}_c + n) = \text{th}\,(n + jB_c).$$

Таблица 12.17

f, кГц	Z_C, Ом	n	B_c, град	sh $2n$	ch $2n$	sin $2B_c$	cos $2B_c$	$\lvert\text{th}(\underline{\Gamma}_c + n)\rvert$	$Z_{вх}$, Ом
3,2	0	0	— 180	0	1,0	0	1,0	0	0
3,46	228	0,4	— 135	0,888	1,337	1,0	0	1,0	228
4,0	360	0,693	— 106	1,87	2,12	0,53	— 0,85	1,9	685
4,53	424	0,881	— 90	2,73	2,99	0	— 1,0	1,37	580
4,8	447	0,965	— 84	3,37	3,56	— 0,208	— 0,98	1,345	602
5,6	492	1,157	— 70	4,99	5,09	— 0,642	— 0,768	1,165	573
6,4	520	1,32	— 60	6,97	7,04	— 0,867	— 0,5	1,071	558

Гиперболический тангенс комплексного аргумента можно рассчитать по следующей формуле (см. приложение 2):

$$\operatorname{th}(n + jB_c) = \frac{\operatorname{sh} 2n}{\operatorname{ch} 2n + \cos 2B_c} + j\,\frac{\sin 2B_c}{\operatorname{ch} 2n + \cos 2B_c}.$$

Расчет входного сопротивления приведен в табл. 12.17.

Кривые рабочего ослабления и входного сопротивления изображены на рис. 12.23.

Г. Мостовые фильтры

12.28. Определить, к какому типу по полосе пропускания относится каждая из схем мостовых фильтров, изображенных на рис. 12.24.

Задачу решить графически анализом сопротивлений продольных и диагональных плеч, воспользовавшись условиями для определения

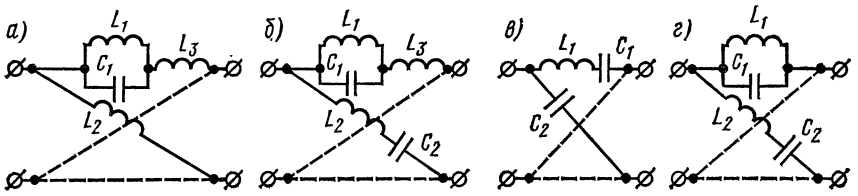


Рис. 12.24

полос пропускания мостовых фильтров. Дополнительно задается: в схеме рис. 12.24, *б* резонансная частота диагонального плеча совпадает с частотой резонанса токов продольного плеча; в схеме рис. 12.24, *г* резонансные частоты плеч не совпадают.

Построить качественно кривую характеристического ослабления фильтра. Указать, при каких частотах характеристическое ослабление фильтра равно бесконечности.

Р е ш е н и е. Рассмотрим схему рис. 12.24, *а*. Продольное плечо имеет две резонансные частоты, при этом первой является частота ω_2 резонанса токов, так как это плечо имеет путь для постоянного тока, и второй — частота ω_3 резонанса напряжений (см. гл. 10, п. 4 основных положений). На рис. 12.25, *а* нанесены графики сопротивлений продольного Z_a и диагонального Z_b плечей в функции ω.

Как известно из теории, в полосе пропускания сопротивления Z_a и Z_b должны иметь разные знаки. Эта полоса определяется граничными частотами ω_2, где $Z_a = \infty$, и ω_3, где $Z_a = 0$ (на рис. 12.25, *а* заштрихована). Следовательно, рассматриваемая схема соответствует полосовому фильтру.

Рассмотрим схему 12.24, *б*. График сопротивления продольного плеча такой же, как и в предыдущем случае, его резонансные частоты ω_2 и ω_3. Диагональное плечо имеет одну резонансную частоту. По

условию это ω_2. Полоса пропускания соответствует разным знакам Z_a и Z_b, это область частот от 0 до ω_3 (на рис. 12.25, *б* эта область заштрихована). Схема соответствует фильтру нижних частот. Разбор схем рис. 12.24, *в* и *г* рекомендуется проделать самостоятельно.

12.29. Мостовой ФНЧ (рис. 12.26) имеет частоту среза $f_c = 3{,}2$ кГц и частоту пика ослабления $f_\infty = 4$ кГц, при которой $Z_a = Z_b = 400$ Ом. Определить значение элементов фильтра L_1, L_2, C_2. Рассчитать характеристическое ослабление фильтра при нормированных частотах $\Omega = 1{,}25$; 1,5; 2 и построить частотную характеристику. Рассчитать характеристическое сопротивление и фазовую постоянную при следующих значениях нормированной частоты: $\Omega = 0{,}9$; 0,75; 0,5; 0 и построить их характеристики. На какие характеристики и какое влияние окажет взаимная замена местами продольного и диагонального плеч?

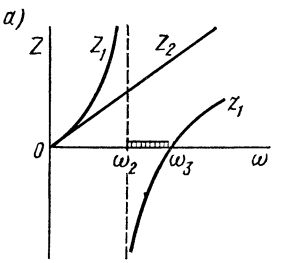


Рис. 12.25

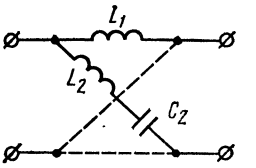


Рис. 12.26

Р е ш е н и е. Сопротивления продольного и диагонального плеч фильтра определяются по формулам

$$\underline{Z}_a = j\omega L_1; \qquad \underline{Z}_b = j\,\frac{L_2}{\omega}\,(\omega^2 - \omega_c^2).$$

Зная значения $Z_a = Z_b$ при частоте f_∞, получим

$$L_1 = \frac{Z_a}{\omega_\infty} = \frac{400}{2\pi \cdot 4 \cdot 10^3} = 0{,}016 \text{ Гн};$$

$$L_2 = \frac{\omega_\infty Z_b}{\omega_\infty^2 - \omega_c^2} = \frac{2\pi \cdot 4 \cdot 10^3 \cdot 400}{4\pi^2 \cdot (4^2 - 3{,}2^2)\,10^6} = 0{,}044 \text{ Гн}.$$

Для определения емкости C_2 используем формулу частоты среза

$$\omega_c = 1/\sqrt{L_2 C_2}.$$

Отсюда

$$C_2 = \frac{1}{L_2 \omega_c^2} = \frac{1}{0{,}044 \cdot 4\pi^2 \cdot 3{,}2^2 \cdot 10^6} = 0{,}0564 \text{ мкФ}.$$

Характеристические постоянная ослабления, сопротивления и фазы (в полосе пропускания) фильтра определяют по формулам, которые получают из формулы (12.10) и табл. 12.5:

$$A_C = 2\,\mathrm{arth}\left|\frac{m\Omega}{\sqrt{1-\Omega^2}}\right|, \text{ где } m = \sqrt{\frac{L_1}{L_2}} = \frac{0{,}016}{0{,}044} = 0{,}6;$$

$$Z_м = R\sqrt{1-\Omega^2}, \text{ где } R = \sqrt{\frac{L_1}{C_2}} = \sqrt{\frac{0{,}0159}{0{,}0564\cdot 10^{-6}}} = 530 \text{ Ом};$$

$$B_C = 2\mathrm{arctg}\,\frac{m\Omega}{\sqrt{1-\Omega^2}}.$$

Расчет характеристик приведен в табл. 12.18.

Таблица 12.18

Ω	$\frac{m\Omega}{\sqrt{1-\Omega^2}}$	$\mathrm{th}\frac{A_C}{2}$	$\mathrm{tg}\frac{B_C}{2}$	A_C, Нп	B_C, град	$\underline{Z}_м$, Ом
0	0	—	0	—	0	530
0,5	0,347	—	0,347	—	38	459
0,75	0,689	—	0,689	—	69	350
0,9	1,24	—	1,24	—	102	231
1,0	∞	—	∞	—	180	0
1,25	1,0	1,0	—	∞	180	$j396$
1,5	0,805	0,805	—	2,23	0	$j594$
2,0	0,695	0,695	—	1,72	0	$j920$

Кривые частотных зависимостей A_C, B_C, $Z_м$ изображены на рис. 12.27.

Если в схеме рис. 12.26 элементы $\underline{Z}_a$ и $\underline{Z}_b$ поменять местами, то частотные характеристики A_C и $\underline{Z}_м$ не изменятся, а фазовая постоянная изменится на π.

12.30. Параметры полосового фильтра (см. рис. 12.24, *а*): $L_1 = 0{,}02$ Гн, $C_1 = 8{,}8$ нФ, $L_3 = 0{,}0326$ Гн, $L_2 = 0{,}06$ Гн.

Найти частоты среза и выяснить, имеет ли фильтр полюс ослабления и если имеет, то найти его. Вычислить затухание при $\omega' = 5\cdot 10^4 \text{с}^{-1}$, $\omega'' = 12\cdot 10^4 \text{с}^{-1}$ и построить качественно график ослабления в функции частоты. Определить характеристическую фазу B_C при $\omega''' = 8\cdot 10^4 \text{с}^{-1}$, $\omega^{IV} = 9\cdot 10^4 \text{с}^{-1}$ и построить качественно ее

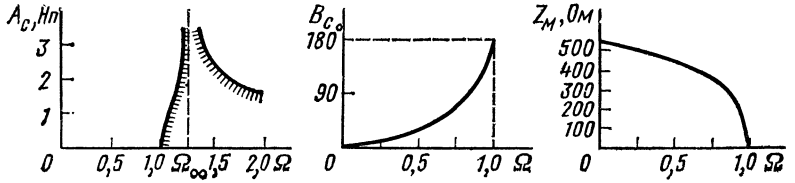


Рис. 12.27

график. Составить уравнение характеристического сопротивления и построить (качественно) его график.

Р е ш е н и е. Сопротивление продольного плеча фильтра выражается формулой

$$\underline{Z}_a = j\omega L_3 \frac{\omega_3^2 - \omega^2}{\omega_2^2 - \omega^2},$$

где

$$\omega_2 = 1/\sqrt{L_1 C_1}, \quad \omega_3 = \sqrt{\omega_2^2 + \frac{1}{L_3 C_1}}.$$

Как видно из рис. 12.25, *а*, частоты среза соответствуют значениям $Z_a = \infty$ и $Z_a = 0$. В соответствии с этим получим

$$\omega_2 = \frac{1}{\sqrt{L_1 C_1}} = 7{,}52 \cdot 10^4 \text{ с}^{-1}; \quad f_2 = 12 \text{ кГц};$$

$$\omega_3 = \sqrt{\omega_2^2 + \frac{1}{L_3 C_1}} = 9{,}55 \cdot 10^4 \text{ с}^{-1}, \quad f_3 = 15{,}2 \text{ кГц}.$$

Для выяснения существования полюса ослабления используем условие $\underline{Z}_a = \underline{Z}_b$:

$$j\omega L_3 \frac{\omega_3^2 - \omega^2}{\omega_2^2 - \omega^2} = j\omega L_2.$$

После преобразования этого уравнения находим

$$\omega_\infty = \sqrt{\frac{\frac{L_2}{L_3}\omega_2^2 - \omega_3^2}{\frac{L_2}{L_3} - 1}} = 3{,}86 \cdot 10^4 \text{ с}^{-1}; \quad f_\infty = 6{,}15 \text{ кГц}.$$

Характеристическое ослабление фильтра определяют из формулы (см. табл. 12.5)

$$\left.\begin{array}{ll} \text{при} & Z_a < Z_b \quad \operatorname{th}\frac{A_c}{2} \\ \text{при} & Z_a > Z_b \quad \operatorname{cth}\frac{A_c}{2} \end{array}\right\} = \sqrt{\left|\frac{Z_a}{Z_b}\right|} = \sqrt{\frac{L_3}{L_2}\left|\frac{\omega_3^2 - \omega^2}{\omega_2^2 - \omega^2}\right|}.$$

Рассчитаем характеристическое ослабление фильтра при частотах ω' и ω'':

при $\omega = \omega' = 5 \cdot 10^4$ с$^{-1}$ $(Z_a > Z_b)$

$$\operatorname{cth}\frac{A_c}{2} = \sqrt{\frac{0{,}0326}{0{,}06}\left|\frac{9{,}55^2 - 5^2}{7{,}52^2 - 5^2}\right|} = 1{,}075;$$

$$\text{th}\frac{A_C}{2} = \frac{1}{1{,}075} = 0{,}932, \quad \frac{A_C}{2} =$$

$= \text{arth}\ 0{,}932 = 1{,}675$, $A_C = 3{,}35$ Нп;
при $\omega = \omega'' = 12 \cdot 10^4\ \text{с}^{-1}$ $(Z_a < Z_b)$

$$\text{th}\frac{A_C}{2} = 0{,}57; \quad A = 1{,}29 \text{ Нп}.$$

Частотный график характеристического ослабления качественно построен на рис. 12.28, *а*. Характеристическая фаза B_C в области пропускания определяется по формуле табл. 12.5;

$$\text{tg}\frac{B_C}{2} = \sqrt{\left|\frac{\underline{Z}_a}{\underline{Z}_b}\right|}.$$

Рассчитаем значения B_C для частот ω''' и ω^{IV}: при $\omega = \omega''' = 8 \cdot 10^4 \text{с}^{-1}$

$$\text{tg}\frac{B_C}{2} = \sqrt{\frac{0{,}0326}{0{,}06}\left|\frac{9{,}55^2 - 8^2}{7{,}52^2 - 8^2}\right|} =$$

$$= 1{,}425;$$

$$\frac{B_C}{2} = \text{arctg}\,1{,}425 = 55°; \quad B = 110°;$$

при $\omega = \omega^{IV} = 9 \cdot 10^4\ \text{с}^{-1}$

$$\text{tg}\frac{B_C}{2} = 0{,}484; \quad B_C = 52°.$$

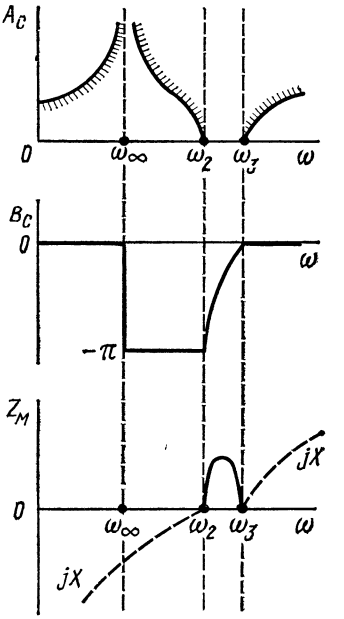


Рис. 12.28

Частотная кривая фазовой постоянной качественно построена на рис. 12.28, *б*.

Уравнение характеристического сопротивления фильтра имеет вид

$$\underline{Z}_M = \sqrt{\underline{Z}_a \underline{Z}_b} = \sqrt{-\omega^2 L_1 L_4 \frac{\omega_3^2 - \omega^2}{\omega_2^2 - \omega^2}}.$$

Качественное построение частотной характеристики $\underline{Z}_M$ показано на рис. 12.28, *в*.

12.31. Фильтры рис. 12.24, *б*, *в* и *г* имеют параметры:

в схеме *б* $L_1 = 0{,}02$ Гн, $C_1 = 8{,}8$ нФ,
$L_2 = 0{,}04$ Гн, $L_3 = 0{,}0326$ Гн, $C_2 = 4{,}4$ нФ;
в схеме *в* $L_1 = 0{,}02$ Гн, $C_1 = 4$ нФ, $C_2 = 8{,}8$ нФ;
в схеме *г* $L_1 = 0{,}02$ Гн, $C_1 = 8{,}8$ нФ, $L_2 = 0{,}02$ Гн, $C_2 = 4{,}4$ нФ.

Для каждого из них найти частоты среза, частоту полюса ослабления (там, где он имеется) и ослабление при $\omega' = 10^5 \text{с}^{-1}$.

Построить (качественно) графики ослабления в функции частоты. Составить уравнения характеристических сопротивлений и построить (качественно) их графики.

12.32. Продольные плечи мостового ФНЧ (см. рис. 12.24, *б*) имеют резонансные частоты $\omega_2 = \omega_{2c} = 6 \cdot 10^4 с^{-1}$, $\omega_3 = \omega_{3c} = 8 \cdot 10^4 с^{-1}$, а диагональные плечи $\omega_2 = \omega_{2c} = 6 \cdot 10^4 с^{-1}$. Известны $L_3 = 0{,}04$ Гн, $L_2 = 0{,}02$ Гн. Вывести формулу постоянной ослабления и определить ее значения A_C' и A_C'' при $\omega' = 8{,}2 \cdot 10^4 с^{-1}$ и $\omega'' = 8{,}7 \cdot 10^4 с^{-1}$.

Д. Задачи на различные темы, не рассмотренные в предыдущих пунктах

12.33. Определить элементы мостового и дифференциально-мостового фильтров, эквивалентных П-образному последовательно-про-

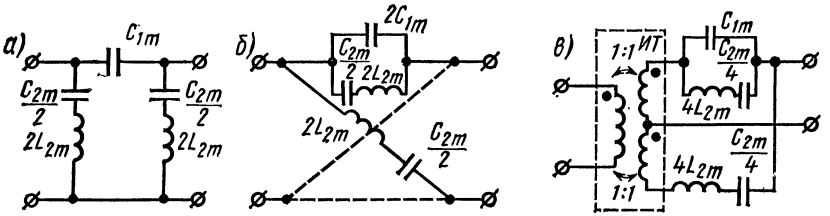


Рис. 12.29

изводному ФНЧ типа m с элементами $C_{1\,m} = 0{,}1$ мкФ, $2L_{2\,m} = 50$ мГн, $C_{2m}/2 = 0{,}12$ мкФ (рис. 12.29, *а*).

Р е ш е н и е. Сопротивление одного плеча эквивалентного мостового фильтра должно совпадать с сопротивлением поперечного плеча П-образного фильтра типа m [см. формулу (12.13)]:

$$\underline{Z}_{2m} = 2\underline{Z}_{2п} = 2j\omega L_{2m} + \frac{2}{j\omega C_{2m}}.$$

Сопротивление другого плеча мостового фильтра определяется по формуле (12.13):

$$\underline{Z}_{1м} = \frac{\underline{Z}_{1т}}{2} + \frac{2\underline{Z}_{1п}\underline{Z}_{2п}}{\underline{Z}_{1п} + 4\underline{Z}_{2п}} = \frac{\underline{Z}_{1п}\underline{Z}_{2п}}{\frac{1}{2}\underline{Z}_{1п} + 2\underline{Z}_{2п}}.$$

Таким образом, продольное плечо мостового фильтра должно содержать две параллельные ветви с сопротивлениями $2\underline{Z}_{2п}$ и $\frac{1}{2}\underline{Z}_{1п}$. Соответствующая схема искомого мостового фильтра изображена на рис. 12.29, *б*. Ее элементы: $2C_{1\,m} = 0{,}2$ мкФ, $C_{2\,m}/2 = 0{,}12$ мкФ, $2L_{2\,m} = 50$ мГн.

Сопротивление плеч дифференциально-мостового фильтра (см. рис. 12.5):

$$2\underline{Z}_{2м} = 4\underline{Z}_{2п} = 4j\omega L_{2m} + \frac{4}{j\omega C_{2m}}; \quad 2\underline{Z}_{1м} = \frac{\underline{Z}_{1п}\,4\underline{Z}_{2п}}{\underline{Z}_{1п} + 4\underline{Z}_{2п}}.$$

Последнее сопротивление составлено из двух параллельных ветвей

$$4\underline{Z}_{2п} = 2\underline{Z}_{2м} \text{ и } \underline{Z}_{1п} = \frac{1}{j\omega C_{1m}}.$$

Схема дифференциально-мостового фильтра показана на рис. 12.29, *в*. Ее элементы: $C_{1m} = 0{,}1$ мкФ, $4L_{2m} = 100$ мГн, $C_{2m} = 0{,}06$ мкФ.

12.34. Начертить схему и определить элементы мостового фильтра, эквивалентного Т-образному последовательно-производному ФНЧ типа m с параметрами $m = 1{,}27$, $R = 1$ кОм, $f_c = 10$ кГц.

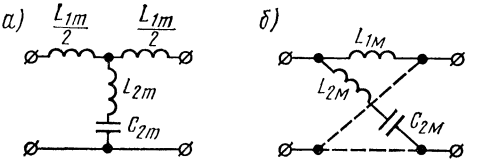


Рис. 12.30

Р е ш е н и е. Схема последовательно-производного ФНЧ типа m изображена на рис. 12.30, *а*. Для расчета его элементов определим по формулам табл. 12.2 элементы прототипа — ФНЧ типа k: $L_1 = 31{,}8$ мГн, $C_2 = 0{,}0318$ мкФ. Расчет элементов фильтра типа m произведем по формулам для ФНЧ табл. 12.3:

$$\frac{L_{1m}}{2} = \frac{mL_1}{2} = 20{,}2 \text{ мГн}; \; L_{2m} = \frac{1 - m^2}{4m} L_1 = -3{,}85 \text{ мГн};$$

$$C_{2m} = mC_2 = 40{,}4 \text{ нФ}.$$

Отрицательное значение L_{2m}, получающееся всегда при $m > 1$, имеет в данном случае только расчетное значение. Такое значение может быть физически реализовано при наличии индуктивной связи между продольными и поперечными плечами фильтра. Для определения элементов эквивалентного мостового фильтра используем формулы (12.11):

$$\underline{Z}_{1м} = \underline{Z}_1/2 + j\omega L_{1m}/2; \quad \underline{Z}_{2м} = 2\underline{Z}_{2т} + \frac{\underline{Z}_{1т}}{2} =$$

$$= 2j\omega L_{2m} + \frac{2}{j\omega C_{2m}} + j\omega L_{1m}/2 = j\omega\,(2L_{2m} + L_{1m}/2) + 2/j\omega C_{2m}.$$

Отсюда получим параметры элементов мостового фильтра

$$L_{1м} = \frac{L_{1m}}{2} = 20{,}2 \text{ мГн}; \quad L_{2м} = 2L_{2m} + \frac{L_{1m}}{2} =$$

$$= -7{,}7 + 20{,}2 = 12{,}5 \text{ мГн}; \quad C_{2м} = \frac{C_{2m}}{2} = 0{,}0202 \text{ мкФ}.$$

Схема мостового фильтра изображена на рис. 12.30, *б*.

12.35. Начертить схему и определить элементы мостового фильтра, эквивалентного П-образному параллельно-производному ФНЧ типа m с параметрами $m = 1{,}27$, $R = 1$ кОм, $f_c = 10$ кГц.

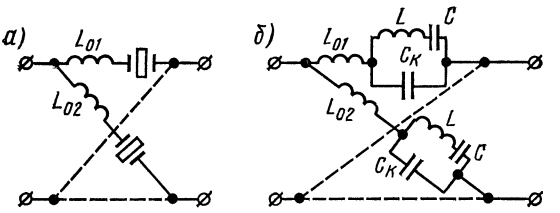


Рис. 12.31

12.36. Мостовой ППФ (рис. 12.31, *а*) собран из расширительных катушек с индуктивностями $L_{01} = 2$ Гн и $L_{02} = 1$ Гн и кварцевых пластин длиной $l_m = 41{,}3$ мм, шириной $l_0 = 20{,}38$ мм, толщиной $l_l = 0{,}5$ мм.

Составить эквивалентную схему фильтра, построить (качественно) частотные характеристики сопротивлений плеч фильтра и рассчитать частоты среза.

Р е ш е н и е. Эквивалентная схема фильтра изображена на рис. 12.31, *б*. Параметры элементов этой схемы рассчитываются по формулам

$$L = k_L = \frac{l_m l_l}{l_0}; \quad C = k_C \frac{l_m l_0}{l_l}; \quad C_k = kC,$$

где k, k_C, k_L — коэффициенты, зависящие от электрических и пьезоэлектрических свойств кварца. Для кварцевых пластинок, имеющих отношение $l_0/l_m \approx 0{,}5$, эти коэффициенты имеют следующие значения: $k_L = 14{,}5$ Гн/мм, $k_C = 2{,}7 \cdot 10^{-4}$ пФ/мм, $k = 125$.

Рассчитаем параметры эквивалентной схемы кварцевой пластины:

$$L = 14{,}5 \frac{41{,}3 \cdot 0{,}5}{20{,}38} = 14{,}7 \text{ Гн}; \quad C = 2{,}7 \cdot 10^4 \frac{41{,}3 \cdot 20{,}38}{0{,}5} = 0{,}455 \text{ пФ};$$

$$C_k = 125 \cdot 0{,}455 = 61{,}4 \text{ пФ}.$$

Формулы сопротивлений плеч фильтра имеют вид

$$\underline{Z} = \frac{L_0}{j\omega} \frac{(\omega_1^2 - \omega^2)(\omega_3^2 - \omega^2)}{\omega_2^2 - \omega^2},$$

где $\omega_2^2 = \dfrac{1}{L \dfrac{CC_k}{C + C_k}}$;

$$\omega_1^2 = \frac{1}{2}\left[\left(\omega_2^2 + \frac{1}{C_k L_0} - \sqrt{\left(\omega_2^2 + \frac{1}{C_k L_0}\right)^2 - \frac{4}{CC_k L L_0}}\right]; \qquad (1)$$

$$\omega_3^2 = \frac{1}{2}\left[\omega_2^2 + \frac{1}{C_k L_0} + \sqrt{\left(\omega_2^2 + \frac{1}{C_k L_0}\right)^2 - \frac{4}{CC_k L L_0}}\right]. \qquad (2)$$

Найдем резонансные частоты:

а) частота резонанса токов обоих плеч

$$\omega_2^2 = \frac{1}{L\dfrac{CC_k}{C + C_k}} = 15{,}3 \cdot 10^{10}\ \text{с}^{-2};\ \omega_2 = 3{,}91 \cdot 10^5\ \text{с}^{-1};$$

б) частоты резонанса напряжений продольного плеча [см. формулы (1) и (2)]

$$\omega_{1\text{п}}^2 = 0{,}755 \cdot 10^{10}\ \text{с}^{-2};\quad \omega_{1\text{п}} = 0{,}87 \cdot 10^5\ \text{с}^{-1};$$

$$\omega_{3\text{п}}^2 = 15{,}36 \cdot 10^{10}\ \text{с}^{-2};\quad \omega_{3\text{п}} = 3{,}92 \cdot 10^5\ \text{с}^{-1};$$

в) частоты резонанса напряжений диагонального плеча

$$\omega_{1\text{д}}^2 = \frac{1}{2}\left[\omega_2^2 + \frac{1}{C_k L_{02}} - \sqrt{\left(\omega_2^2 + \frac{1}{C_k L_{02}}\right)^2 - \frac{4}{CC_k L L_{02}}}\right] =$$

$$= 1{,}59 \cdot 10^{10}\ \text{с}^{-2};\quad \omega_{1\text{д}} = 1{,}26 \cdot 10^5\ \text{с}^{-1};$$

$$\omega_{3\text{д}}^2 = 15{,}34 \cdot 10^{10}\ \text{с}^{-2};\quad \omega_{3\text{д}} = 3{,}916 \cdot 10^5\ \text{с}^{-1}.$$

Частотные характеристики сопротивлений плеч качественно построены на рис. 12.32.

Как известно, в полосе пропускания сопротивления плеч фильтра должны иметь разные знаки. Следовательно, рассматриваемый фильтр имеет две полосы пропускания, которые на рис. 12.32 выделены штриховой линией. Частотами среза являются частоты резонанса напряжения: $\omega_{1\text{п}}$ и $\omega_{1\text{д}}$ — для первой полосы, $\omega_{3\text{д}}$ и $\omega_{3\text{п}}$ — для второй полосы пропускания.

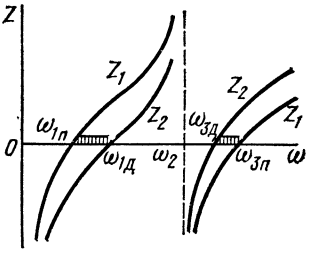


Рис. 12.32

ГЛАВА ТРИНАДЦАТАЯ

КОРРЕКТИРУЮЩИЕ ЦЕПИ

ОСНОВНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ И СООТНОШЕНИЯ

Сигналы, проходящие по линии и аппаратуре, претерпевают амплитудно- и фазочастотные искажения. Для уменьшения этих искажений часто используются пассивные четырехполюсники — корректирующие устройства, которые включаются каскадно с рабочей цепью.

1. Корректоры амплитудно-частотных искажений. Они применяются для уменьшения амплитудно-частотных искажений. Наиболее часто амплитудно-частотное корректирование заключается в таком подборе схемы и элементов корректирующего устройства (рис. 13.1, *а*), чтобы в некотором диапазоне частот от f_1 до f_2 сумма рабочего ослабления цепи $A_{\text{р.ц}}$ и корректора $A_{\text{к}}$ была постоянной величиной (рис. 13.1, *б*), т. е.

$$A_{\text{об}} = A_{\text{р.ц}} + A_{\text{к}} = \text{const}. \qquad (13.1)$$

В качестве корректоров амплитудно-частотных искажений широко применяются Т-образные мостовые и Г-образные четырехполюсники (рис. 13.2, *а*—*в*), имеющие постоянное, не зависящее от частоты входное сопротивление R_1, равное активному сопротивлению нагрузки $R_{\text{н}} = R_0$. Для указанных четырехполюсников это имеет место, когда комплексные сопротивления $\underline{Z}_1$ и $\underline{Z}_2$ взаимно обратны, т. е.

$$\underline{Z}_1 \underline{Z}_2 = R_0^2 . \qquad (13.2)$$

Иногда в качестве простейшего корректирующего устройства используется последовательный контур с сопротивлением $2\underline{Z}_1$ (рис. 13.2, *г*) или параллельный — с сопротивлением $1/2\underline{Z}_2$ (рис. 13.2, *д*).

Схема рис. 13.2, *а* дает согласование со стороны входа и выхода корректора, схемы рис. 13.2, *б* и *в* только с одной стороны, а схемы рис. 13.2, *г* и *д* не дают согласования ни с одной стороны. Согласова-

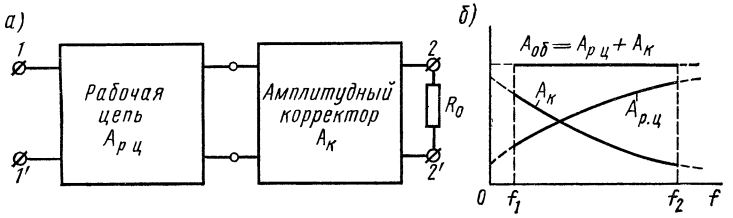


Рис. 13.1

ние с обеих сторон обеспечивает также мостовая схема корректора рис. 13.2, *е*.

Как правило, каждый из пассивных двухполюсников корректора (рис. 13.2, *а*—*е*) $\underline{Z}_1$ и $\underline{Z}_2$ содержит элементы с активным и реактивными сопротивлениями.

Если сопротивление нагрузки $R_н$ четырехполюсников рис. 13.2, *а*—*е* равно R_0, то постоянная передачи корректора

$$\underline{\Gamma}_к = \ln(1 + \underline{Z}_1/R_0). \qquad (13.3)$$

Важными в практике являются схемы корректоров, у которых $\underline{Z}_1$ состоит из параллельно соединенных активного сопротивления R_1 и реактивного X_1 и, следовательно, в соответствии с формулой (13.2) $\underline{Z}_2$ состоит из последовательных активного R_2 и реактивного X_2 (на рис. 13.3, *а*—*в* приведены схемы, соответствующие корректорам рис. 13.2, *а*—*в*). В этом случае рабочее ослабление корректора

$$A_к = \frac{1}{2} \ln \frac{\left(1 + \frac{R_1}{R_0}\right)^2 + \left(\frac{R_1}{X_1}\right)^2}{\left(1 + \frac{R_1}{X_1}\right)^2}, \text{ Нп}, \qquad (13.4)$$

где X_1 — алгебраическая величина, которая в зависимости от частоты плавно изменяется и может принимать как положительные, так и отрицательные значения, т. е. может иметь индуктивный или емкостный характер.

На рис. 13.4 приведены кривые зависимостей ослабления $A_к$ в функции частоты (для корректоров рис. 13.2, *а*—*е*). Кривая *1* соответствует случаю, когда элемент X_1 содержит только конденсатор емкостью C_1, кривая *2* — только катушку индуктивностью L_1, кривая *3* — параллельно соединенные L_1 и C_1, кривая *4* —

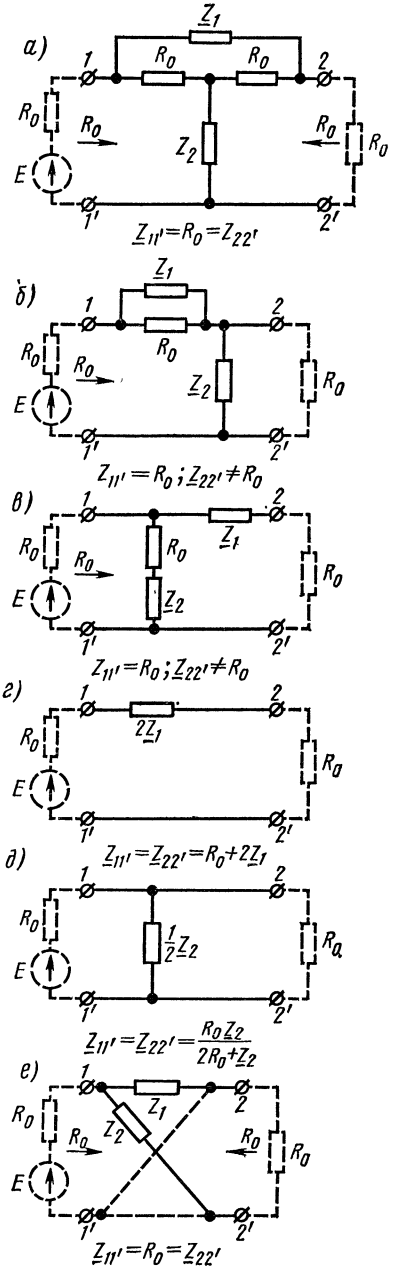


Рис. 13.2

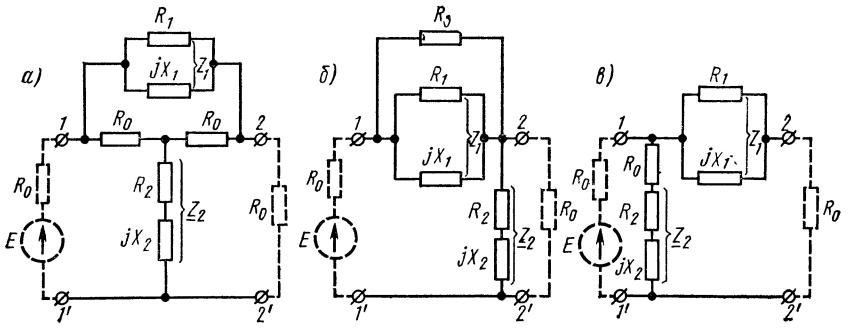


Рис. 13.3

последовательно соединенные L_1 и C_1, кривая *5* — последовательно соединенные L_1 и C_1, шунтированные емкостью C_1', кривая *6* — последовательно соединенные L_1 и C_1, шунтированные индуктивностью L_1'.

Для использования четырехполюсников в качестве корректоров амплитудно-частотных искажений крутизну кривой ослабления в требуемом интервале частот можно изменять регулированием сопротивлений R_1 и X_1.

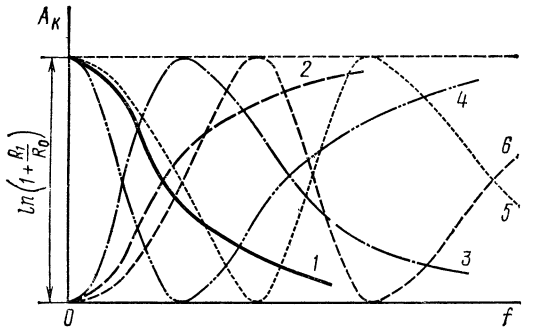


Рис. 13.4

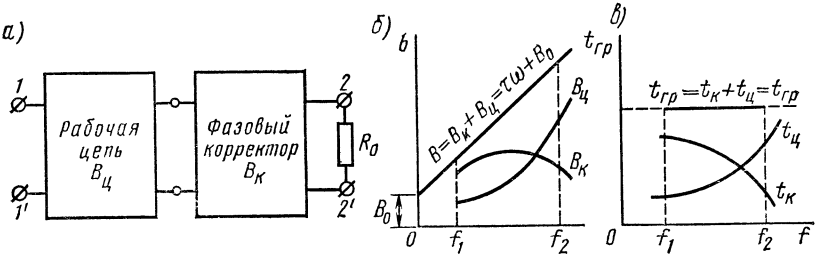


Рис. 13.5

Задача расчета корректирующего устройства обычно состоит в выборе его схемы и вычисления ее элементов так, чтобы выполнялось условие (13.1).

Примеры даны в задачах 13.4; 13.5; 13.6; 13.8.

2. Корректоры фазочастотных искажений. Они предназначены для уменьшения фазовых искажений, вносимых в передачу линией и аппаратурой. Фазовый корректор мостового типа, состоящий из чисто реактивных элементов, пропускает все частоты от 0 до ∞. Для обеспечения требуемой частотной характеристики фазовой постоянной $B(\omega)$ или группового времени замедления $t_{\text{гр}}(\omega) = dB_{\text{к}}/d\omega$ фазовый корректор включается каскадно и согласованно в корректируемую цепь (рис. 13.5, *а*).

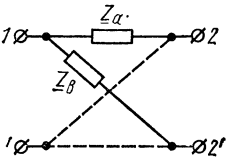


Рис. 13.6

Сущность фазовой коррекции поясняется рис. 13.5, *б*: требуемая суммарная характеристика фазы B корректора $B_{\text{к}}$ и цепи $B_{\text{ц}}$ в некотором диапазоне частот от f_1 до f_2 обычно должна иметь вид прямой, что удовлетворяет условию неискаженной передачи огибающей сигнала

$$B = B_{\text{к}} + B_{\text{ц}} = \tau\omega + B_0. \tag{13.5}$$

Это означает, что суммарная величина группового времени замедления $t_{\text{гр}}$, корректора $t_{\text{к}}$ и рабочей цепи $t_{\text{ц}}$ есть величина постоянная (рис. 13.5, *в*):

$$t_{\text{к}} + t_{\text{ц}} = t_{\text{гр}}. \tag{13.6}$$

Мостовое звено фазового корректора представляет собой четырехполюсник мостового типа (рис. 13.6), у которого сопротивления $\underline{Z}_a$ и $\underline{Z}_b$ являются взаимно обратными реактивными двухполюсниками, т. е.

$$\underline{Z}_a \underline{Z}_b = R_0^2 = -X_a X_b. \tag{13.7}$$

Характеристическое сопротивление мостового звена фазового корректора постоянно (не зависит от частоты) и равно

$$\underline{Z}_{\text{м}} = \sqrt{\underline{Z}_a \underline{Z}_b} = R_0. \tag{13.8}$$

При выполнении условия (13.7) фазовая постоянная корректора и его групповое время замедления $t_{\text{к}}$ определяется по формулам

$$B_{\text{к}} = \arg\left(\frac{R_0 + \underline{Z}_a}{R_0 - \underline{Z}_a}\right) = 2\operatorname{arctg}\frac{X_a}{R_0}; \tag{13.9}$$

$$t_{\text{к}} = \frac{dB_{\text{к}}}{d\omega} = \frac{2R_0}{R_0^2 + X_a^2}\,\frac{dX_a}{d\omega}. \tag{13.10}$$

Характер зависимости $B_к$ от частоты зависит от сложности звена (от так называемого порядка звена). Наиболее часто используются фазовые звенья первого порядка, т. е. такие, у каждого плеча мостовой схемы которого имеется по одному реактивному элементу (рис. 13.7, *а*), и второго порядка, когда в каждом плече имеется по два реактивных элемента (рис. 13.7, *б*).

На практике для уменьшения числа реактивных элементов корректора фазочастотных искажений вместо мостовых схем применя-

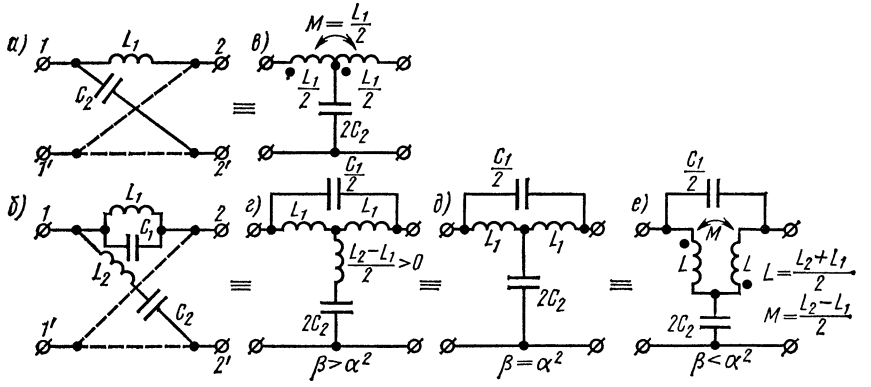


Рис. 13.7

ются эквивалентные им схемы. Так, для звена фазового контура первого порядка вместо схемы рис. 13.7, *а* берется эквивалентная ей схема рис. 13.7, *в* с коэффициентом связи, равным 1. Для фазовых контуров второго порядка существует несколько эквивалентных схем. На рис. 13.7, *г*, *д* и *е* приведены три Т-образные мостовые схемы. Условия их применимости зависят от соотношения между коэффициентами α и β, где

$$\alpha = \frac{1}{C_1}\sqrt{\frac{C_2}{L_1}}, \quad \beta = \frac{1}{L_1 C_1}.$$

Для получения требуемой фазовой характеристики (или группового времени замедления) часто берут несколько каскадно и согласованно соединенных звеньев разного порядка сложности, имеющих разное время замедления. Для облегчения подбора звеньев используются приводимые в специальной литературе семейства характеристик времени замедления разных фазовых корректоров. Подбор числа, типа и характера звеньев может быть осуществлен графически (с помощью шаблонов), аналитически и с помощью цифровых электронно-вычислительных машин [26].

Примеры даны в задачах 13.11; 13.13.

УПРАЖНЕНИЯ И ЗАДАЧИ

А. Корректоры амплитудно-частотных искажений

13.1. Показать, что при нагрузке четырехполюсника (см. рис. 13.2, *а*) со стороны зажимов *2—2′* на сопротивление R_0 его входное сопротивление со стороны зажимов *1—1′* равно тому же сопротивлению R_0, а рабочая постоянная передачи равна собственной постоянной передачи при условии, что $\underline{Z}_1\underline{Z}_2 = R_0^2$.

13.2. Определить элементы и начертить схему Г-образного корректирующего четырехполюсника (рис. 13.8, *а*), имеющего постоянное входное (повторное) сопротивление $\underline{Z}_{вх} = R_0 = 600$ Ом и элементы $R' = 480$ Ом, $C_1 = 60$ нФ. Рассчитать и построить кривую рабочего ослабления корректирующего контура в диапазоне 0,3—8 кГц.

Р е ш е н и е. Из сравнения рис. 13.8, *а* с рис. 13.2, *б* [см. формулу (13.2)] видно, что заданный корректор должен иметь в продольной ветви параллельно соединенные активное сопротивление R_0 и комплексное сопротивление $\underline{Z}_1$, состоящее из параллельно соединенных R_1 и C_1 (рис. 13.8, *б*). Из эквивалентности схем рис. 13.8, *а* и *б* следует, что R' должно равняться параллельно соединенным R_1 и R_0, откуда и находим неизвестное R':

$$R' = \frac{R_1 R_0}{R_1 + R_0},$$

где

$$R_1 = \frac{480 \cdot 600}{600 - 480} = 2400 \text{ Ом}.$$

Элементы комплексного сопротивления $\underline{Z}_2$ поперечной ветви должны быть обратны сопротивлению $\underline{Z}_1$ [см. формулу (13.2)]. Определим их, как это указано в гл. 10:

$$R_2 = R_0^2/R_1 = 600^2/2400 = 150 \text{ Ом};$$

$$L_2 = C_1 R_0^2 = 60 \cdot 10^{-9} \cdot 600^2 = 21{,}6 \cdot 10^{-3} \text{ Гн}.$$

Кривую рабочего ослабления рассчитываем по формуле (13.4). Результаты расчетов сведены в табл. 13.1.

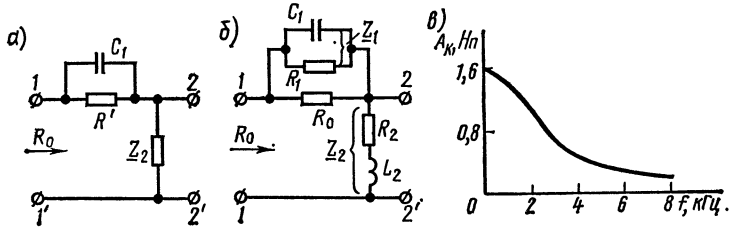


Рис. 13.8

f, кГц	$X_1 = 1/\omega C_1$, Ом	R_1/X_1	$(R_1/X_1)^2$	$\left(1+\frac{R_1}{R_0}\right)^2+\left(\frac{R_1}{X_1}\right)^2$
0,3	8860	0,271	0,074	25,074
1,0	2650	0,906	0,81	25,81
4,0	662	3,62	13,1	38,1
8,0	331	7,25	52,5	77,5

По данным табл. 13.1 на рис. 13.8, *в* построен график $A_к$ в функции f.

13.3. Рассчитать элементы и начертить схему Г-образного корректора (рис. 13.9), входное сопротивление которого постоянно и равно $Z_{вх} = R_0 = 1400$ Ом. Даны: $R' = 420$ Ом, $L_1 = 50$ мГн. Построить кривую рабочего ослабления корректора в диапазоне 0,3—4 кГц.

13.4. Определить элементы и начертить схему Г-образного корректора (рис. 13.10, *а*) с постоянным входным сопротивлением $Z_{вх} = R_0 = 600$ Ом, элементы которого $R' = 480$ Ом, $L_1 = 4$ мГн, $C_1 = 1$ мкФ. Определить частоту, при которой ослабление передачи максимально, и величину $A_{к\,max}$ этого ослабления корректора в полосе частот от 0 до 4 кГц.

Р е ш е н и е. Схема корректора приведена на рис. 13.10, *б*. Вычислим ее элементы:

$$R_1 = \frac{R' R_0}{R_0 - R'} = 2400 \text{ Ом};$$

$$R_2 = \frac{R_0^2}{R_1} = 150 \text{ Ом};$$

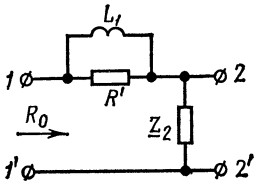


Рис. 13.9

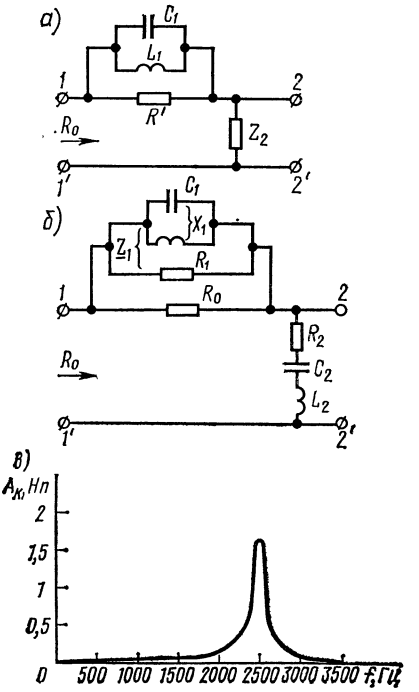


Рис. 13.10

Таблица 13.1

$1+\left(\frac{R_1}{X_1}\right)^2$	$\frac{\left(1+\frac{R_1}{R_0}\right)^2+\left(\frac{R_1}{X_1}\right)^2}{1+\left(\frac{R_1}{X_1}\right)^2}$	$\ln\frac{\left(1+\frac{R_1}{R_0}\right)^2+\left(\frac{R_1}{X_1}\right)^2}{1+\left(\frac{R_1}{X_1}\right)^2}$	$A_к$	
			Нп	дБ
1,074	24,8	3,21	1,605	13,9
1,81	14,23	2,655	1,327	11,5
14,1	2,7	0,99	0,495	4,3
53,5	1,44	0,367	0,184	1,6

$$L_2 = C_1R_0^2 = 0{,}36 \text{ Гн}; \quad C_2 = L_1/R_0^2 = 0{,}0111 \text{ мкФ}.$$

Из формулы (13.4) следует, что ослабление передачи максимально, когда реактивное сопротивление продольного плеча $X_1 = \infty$, при этом $X_2 = 0$ и в схеме остаются только активные сопротивления. Сопротивление параллельно соединенных L_1 и C_1

$$X_1 = \frac{\omega L_1}{1-\omega^2 L_1 C_1}.$$

Отсюда видно, что $X_1 = \infty$ при $\omega_1 = 1/\sqrt{L_1C_1} = 15\,800$ с$^{-1}$, $f = 2520$ Гц.

По формуле (13.4) находим, что при $X_1 = \infty$ величина максимального ослабления передачи

$$A_{к\,max} = \frac{1}{2}\ln\left(1+\frac{R_1}{R_0}\right)^2 = \ln\left(1+\frac{2400}{600}\right) = \ln 5 = 1{,}61 \text{ Нп} = 14\text{дБ}.$$

Кривая ослабления корректора, рассчитанная по формуле (13.4), приведена на рис. 13.10, *в*.

13.5. Найти элементы и начертить схему Г-образного корректора (рис. 13.11, *а*), имеющего постоянное входное сопротивление $R_0 = 600$ Ом и элементы $R' = 525$ Ом, $C_1 = 0{,}04$ мкФ, $L_1 = 16$ мГн, $C_1' = 0{,}2$ мкФ. Определить частоту, при которой ослабление передачи $A_к$ будет максимально, и чему эта величина равна.

Р е ш е н и е. Схема корректора и значения величин элементов даны на рис. 13.11, *б*. Они рассчитаны ана-

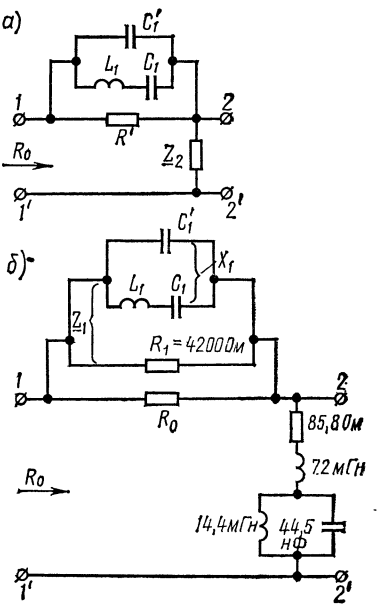


Рис. 13.11

логично предыдущей задаче. Определим эквивалентное сопротивление X_1 реактивных элементов:

$$jX_1 = \frac{-j\frac{1}{\omega C_1'}\; j\left(\omega L_1 - \frac{1}{\omega C_1}\right)}{j\left[\omega L_1 - \left(\frac{1}{\omega C_1} + \frac{1}{\omega C_1'}\right)\right]} = j\,\frac{\omega^2 L_1 C_1 - 1}{\omega\left(C_1 + C_1' - \omega^2 L_1 C_1 C_1'\right)}.$$

Постоянная ослабления передачи максимальна при $|X_1| = \infty$, что имеет место, когда знаменатель выражения X_1 будет равен нулю. Как видно из полученного для X_1 выражения, это будет при $\omega = 0$ (т. е. $f = 0$) и при частоте

$$f_2 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{C_1 + C_1'}{L_1 C_1 C_1'}} = 69 \text{ кГц}.$$

Отметим, что f_2 есть частота резонанса токов в продольном плече и частота резонанса напряжений в поперечном плече. Величину максимального ослабления (учтя, что при этом $X_1 = \infty$) находим по формуле (13.4):

$$A_{к\,max} = \frac{1}{2}\ln\left(1 + \frac{R_1}{R_0}\right)^2 = \ln\left(1 + \frac{4200}{600}\right) = 2{,}08 \text{ Нп} = 18 \text{ дБ}.$$

13.6. Рассчитать корректор, предназначенный для устранения амплитудно-частотных искажений в диапазоне частот 300—10 000 Гц, создаваемых 200-километровой медной воздушной линией с диаметром проводов 4 мм и расстоянием между ними 20 см. Ослабление линии на 1 км ее длины и на всю длину l приведено в первой и второй строках табл. 13.2. Схема корректора должна обеспечивать согласо-

Таблица 13.2

f, Гц	300	500	800	1200	2000	3000	5000	7000	10 000
α, мдБ/км	0,021	0,022	0,022	0,022	0,024	0,026	0,030	0,034	0,041
$A_д = \alpha l$, дБ	4,2	4,4	4,4	4,4	4,8	5,2	6,0	6,8	8,2
Требуемое $A_к$, дБ	5,0	4,8	4,8	4,8	4,4	4,0	3,2	2,4	1
Рассчитанное $A_к'$, дБ	5,09	5,06	5,0	4,92	4,64	4,05	3,2	2,38	1,5
Точность воспроизведения $\Delta A_к$, дБ	0,09	0,26	0,2	0,12	0,24	0,15	0	0,02	0,55

вание со стороны его входа и выхода. Нагрузочное сопротивление $R_0 = 600$ Ом. При расчете принять, что рабочее ослабление корректора на самой высокой частоте корректирования ($f_в = 10$ кГц) составляет 1 дБ. Расчет должен быть сделан так, чтобы точность воспроизведения корректором заданной величины рабочего ослабления на всех частотах была в пределах $\Delta A_к = \pm 0{,}6$ дБ.

Примечание. Предполагается, что в корректируемом диапазоне частот входное сопротивление линии согласовано по модулю с входным сопротивлением корректора с помощью согласующего трансформатора.

Решение. По данным табл. 13.2 на рис. 13.12 построена кривая ослабления линии $A_л$ в функции частоты f (кривая *1*). По условию сумма рабочих ослаблений линии и корректора ($A_{об} = A_л + A_к$)

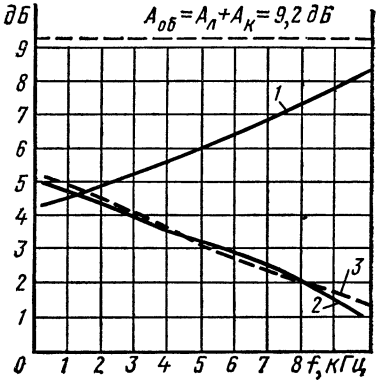


Рис. 13.12

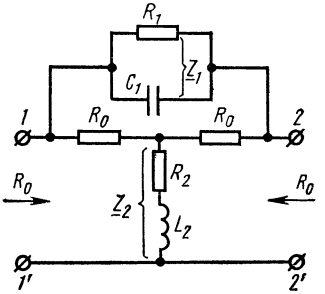


Рис. 13.13

на всех частотах должна составлять $A_{об} = 8{,}2 + 1 = 9{,}2$ дБ (здесь согласно условию $A_л = 8{,}2$ дБ, которое взято при $f = 10$ кГц). Отсюда находим требуемое ослабление корректора $A_к = A_{об} - A_л$ на всех частотах (третья строка табл. 13.2). По этим значениям на рис. 13.12 построена кривая *2*, выражающая требуемое ослабление корректора.

Перепад рабочего ослабления корректора в диапазоне частот 0,3—10 кГц составляет (см. третью строку табл. 13.2) $A_{к\max} - A_{к\min} = 5{,}0 - 1 = 4$ дБ. Это небольшой перепад ослабления. В этом случае можно воспользоваться схемой корректора рис. 13.2, *а* с одной параллельной емкостью ($X_1 = -1/\omega C$), так как она содержит меньшее по сравнению с другими схемами число элементов и может обеспечить требуемое по условию согласование как со стороны линии, так и нагрузки. Выбираем эту схему (рис. 13.13).

Рассматривая характер кривой рабочего ослабления выбранного типа корректора (см. рис. 13.4, кривая *1*) и сопоставляя ее с требуемой кривой *2* рис. 13.12, приходим к выводу, что при частоте $f = 0$ величину рабочего ослабления корректора можно принять равной $A_{к0} = 5{,}1$ дБ (на рис. 13.12 ход кривой *2* в интервале от $f = 0$ до $f = 300$ Гц показан точечной штриховой линией).

Вначале определим величину активного сопротивления R_1. Из формулы (13.4) при частоте $f = 0$ имеем $X_1 = -1/\omega C_1 = -\infty$. Из (13.4) получим

$$A_{к0} = \ln(1 + R_1/R_0),$$

откуда

$$R_1 = R_0\left(e^{A_{к0}} - 1\right). \qquad (1)$$

Перейдем к расчету емкости C_1. Сопротивление $\underline{Z}_1$, приведенное к канонической форме, имеет вид

$$\underline{Z}_1 = \frac{R_1 \dfrac{1}{j\omega C_1}}{R_1 + \dfrac{1}{j\omega C_1}} = \frac{R_1}{1 + j\omega C_1 R_1} = \frac{a_0}{1 + b\,(jf)^2}, \qquad (2)$$

где $a_0 = R_1$, $b_1 = 2\pi C_1 R_1$.

Квадраты модуля выражения (13.4) при $f = 0$ и при некоторой частоте f (с учетом введенных далее обозначений F_0 и F_1) примут вид

$$e^{2A_{к0}} = \left(1 + \frac{a_0}{R_0}\right)^2 = F_0; \qquad (3)$$

$$e^{2A_к} = \frac{\left(1 + \dfrac{a_0}{R_0}\right)^2 + b_1^2 f^2}{1 + b_1^2 f^2} = \frac{F_0 + b_1 f^2}{1 + b_1^2 f^2} = F. \qquad (4)$$

Выражение (4) при $f = f_1$ будет

$$e^{2A_{к1}} = \frac{\left(1 + \dfrac{a_0}{R_0}\right)^2 + b_1^2 f_1^2}{1 + b_1^2 f_1^2} = \frac{F_0 + b_1^2 f_1^2}{1 + b_1^2 f_1^2} = F_1. \qquad (5)$$

Так как рабочее ослабление корректора задано, то, взяв его при частоте f_1 из формулы (5), получим значение коэффициента b_1:

$$b_1 = \frac{1}{f}\sqrt{\frac{F_0 - F_1}{F_1 - 1}}. \qquad (6)$$

Из формулы (2) найдем искомую емкость

$$C_1 = b_1/2\pi R_1. \qquad (7)$$

Подставляя в (1) и (3) числовые значения и учитывая, что 1 дБ = = 0,115 Нп, получим

$$R_1 = R_0\left(e^{A_{к0}} - 1\right) = 600\left(e^{5{,}1 \cdot 0{,}115} - 1\right) = 600\,(1{,}8 - 1) = 480 \text{ Ом};$$

$$F_0 = e^{2A_{к0}} = e^{2 \cdot 5{,}1 \cdot 0{,}115} = 3{,}232.$$

Для расчета F_1 выбираем среднюю частоту диапазона корректирования $f_{ср} = f_1 = 5000$ Гц, которой согласно табл. 13.2 соответствует ослабление $A_{к1} = 3{,}2$ дБ (0,368 Нп). Из формул (5), (6) и (7) находим

$$F_1 = e^{2A_{н1}} = e^{2\cdot 0{,}368} = 2{,}088;$$

$$b_1 = \frac{1}{f_1}\sqrt{\frac{F_0 - F_1}{F_1 - 1}} = \frac{1}{5000}\sqrt{\frac{3{,}235 - 2{,}088}{2{,}088 - 1}} =$$

$$= 2 \cdot 10^{-4}\sqrt{1{,}054} = 2{,}05 \cdot 10^{-4};$$

$$C_1 = \frac{b_1}{2\pi R_1} = \frac{2{,}05 \cdot 10^{-4}}{6{,}28 \cdot 480} = 0{,}068 \cdot 10^{-6}\ \text{Ф}.$$

Элементы обратного двухполюсника $\underline{Z}_2$ будут равны:

$$R_2 = R_0^2/R_1 = 600^2/480 = 750\ \text{Ом};$$

$$L_2 = C_1 R_0^2 = 0{,}068 \cdot 10^{-6} \cdot 600^2 = 0{,}0245\ \text{Гн}.$$

Теперь вычислим рабочее ослабление корректора на всех частотах по следующей формуле, полученной из формулы (4):

$$A_к = \frac{1}{2}\ln\frac{F_0 + b_1^2 f^2}{1 + b_1^2 f^2}.$$

Для удобства расчеты сведены в табл. 13.3.

Таблица 13.3

f, Гц	$b_1 f$	$b_1^2 f^2$	$F_0 + b_1^2 f^2$	$1 + b_1^2 f^2$	$\frac{F_0 + b_1^2 f^2}{1 + b_1^2 f^2}$	$\ln\frac{F_0 + b_1^2 f^2}{1 + b_1^2 f^2}$	$A'_к$	
							Нп	дБ
300	0,062	0,004	3,236	1,004	3,224	1,170	0,585	5,09
500	0,103	0,011	3,243	1,011	3,206	1,164	0,582	5,06
800	0,164	0,027	3,257	1,027	3,171	1,154	0,577	5,00
1200	0,246	0,061	3,293	1,061	3,102	1,132	0,566	4,92
2000	0,410	0,168	3,400	1,168	2,907	1,068	0,534	4,64
3000	0,615	0,378	3,610	1,378	2,620	0,932	0,466	4,05
5000	1,026	1,052	4,284	2,052	2,088	0,736	0,368	3,2
7000	1,436	2,062	5,294	3,062	1,729	0,548	0,274	2,38
10000	2,051	4,208	7,40	5,208	1,428	0,356	0,178	1,55

По данным табл. 13.3 на рис. 13.13 построена вычисленная $A'_к$ (кривая *3*). Рассчитанные значения ослабления $A'_к$ из табл. 13.3 перенесены в табл. 13.2 (строка 4), а в строке 5 таблицы указана точность воспроизведения ($\Delta A_к = |A_к - A'_к|$) требуемой кривой ослабления $A_к$. Отсюда видно, что ни в одной из точек диапазона корректирования кривая $A'_к$ не выходит за пределы требуемой точности $\Delta A_к = \pm 0{,}6$ дБ.

В заключение отметим, что если бы требования по точности совпадения полученной и требуемой кривой рабочего ослабления не были удовлетворены, следовало бы сделать новые расчеты, задавшись другим значением $A_{к0}$ или немного изменив величину средней частоты

$f_{ср}$, или меняя и то и другое. Однако если бы это не привело к удовлетворительному результату, пришлось бы перейти к более сложной схеме корректора.

13.7. Используя условия задачи 13.6, рассчитать амплитудный корректор и сравнить точность воспроизведения заданной кривой рабочего ослабления, если частоту $f_{ср}$ оставить той же (5000 Гц), а для $A_{к0}$ принять 5,2 дБ. Какое наибольшее отклонение по ослаблению и при какой частоте дает этот корректор?

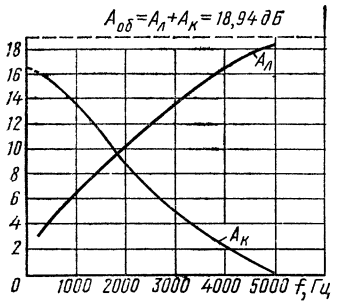


Рис. 13.14

13.8. Стальная воздушная линия связи (расстояние между проводами $a = 20$ см, их диаметр 4 мм, при сухой погоде и температуре $t = 20°$ С) имеет коэффициент ослабления на 1 км при частотах от 0,3 до 5 кГц, равный α (дан в табл. 13.4). Длина линии $l = 40$ км. Линия нагружена на активное сопротивление $R_0 = 600$ Ом.

Требуется выбрать схему амплитудного корректора, обеспечивающую согласование со стороны нагрузки, и рассчитать ее так, чтобы точность воспроизведения корректором $\Delta A_к$ заданной величины рабочего ослабления на всех частотах была не более $\pm 1{,}2$ дБ. Принять, что рабочее ослабление корректора на самой верхней частоте корректирования $f_в = 5$ кГц составляет 0,5 дБ.

Р е ш е н и е. Во второй строке табл. 13.4 вычислено ослабление всей линии $A_л = \alpha l$ в пределах частот корректирования, а на рис. 13.14 построена кривая *1* ослабления линии в функции частоты. В соответствии с условием сумма рабочих ослаблений $A_{об}$ линии $A_л$ и корректора $A_к$ на верхней частоте корректирования

$$A_{об} = A_л + A_к = 18{,}44 + 0{,}5 = 18{,}94 \text{ дБ}.$$

Исходя из этого вычислим требуемое рабочее ослабление корректора $A_к = A_{об} - A_л$ на частотах, указанных в табл. 13.4. Результаты расчетов приведены в третьей строке табл. 13.4, а на рис. 13.14 построена кривая $A_к$ (кривая *2*).

Таблица 13.4

f, кГц	0,3	0,5	0,8	1,2	2	3	5
α, дБ/км	0,077	0,104	0,141	0,187	0,255	0,334	0,461
$A_л=\alpha l$, дБ	3,08	4,16	5,64	7,48	10,2	13,36	18,44
Требуемое $A_к$, дБ	15,86	14,78	13,3	11,46	8,74	5,58	0,5
Рассчитанное $A'_к$, дБ	16,1	15,5	14,3	12,5	9,0	5,1	0,02
Точность воспроизведения $\Delta A_к$, дБ	0,24	0,72	1,0	1,04	0,26	0,48	0,48

Перепад рабочего ослабления корректора в передаваемой полосе частот составляет $A_{к\max} - A_{к\min} = 15{,}86 - 0{,}5 = 15{,}36$ дБ.

Это значительный перепад рабочего ослабления, и из рассмотрения кривых рис. 13.4 следует, что целесообразно выбрать схему корректора, которому соответствует кривая *4* рис. 13.4, т. е. схему с двумя последовательно соединенными реактивными элементами ($X_1 = \omega L_1 - 1/\omega C_1$). Учитывая и условия согласования на выходе линии, приходим к выводу, что следует выбрать схему корректора рис. 13,2, *в*. Соответствующая подробная схема дана на рис. 13.15.

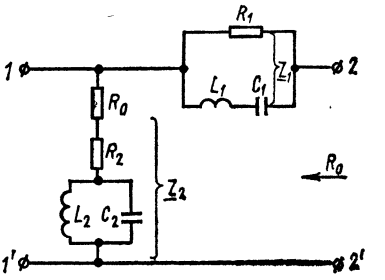


Рис. 13.15

Найдем продольное сопротивление $\underline{Z}_1$ двухполюсника, которое приведем к канонической форме

$$\frac{1}{\underline{Z}_1} = \frac{1}{R_1} + \frac{j\omega C_1}{1 - \omega^2 L_1 C_1},$$

отсюда

$$\underline{Z}_1 = \frac{a_0 + a_2 (jf)^2}{1 + b_1 (jf) + b_2 (jf)^2}. \qquad (1)$$

Здесь

$$a_0 = R_1, \quad a_2 = 4\pi^2 R_1 L_1 C_1, \quad b_1 = 2\pi C_1 R_1, \quad b_2 = 4\pi^2 L_1 C_1. \qquad (2)$$

Из уравнения (1) исключим a_2, учитывая, что согласно формуле (2) $a_2 = a_0 b_2$, тогда уравнение (1) примет вид

$$\underline{Z}_1 = \frac{a_0 + a_0 b_2 (jf)^2}{1 + b_1 (jf) + b_2 (jf)^2}. \qquad (3)$$

Подставляя это в формулу (13.3) и приводя к одному знаменателю, получим

$$e^{-\Gamma_к} = \frac{1 + \frac{a_0}{R_0} + b_1 (jf) + \left(1 + \frac{a_0}{R_0}\right) b_2 (jf)^2}{1 + b_1 (jf) + b_2 (jf)^2}. \qquad (4)$$

Взяв модуль от правой и левой частей последнего уравнения, возведя их затем в квадрат и разделив числитель и знаменатель правой части на $b_1^2 f^2$, найдем

$$e^{2A_к} = \frac{1 + \left(1 + \frac{a_0}{R_0}\right)^2 \left(\frac{1 - b_2 f^2}{b_1 f}\right)^2}{1 + \left(\frac{1 - b_2 f^2}{b_1 f}\right)^2}. \qquad (5)$$

Далее задача состоит в определении неизвестных R_1, L_1, C_1. Так как рабочее ослабление при $f = 0$ задано и равно $A_{к0}$, из формулы (5) определим неизвестное сопротивление

$$R_1 = R_0 \left(e^{A_{к0}} - 1 \right). \tag{6}$$

Для определения L_1 и C_1 поступим так. Ради кратности введем обозначения

$$y = -\frac{1 - b_2 f^2}{b_1 f}; \tag{7}$$

$$e^{2A_{к0}} = F_0; \tag{8}$$

$$e^{2A_к} = F. \tag{9}$$

Тогда формула (5) примет вид

$$F = \frac{1 + F_0 y^2}{1 + y^2}. \tag{10}$$

Отсюда

$$y = \pm \sqrt{\frac{F_1 - 1}{F_0 - F}}. \tag{11}$$

В этом выражении знак перед корнем должен быть взят в соответствии с ходом частотной характеристики последовательного контура L_1C_1, а именно знак минус в полосе частот от 0 до резонансной частоты f_0 и знак плюс в полосе от f_0 до ∞.

По заданным величинам рабочего ослабления корректора $A_{к0}$ и $A_к$ находим y.

В выражение (7) входят коэффициенты b_1 и b_2. Для их определения можно поступить так. Из формулы (7)

$$b_2 - \frac{y}{f} b_1 = \frac{1}{f^2}. \tag{12}$$

В передаваемой полосе частот следует взять частоты f_1 и f_2 и определить при этом из формул (10) и (11) соответствующие F_1 и F_2, а также y_1 и y_2. Тогда получим систему из двух уравнений с двумя неизвестными b_1 и b_2.

Однако можно ограничиться определением не двух, а одного коэффициента b_1, если задаться резонансной частотой последовательного контура L_1C_1, которая связана с коэффициентом b_2 соотношением (2):

$$b_2 = 1/f_0^2. \tag{13}$$

Итак, если знать: 1) рабочее ослабление $A_{к0}$ при $f = 0$; 2) $A_{к1}$ при f_1; 3) резонансную частоту f_0, то методика расчета корректора следующая. По формуле (6) вычисляем R_1, затем из формул (8), (9), (11), (13) определяем F_0, F_1, y_1, b_2. Затем из (12) находим b_1, из (2) — L_1 и C_1. Параметры обратного двухполюсника вычисляем по формуле (13.2).

Расчет величины рабочего ослабления в заданном диапазоне частот определяют из формулы (5):

$$A_к = \frac{1}{2} \ln \frac{1 + F_0 \left(\frac{1 - b_2 f^2}{b_1 f^2} \right)^2}{1 + \left(\frac{1 - b_2 f^2}{b_1 f} \right)^2}. \qquad (14)$$

В соответствии с изложенной методикой проведем расчет корректора. Рассматривая кривую рабочего ослабления (кривая *2* на рис. 13.14), приходим к выводу, что при $f = 0$ следует принять $A_{к0} = 16{,}5$ дБ (1,898 Нп), а резонансную частоту взять равной 5,5 кГц. Находим R_1 по формуле (6):

$$R_1 = R_0 \left(e^{A_{к0}} - 1 \right) = 600 \left(e^{1{,}898} - 1 \right) = 600\,(6{,}673 - 1) = 3400 \text{ Ом}.$$

Примем $f_1 = 2500$ Гц, при этом по кривой *2* рис. 13.14 находим $A_{к1} = 7$ дБ (0,805 Нп).

$$F_0 = e^{2A_{к0}} = e^{2 \cdot 1.898} = 44{,}50; \quad F_1 = e^{2A_{к1}} = e^{2 \cdot 0{,}805} = 5;$$

$$y_1 = -\sqrt{\frac{F_1 - 1}{F_0 - F_1}} = -\sqrt{\frac{5 - 1}{44{,}5 - 5}} = -0{,}318;$$

$$b_2 = \frac{1}{f_0^2} = \frac{1}{5500^2} = 0{,}033 \cdot 10^{-6}.$$

Далее из (12) с учетом формулы (13) при $f = f_1$ находим

$$b_1 = -\frac{f_1}{y_1} \left(\frac{1}{f_1^2} - \frac{1}{f_0^2} \right) = \frac{2500}{0{,}318} \left(\frac{1}{2500^2} - \frac{1}{5500^2} \right) = 1 \cdot 10^{-3}.$$

Расчет $A_к'$ по формуле (14) сведен в табл. 13.5. Рассчитанные значения ослабления корректора $A_к'$ занесены в табл. 13.4 (строка 4). Там же приведены результаты сравнения с требуемыми $A_к$, которые показывают, что во всем диапазоне корректирования точность воспроизведения не ниже заданного значения $\Delta A_к = \pm 1{,}2$ дБ. Если бы на некоторых частотах не была достигнута требуемая точность корректирования, то пришлось бы сделать новый вариант расчета, изменив принятые $A_{к0}$ либо f_0, либо то и другое.

Индуктивность и емкость продольного плеча находим из (2):

$$C_1 = \frac{b_1}{2\pi R_1} = \frac{1 \cdot 10^{-3}}{6{,}28 \cdot 3410} = 0{,}0467 \cdot 10^{-6} \text{ Ф},$$

$$L_1 = \frac{b_2}{4\pi^2 C_1} = \frac{0{,}033 \cdot 10^{-6}}{4 \cdot 3{,}14^2 \cdot 0{,}0467 \cdot 10^{-6}} = 17{,}9 \cdot 10^{-3} \text{ Гн}.$$

Параметры двухполюсника $\underline{Z}_2$ находим по формуле (13.2):

$$R_2 = R_0^2 / R_1 = 600^2 / 3400 = 106 \text{ Ом};$$

$$L_2 = C_1 R_0^2 = 0{,}0467 \cdot 10^{-6} \cdot 600^2 = 16{,}8 \cdot 10^{-3} \text{ Гн};$$

Таблица 13.5

f, Гц	f^2	$1-b_3f^2$	b_1f	$\frac{1-b_2f^2}{b_1f}$	$\left(\frac{1-b_3f^2}{a_1f}\right)^2$	$F_0\left(\frac{1-b_2f^2}{b_1f}\right)^2$	Числитель формулы (14)	Знаменатель формулы (14)	Отношение числителя к знаменателю формулы (14)	$A_к$	
										Нп	дБ
300	$9\cdot10^4$	0,997	0,3	3,32	11,02	490,4	491,4	12,02	40,9	1,856	16,1
500	$25\cdot10^4$	0,992	0,50	1,984	3,94	175,3	176,3	4,94	35,7	1,786	15,5
800	$64\cdot10^4$	0,979	0,80	1,224	1,50	66,8	67,8	2,50	27,1	1,65	14,3
1200	$144\cdot10^4$	0,952	1,20	0,793	0,629	28,0	29,0	1,629	17,8	1,44	12,5
2000	$4\cdot10^6$	0,868	2,00	0,434	0,188	8,37	9,37	1,188	7,89	1,032	9,0
2500	$6,25\cdot10^6$	0,793	2,50	0,317	0,1	4,45	5,45	1,1	4,95	0,80	7,0
3000	$9\cdot10^6$	0,702	3,00	0,234	0,055	2,45	3,45	1,055	3,27	0,592	5,1
4000	$16\cdot10^6$	0,47	4,00	0,118	0,014	0,62	1,62	1,014	1,6	0,24	2,1
5000	$25\cdot10^6$	0,175	5,00	0,035	0,001	0,05	1,05	1,001	1,005	0,002	0,02
5500	$30,25\cdot10^6$	0	5,5	0	0	0	1	1	1	0	0

$$C_2 = \frac{L_1}{R_0^2} = \frac{17{,}9 \cdot 10^{-3}}{600^2} = 0{,}0497 \cdot 10^{-6}\ \Phi.$$

13.9. По данным задачи 13.8 рассчитать корректор в трех случаях, приняв: 1) $A_{к0} = 16{,}5$ дБ, $f_0 = 5300$ Гц; 2) $A_{к0} = 16$ дБ, $f_0 = 5300$ Гц, 3) $A_{к0} = 16{,}5$ дБ, $f_0 = 5600$ Гц.

13.10. Доказать, что схемы рис. 13.7, *а* и *в* эквивалентны.

Б. Корректоры фазочастотных искажений

13.11. Для фазового корректора (см. рис. 13.7, *а*) по известным индуктивности L и характеристическому сопротивлению R_0 определить емкость C_2. Получить формулы фазовой постоянной $B_к$ и времени замедления $t_к$ корректора. Используя их, построить кривые зависимостей $B_к$ и $t_к$ в функции частоты для двух значений индуктивности: 1) $L_1 = L_1' = 36$ мГн; 2) $L_1 = L_1'' = 72$ мГн. Для обоих вариантов принять $R_0 = 600$ Ом. Вычислить параметры эквивалентной схемы рис. 13.7, *в*.

Р е ш е н и е. Емкость C_2 определим из формулы (13.17):

$$\underline{Z}_a\underline{Z}_b = j\omega L_1 \frac{1}{j\omega C_2} = \frac{L_1}{C_2} = R_0^2.$$

Отсюда

$$C_2 = L_1/R_0^2.$$

По формулам (13.9) и (13.10) найдем $B_к$ и $t_к$, учитывая, что $X_1 = \omega L_1$:

$$B_к = 2\,\mathrm{arctg}\,\frac{X_1}{R_0} = 2\,\mathrm{arctg}\,\frac{2\pi L_1}{R_0} f = 2\,\mathrm{arctg}\,a_1 f; \qquad (1)$$

$$t_к = \frac{dB_к}{d\omega} = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{dB_к}{df} = \frac{a_1}{\pi\left(1 + a_1^2 f^2\right)}, \qquad (2)$$

где

$$a_1 = 2\pi L_1/R_0.$$

Проведем числовые расчеты:

1) при $L = L_1'$ $a_1' = \dfrac{2\pi L_1'}{R_0} = \dfrac{6{,}28 \cdot 36 \cdot 10^{-3}}{600} = 188{,}5 \cdot 10^{-6}$,

2) при $L_1 = L_1''$

$$a_1'' = \frac{2\pi L_1''}{R_0} = 377 \cdot 10^{-6}.$$

Результаты расчетов по формулам (1) и (2) занесены в табл. 13.6.

Таблица 13.6

№	Варианты	f, Гц	0	1000	2000	4000	6000	8000	10 000
1	При $L_1 = L_1'$	$B_к$, рад	0	0,37	0,72	1,29	1,79	1,97	2,27
		$t_к'$, мкс	60	58	52,5	37,2	26,3	18,4	9,8
2	При $L_1 = L_1''$	$B_к''$, рад	0	0,72	1,29	1,96	2,3	2,5	2,62
		$t_к''$, мкс	120	105	76,7	36,9	19,7	11,8	7,9

По данным табл. 13.6 на рис. 13.16 построены требуемые кривые Определим параметры эквивалентной схемы рис. 13.7, *в*.
Для варианта 1

$$L_1'/2 = 18 \text{ мГн} = M; \quad 2C_2' = 2L_1'/R_0^2 = 0{,}2 \text{ мкФ}.$$

Для варианта 2

$$L_1''/2 = 36 \text{ мГн} = M; \quad 2C_2'' = 2L_1''/R_0^2 = 0{,}4 \text{ мкФ}.$$

13.12. Показать, что схема рис. 13.7, *б* эквивалентна схемам рис. 13.7, *г*, *д* и *е* при указанных на этих рисунках соотношениях между α и β, где

$$\alpha = \frac{1}{C_1}\sqrt{\frac{C_2}{L_1}}; \quad \beta = 1/L_1C_1.$$

13.13. Известны L_1, C_1 и R_0 фазового корректора (см. рис. 13.7, *б*). Определить L_2 и C_2. Получить формулы для $B_к$ и $t_к$ корректора и определить вид этих кривых в функции частоты. Проделать числовые

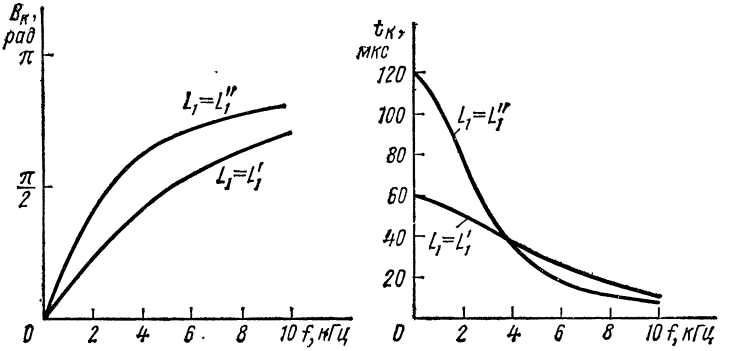


Рис. 13.16

расчеты и построить кривые зависимостей $B_к$ и $t_к$ в функции частоты f для трех случаев: 1) $R_0 = 600$ Ом, $L_1 = 36$ мГн, $C_1 = 0{,}025$ мкФ, 2) $R_0 = 600$ Ом, $L_1 = 36$ мГн, $C_1 = 0{,}05$ мкФ, 3) $R_0 = 600$ Ом, $L_1 = 36$ мГн, $C_1 = 1{,}6$ мкФ. Для каждого из случаев выяснить, какой эквивалентной Т-образно-мостовой схемой (см. рис. 13.7, *г*, *д*, *е*) может быть заменена заданная схема и каковы ее параметры.

Р е ш е н и е. Продольные $\underline{Z}_1$ и диагональные $\underline{Z}_2$ сопротивления корректора соответственно равны (см. гл. 10):

$$\underline{Z}_1 = \frac{j\omega}{C_1} \cdot \frac{1}{\omega_1^2 - \omega^2}; \tag{1}$$

$$\underline{Z}_2 = \frac{L_2}{j\omega}(\omega_2^2 - \omega^2), \tag{2}$$

где ω_1 и ω_2 — резонансные частоты параллельного и последовательного контуров, равные:

$$\omega_1 = 1/\sqrt{L_1C_1}; \quad \omega_2 = 1/\sqrt{L_2C_2}. \tag{3}$$

Схема рис. 13.7, *б* будет фазовым контуром лишь при совпадении частот ω_1 и ω_2, т. е. при

$$\omega_1 = \omega_2 = \omega_0. \tag{4}$$

В этом случае из (13.7) имеем

$$\underline{Z}_1\underline{Z}_2 = \frac{j\omega}{C_1} \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2} \cdot \frac{L_2}{j\omega}(\omega_0^2 - \omega^2) = \frac{L_2}{C_1} = R_0^2.$$

Отсюда находим искомую индуктивность

$$L_2 = C_1R_0^2, \tag{5}$$

а из (3) и (4) неизвестную емкость

$$C_2 = \frac{L_1C_1}{L_2} = \frac{L_1C_1}{C_1R_0^2} = \frac{L_1}{R_0^2}. \tag{6}$$

Получим требуемые формулы для $B_к$ и $t_к$. Из формулы (1) находим

$$X_1 = \frac{\omega}{C_1} \cdot \frac{1}{\omega_1^2 - \omega^2} = \frac{\omega}{C_1} \cdot \frac{1}{\frac{1}{L_1C_1} - \omega^2} = \frac{\omega L_1}{1 - \omega^2L_1C_1}. \tag{7}$$

Подставляя найденное X_1 в (13.9), получим

$$B_к = 2\,\mathrm{arctg}\,\frac{X_1}{R_0} = 2\,\mathrm{arctg}\,\frac{\frac{2\pi L_1}{R_0}f}{1 - 4\pi^2L_1C_1f^2} = 2\,\mathrm{arctg}\,\frac{a_1f}{1 - b_2f^2}. \tag{8}$$

Здесь введены обозначения

где

$$\left.\begin{aligned} a_1 &= 2\pi L_1/R_0; \quad b_2 = 4\pi^2 L_1 C_1 = 1/f_0^2, \\ f_0 &= 1/2\pi \sqrt{L_1 C_1}\ . \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

По (13.10) определяем время замедления корректора

$$t_к = \frac{dB_к}{d\omega} = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{dB_к}{df} = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{a_1 (1 + b_2 f^2)}{a_1^2 f^2 + (1 - b_2 f^2)^2}\ . \tag{10}$$

Беря производную $dt_к/df$ и приравняв ее нулю, найдем частоту f_{max}, при которой время замедления $t_к$ будет наибольшим ($t_к = t_{кmax}$). В результате преобразований найдем

$$f_{max} = \sqrt{\frac{1}{b^2}\left(\sqrt{4 - \frac{a_1^2}{b^2}} - 1\right)}\ . \tag{11}$$

Необходимо отметить, что это точка перегиба кривой $B_к$ и точка максимума кривой $t_к$ как функция частоты f. Подставляя это значение f_{max} в формулу (10), получим выражение для $t_{кmax}$;

$$t_{к\,max} = \frac{1}{2\pi f_0} \cdot \frac{1}{\sqrt{\frac{4L_2}{L_1} - 1} - 2\sqrt{\frac{L_2}{L_1}} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{L_1}{L_2}}}\ . \tag{12}$$

Формулам (11) и (12) можно придать более удобный вид, если ввести новые параметры m и η:

$$m = \sqrt{L_2/L_1}\ , \quad \eta = f/f_0. \tag{13}$$

Тогда с учетом (9) и (13) формулы (11), (12) и (10) примут вид

$$f_{max} = f_0 \sqrt{\sqrt{4 - \frac{1}{m^2}} - 1}\ ; \tag{14}$$

$$t_{к\,max} = \frac{1}{2\pi f_0} \cdot \frac{1}{\sqrt{4m^2 - 1} - 2m + \frac{1}{2m}}\ ; \tag{15}$$

$$t_к = \frac{1}{\pi m f_0} \cdot \frac{1 + \eta^2}{\left(\frac{\eta}{m}\right)^2 + (1 - \eta^2)^2}\ . \tag{16}$$

Анализируя выражение (14), приходим к выводу, что при $m \leqslant 1/\sqrt{3}$ кривая времени замедления имеет максимум при частоте $f = 0$. Это означает, что кривые $B_к$ и $t_к$ будут изменяться по кривым 1, рис. 13.17. При $m > 1/\sqrt{3} = 0{,}578$ кривые $B_к$ и $t_к$ обозначены цифрой 2, а при $m \gg 1/\sqrt{3}$ — цифрой 3.

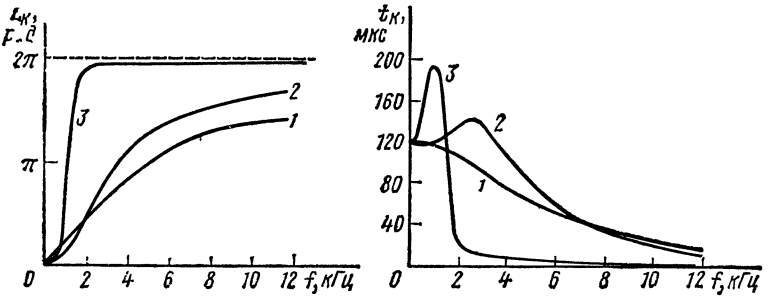


Рис. 13.17

Проведем числовые расчеты.

1. Из формулы (3) находим угловую частоту

$$\omega_1 = \frac{1}{\sqrt{L_1 C_1}} = \frac{1}{\sqrt{36 \cdot 10^{-3} \cdot 0{,}025 \cdot 10^{-6}}} = 3{,}33 \cdot 10^4 \text{ с}^{-1}$$

и частоту

$$f_1 = f_0 = \frac{\omega_1}{2\pi} = \frac{3{,}33 \cdot 10^4}{6{,}28} = 5{,}3 \text{ кГц, а}$$

из (5) и (6) — индуктивность L_2 и емкость C_2 диагонального плеча:

$$L_2 = C_1 R_0^2 = 0{,}025 \cdot 10^{-6} \cdot 36 \cdot 10^4 = 9 \text{ мГн}; \quad C_2 = \frac{L_1}{R_0^2} =$$

$$= \frac{36 \cdot 10^{-3}}{36 \cdot 10^4} = 0{,}1 \text{ мкФ}.$$

По формуле (13) вычисляем параметр m: $m = \sqrt{L_2/L_1} = \sqrt{9/36} = 0{,}5$.

Так как $m < 1/\sqrt{3} = 0{,}578$, то $f_{max} = 0$.

Расчет кривых $B_к$ и $t_к$ проводим по формулам (8) и (10). Результаты расчетов сведены в табл. 13.7, по которым на рис. 13.17 построены соответствующие кривые *1*.

Таблица 13.7

f, кГц	0	2	4	5,3	8	10	12
$B_к$, рад	0	1,44	2,59	3,14	4,11	4,35	4,62
$t_к$, мкс	120	106	73,5	60	34,8	26,2	19,7

Теперь выясним, какой эквивалентной схеме соответствует заданная. Для этого по формулам, приведенным в условии задачи 13.12, вычисляем α и β:

$$\alpha = \frac{1}{C_1}\sqrt{\frac{C_2}{L_1}} = \frac{1}{0{,}025\cdot 10^{-6}}\sqrt{\frac{0{,}1\cdot 10^{-6}}{36\cdot 10^{-3}}} = 6{,}67\cdot 10^4;$$

$$\beta = 1/L_1C_1 = 1/(36\cdot 10^{-3}\cdot 0{,}025\cdot 10^{-6}) = 1{,}11\cdot 10^9.$$

Отсюда видно, что $\beta < \alpha^2$, а это соответствует эквивалентной схеме рис. 13.7, *е*. Ее параметры:

$$L = \frac{L_2 + L_1}{2} = 22{,}5 \text{ мГн}; \quad M = \frac{L_2 - L_1}{2} = -13{,}5 \text{ мГн};$$

$$C_1/2 = 0{,}0125 \text{ мкФ}; \quad 2C_2 = 0{,}2 \text{ мкФ}.$$

2. По формулам (3), (5), (6) и (13) определяем

$$\omega_1 = \frac{1}{\sqrt{L_1C_1}} = \frac{1}{\sqrt{36\cdot 10^{-3}\cdot 0{,}05\cdot 10^{-6}}} = 2{,}36\cdot 10^4 \text{ с}^{-1};$$

$$f_1 = f_0 = \frac{\omega_1}{2\pi} = \frac{2{,}36}{6{,}28}\,10^4 = 3{,}76 \text{ кГц};$$

$$L_2 = C_1R_0^2 = 0{,}05\cdot 10^{-6}\cdot 36\cdot 10^4 = 18 \text{ мГн},$$

$$C_2 = \frac{L_1}{R_0^2} = \frac{36\cdot 10^{-3}}{36\cdot 10^4} = 0{,}1 \text{ мкФ}.$$

$$m = \sqrt{L_2/L_1} = \sqrt{18/36} = 0{,}707.$$

Так как $m > 1/\sqrt{3}$, то по формулам (14) и (15) вычисляем $f_{\max}$ и $t_{\text{к}\max}$:

$$f_{\max} = f_0\sqrt{\sqrt{4 - 1/m^2} - 1} = 3{,}76 \times \sqrt{\sqrt{4 - 1/0{,}5} - 1} =$$

$$= 2{,}42 \text{ кГц};$$

$$t_{\text{к max}} = \frac{1}{2\pi f_0}\cdot\frac{1}{\sqrt{4m^2 - 1} - 2m + 1/(2m)} =$$

$$= \frac{1}{6{,}28\cdot 3{,}76\cdot 10^3}\cdot\frac{1}{\sqrt{4\cdot 0{,}5 - 1} - 1{,}414 + 1/1{,}414} = 144 \text{ мкс}.$$

По (9) находим a_1 и b_2:

$$a_1 = 2\pi L_1/R_0 = 2\pi\cdot 36\cdot 10^{-3}/600 = 377\cdot 10^{-6};$$

$$b_2 = 1/f_0^2 = 1/(3{,}76\cdot 10^3)^2 = 7{,}07\cdot 10^{-8}.$$

По (8) и (10) рассчитываем $B_{\text{к}}$ и $t_{\text{к}}$, результаты расчета заносим в табл. 13.8.

Кривые $B_{\text{к}}$ и $t_{\text{к}}$ построены на рис. 13.17 (кривые *2*). Как и в варианте 1, выясняем, что схемой, эквивалентной заданной, является схема рис. 13.7, *е*. В результате расчетов получаем $\alpha = 3{,}33\cdot 10^4$,

Таблица 13 8

f, кГц	0	1	2,42	3,76	6	8	10	12
$B_к$, рад	0	0,77	2,0	3,14	4,35	4,87	5,19	5,38
$t_к$, мкс	120	117	144	120	57,6	30,8	18,9	12,7

$\beta = 5{,}55 \cdot 10^8$, т. е. $\beta < \alpha^2$. Параметры эквивалентной схемы: $L = 27$ мГн, $M = -9$ мГн, $C_1/2 = 0{,}025$ мкФ, $2C_2 = 0{,}2$ мкФ.

3. Определяем f_0, L_2, C_2, и m:

$$\omega_1 = 1/\sqrt{L_1/C_1} = 1/\sqrt{36 \cdot 10^{-3} \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-6}} = 0{,}416 \cdot 10^4 \text{ с}^{-1},$$

$$f_0 = \omega_1/2\pi = 0{,}662 \text{ кГц}, \quad L_2 = C_1 R_0^2 = 1{,}6 \cdot 10^{-6} \cdot 36 \cdot 10^4 = 0{,}576 \text{ Гн};$$

$$C_2 = L_1/R_0^2 = 36 \cdot 10^{-3}/(36 \cdot 10^{-4}) = 0{,}1 \text{ мкФ};$$

$$m = \sqrt{L_2/L_1} = \sqrt{576/36} = 4.$$

Так как $m > 1/\sqrt{3}$, то по (14) и (15) вычисляем f_{max} и $t_{к\,max}$:

$$f_{max} = f_0 \sqrt{\sqrt{4 - 1/m^2} - 1} = 0{,}662 \sqrt{\sqrt{4 - 1/16} - 1} = 0{,}662 \text{ кГц};$$

$$t_{к\,max} = \frac{1}{2\pi f_0} \cdot \frac{1}{\sqrt{4m^2 - 1} - 2m + 1/2m} \approx \frac{m}{\pi f_0} =$$

$$= \frac{4}{\pi \cdot 0{,}662} 10^{-3} = 192 \text{ мкс}.$$

Вычисляем значения a_1 и b_2:

$$a_1 = 2\pi L_1/R_0 = 377 \cdot 10^{-6}; \quad b_2 = 1/f_0^2 = 1/(0{,}662 \cdot 10^3)^2 = 2{,}28 \cdot 10^{-6}.$$

Результаты расчетов $B_к$ и $t_к$ заносим в табл. 13.9.

Таблица 13.9

f, кГц	0	0,662	2	4	6	8	10	12
$B_к$, рад	0	3,14	6,1	6,2	6,23	6,24	6,25	6,26
$t_к$, мкс	120	192	18,3	3,6	2,5	1,5	0,6	0,4

На рис. 13.17 по данным табл. 13.9 построены кривые $B_к$ и $t_к$ (кривые 3).

В этом случае схемой, эквивалентной заданной, является схема рис. 13.7, *г*, так как расчеты, аналогичные двум предыдущим вариантам, дают: $\alpha = 1{,}04 \cdot 10^3$, $\beta = 1{,}74 \cdot 10^6$, т. е. $\beta > \alpha^2$. Параметры этой схемы:

$$(L_2 - L_1)/2 = 0{,}27 \text{ Гн} > 0, \quad L_1 = 36 \text{ мГн}, \quad C_1/2 = 0{,}8 \text{ мкФ},$$

$$2C_2 = 0{,}2 \text{ мкФ}.$$

13.14. Параметры фазового корректора (см. рис. 13.7, *б*) имеют следующие значения: $L_1 = L_2 = 36$ мГн, $C_1 = C_2 = 0{,}1$ мкФ. Рассчитать и построить кривые зависимости $B_к$ и $t_к$ в функции частоты. Определить Т-образную мостовую схему замещения, эквивалентную заданной, и определить ее параметры.

ГЛАВА ЧЕТЫРНАДЦАТАЯ

ОСНОВЫ СИНТЕЗА ДВУХПОЛЮСНИКОВ

ОСНОВНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ И СООТНОШЕНИЯ

1. Задача синтеза. Эта задача заключается в нахождении схем электрических цепей и величин, входящих в них элементов по известным частотным или временным свойствам цепей.

В данной главе рассматриваются вопросы построения электрической цепи двухполюсника по заданной функции $F(\overline{p})$, выражающей его частотные свойства.

Функция $F(\overline{p})$ комплексного переменного (комплексной частоты) $p = \sigma + j\omega$ может быть комплексным сопротивлением $Z(\overline{p})$, комплексной проводимостью $Y(\overline{p})$ (или комплексным коэффициентом передачи $T(\overline{p})$ при синтезе четырехполюсника) некоторой пассивной электрической цепи с сосредоточенными параметрами.

Термином, обобщающим входные сопротивление $Z(\overline{p})$ и проводимость $Y(\overline{p})$, является «входная функция». Обобщающим термином для входных функций и коэффициента передачи является термин «функция цепи». Входная функция $F(\overline{p})$ может быть реализована в виде электрической цепи с сосредоточенными параметрами при условии, что она является дробно-рациональной функцией

$$F(\overline{p}) = \frac{A(\overline{p})}{B(\overline{p})} = \frac{a_n p^n + a_{n-1}p^{n-1} + \cdots + a_1 p + a_0}{b_m p^m + b_{m-1}p^{m-1} + \cdots + b_1 p + b_0} =$$

$$= H\,\frac{(p - p_{01})(p - p_{02}) \ldots (p - p_{0n})}{(p - p_1)(p - p_2) \ldots (p - p_к) \ldots (p - p_m)}, \qquad (14.1)$$

у которой коэффициенты a_k и b_k — положительные и действительные числа, $H = a_n/b_m$ — числовой коэффициент, все полюсы $p_к = \sigma_к + j\omega_к$ лежат в левой части комплексной полуплоскости (т. е. $\sigma_к \leqslant 0$), в том числе могут быть простые (не кратные) полюсы, лежащие на мнимой оси (т. е. $p_к = j\omega_к$). Все нули $p_{0к} = \sigma_{0к} + j\omega_{0к}$ входных функций лежат в левой полуплоскости, в том числе могут быть простые нули, лежащие на мнимой оси (для функции передачи $T(\overline{p})$ нули могут лежать и в правой полуплоскости).

2. Положительная вещественная функция (п. в. ф.). Это такая функция $F(\overline{p})$, которая удовлетворяет двум условиям: 1) ее вещественная часть положительна при положительных значениях вещественной части p (условие положительности); 2) она вещественна при

вещественных (не комплексных) значениях p (условие вещественности).

3. Свойства входных функций пассивных электрических цепей. Входная функция $F(\overline{p})$ пассивной электрической цепи, т. е. входное сопротивление $Z(\overline{p})$ или входная проводимость $Y(\overline{p})$, — есть п.в.ф.

Необходимое и достаточное условие возможности реализации рациональной п.в.ф. функции $F(\overline{p})$ [см. формулу (14.1)] в виде входной функции некоторой пассивной цепи заключается в одновременном выполнении следующих пяти условий.

а. Все коэффициенты $a_к$ и $b_к$ полиномов $A(\overline{p})$ и $B(\overline{p})$ должны быть вещественными положительными числами.

б. Наибольшие степени p в $A(\overline{p})$ и $B(\overline{p})$ не могут отличаться более чем на единицу; то же и в отношении минимальных степеней p.

в. Все полюсы $F(\overline{p})$ лежат в левой полуплоскости и могут быть вещественные ($p_i = -\sigma_i$) и комплексно-сопряженные ($p_k = -\sigma_k \pm j\omega_k$). Кроме того, могут быть полюсы на мнимой оси, такие полюсы могут быть только простыми (не кратными) с действительными положительными вычетами.

Замечание. Напомним, что вычет функции $F(\overline{p}) = A(\overline{p})/B(\overline{p})$ в простом полюсе p_i вычисляется по формуле

$$[\operatorname{Res} F(\overline{p})]_{p=p_i} = [(p-p_i)F(\overline{p})]_{p=p_i} = \left[\frac{A(\overline{p})}{B'(\overline{p})}\right]_{p=p_i}, \quad (14.2)$$

где $B'(\overline{p})$ — производная от $B(\overline{p})$ по p.

г. Нули функции $F(\overline{p})$ лежат в левой полуплоскости, а если имеются нули, расположенные на мнимой оси, то они могут быть только простыми (не кратными).

д. Вещественная часть функции $F(\overline{p})$ при чисто мнимых значениях p (т. е. на мнимой оси, где $p = j\omega$) неотрицательна, т. е. $\operatorname{Re}[F(j\omega)] \geqslant 0$.

Пример дан в задаче 14.1.

4. Проверка положительности и вещественности функций в общем виде. Условие п. в. ф. сформулировано в п. 2, а проверка их свойств — в п. 3. Проверка условий, указанных в п. а и б, затруднений не вызывает и является очевидной; в п. в и г осуществляется проверка того, что корни полиномов $A(\overline{p}) = 0$ и $B(\overline{p}) = 0$ находятся в левой полуплоскости или лежат на мнимой оси, но в последнем случае они являются простыми. Иными словами, надо убедиться в том, что полиномы $A(\overline{p})$ и $B(\overline{p})$ являются полиномами Гурвица*. Проверка того, что

---

* Полином $A(\overline{p}) = a_n p^n + a_{n-1}p^{n-1} + \ldots + a_k p^k + \ldots + a_1 p + a_0$ называется строгим полиномом Гурвица, если все его коэффициенты a_k вещественны и положительны, ни один из них не равен нулю и имеет все нули в левой полуплоскости p. Если полином имеет нули, лежащие на мнимой оси ($j\omega$ должны быть простые), то такой полином называется модифицированным (нестрогим) полиномом Гурвица.

каждый из полиномов $A(\overline{p})$ и $B(\overline{p})$ является полиномом Гурвица, может быть осуществлена различными способами. Укажем один из них.

Если четную часть полинома $A(\overline{p})$ обозначить через $m_1(\overline{p})$, а нечетную — через $n_1(\overline{p})$, то если отношение $m_1(\overline{p})/n_1(\overline{p})$ представляет собой функцию реактивного сопротивления (см. п. 5 основных положений и соотношений), то $A(\overline{p})$ есть полином Гурвица (или полином Гурвица, умноженный на четный полином).

Выяснить, является ли $m_1(\overline{p})/n_1(\overline{p})$ функцией реактивного сопротивления, можно двояко (см. п. 5 основных положений и соотношений):

1) разложением указанного отношения на элементарные дроби;

2) представлением его в виде цепной дроби.

При разложении (14.1) на элементарные дроби приходится определять вычеты функции $F(\overline{p})$, которые должны быть положительны. Если в одном из нулей $n_1(\overline{p})$ вычет окажется равным нулю, то это будет указывать на то, что этот нуль является одновременно и нулем функции $A(\overline{p})$. Этот нуль легко выделить из $A(\overline{p})$, что приведет к упрощению $A(\overline{p})$ (см. пример в задаче 14.16, п. г).

Проверка функции $A(\overline{p})$ проводится аналогично проверке функции $B(\overline{p})$.

Наконец, остается проверить вещественность заданной входной функции [$Z(\overline{p})$ или $Y(\overline{p})$], т. е. что ее вещественная часть на мнимой оси (при $p = j\omega$) неотрицательна (п. 3, д основных положений и соотношений).

Если задана

$$Z(\overline{p}) = \frac{m_1(\overline{p}) + n_1(\overline{p})}{m_2(\overline{p}) + n_2(\overline{p})}, \qquad (14.3)$$

где $m_1(\overline{p})$ и $n_1(\overline{p})$, $m_2(\overline{p})$ и $n_2(\overline{p})$ — соответственно четная и нечетная части числителя и знаменателя, то ее вещественная часть при $p = j\omega$ будет

$$[\mathrm{Re}\, Z(\overline{p})]_{p=j\omega} = \mathrm{Re}\, Z(j\omega) = U(\omega^2) = \frac{N(\omega^2)}{D(\omega^2)} = \left.\frac{m_1 m_2 - n_1 n_2}{m_2^2 - n_2^2}\right|_{p=j\omega} \qquad (14.4)$$

и является четной функцией ω. Очевидно, последнее выражение при всех частотах должно быть больше или равно нулю. Знаменатель последнего выражения всегда положителен, поэтому значение отношения (14.4) будет положительно, если его числитель положителен. Если ввести обозначение $x = \omega^2$, то должно быть

$$N(x) = m_1 m_2 - n_1 n_2 \geqslant 0. \qquad (14.5)$$

Проверку последнего условия можно осуществить на основании теории, разработанной Штурмом. Суть ее такова. В рассмотрение вводится ряд вспомогательных функций, называемых ф у н к ц и я-

ми Штурма*. Дадим определение этих функций. Начальной функцией Штурма является рассматриваемая функция $N(x)$, которую обозначают через $N_0(x)$. Ее производная $N_0'(x)$, обозначаемая через $N_1(x)$, называется первой функцией Штурма. Второй функцией Штурма $N_2(x)$ является остаток от деления начальной функции Штурма $N_0(x)$ на первую $N_1(x)$, взятый с обратным знаком, т. е. $N_2(x)$ равно первому остатку, взятому с обратным знаком, при этом процесс деления заканчивается, когда высшая степень x остатка будет на единицу меньше высшей степени x функции $N_1(x)$. Третьей функцией Штурма $N_3(x)$ называется остаток от деления второй функции Штурма $N_2(x)$ на первую функцию Штурма $N_1(x)$ с обратным знаком; процесс деления также заканчивается, когда высшая степень x остатка будет на единицу меньше высшей степени x делителя $N_2(x)$. Итак, $N_3(x)$ равно второму остатку, взятому с обратным знаком. Аналогично определяют четвертую $N_4(x)$, пятую $N_5(x)$ и т. д. функции Штурма. Процесс деления заканчивается, когда последним остатком будет вещественная величина.

Найдя функции Штурма, определяют их знаки (обозначенные «+» и «—» для значений x_1 и x_2 на границе всего диапазона изменения частот, т. е. при $\omega_1 = 0$ (т. е. $x_1 = 0$) и $\omega_2 = \infty$ (т. е. $x_2 = \infty$).

Для значения $x_1 = 0$ определяют число изменений знаков $W(x_1)$ всех функций Штурма, которые получаются из сопоставления знаков для каждых двух рядом стоящих функций: если они одинаковы, то изменение знака равно нулю, а если они разные, то изменение знака равно единице. Если значения каких-либо функций Штурма равны нулю, то их из рассмотрения отбрасывают. Аналогично определяют число изменений знаков $W(x_2)$ всех функций Штурма при x_2. Например, для функций Штурма, представленных в табл. 14.1, число изменений знаков при x_1 $W(x_1) = 3$: одно изменение при переходе от $N_0(x_1)$ к $N_1(x_1)$, другое — от $N_2(x_1)$ к $N_3(x_1)$ и третье — от $N_3(x_1)$ к $N_4(x_1)$, а при $x = \infty$ $W(x_2) = W(\infty)$ одно изменение [при переходе от $N_0(x_2)$ к $N_1(x_2)$].

Таблица 14.1

$N(x)$ / x	$N_0(x)$	$N_1(x)$	$N_2(x)$	$N_3(x)$	$N_4(x)$	Число изменений по знаку $W(x)$
$x = x_1$	+	−	−	+	−	3
$x = x_2$	+	−	0	−	−	1

* Формулировка теоремы Штурма: если вещественные числа x_1 и $x_2 (x_1 < x_2)$ не являются нулями полинома $N_0(x)$, не имеющего кратных нулей, то число изменений по знаку функций Штурма $W(x_1)$ и $W(x_2)$ и разность $W(x_1) - W(x_2)$ равна числу вещественных нулей функции $N_0(x)$, заключенных между x_1 и x_2.

Затем определяют разность числа изменений по знаку $W(x_1) - W(x_2)$.

В рассмотренном примере эта разность равна двум: $W(x_1) - W(x_2) = 3 - 1 = 2$.

Если указанная разность числа изменений знаков равна нулю, т. е. $W(x_1) - W(x_2) = 0$, то функция $N(x)$ во всем интервале изменения x не меняет своего знака, и если $N(x)$ при $x = 0$ положительна, то она удовлетворяет требованию (14.5), т. е. является положительной вещественной функцией.

Примеры даны в задачах 14.16 и 14.17.

5. Синтез реактивных двухполюсников (т. е. двухполюсников, состоящих только из элементов L и C). Функции сопротивления $Z_{LC}(\overline{p})$ и проводимости $Y_{LC}(\overline{p})$ таких двухполюсников называются реактивными функциями. Нули и полюсы реактивной функции простые и лежат на мнимой оси $j\omega$, взаимно чередуясь. Значения реактивной функции $F(j\omega)$ на мнимой оси $j\omega$ являются чисто мнимыми и возрастают в точках непрерывности с ростом частоты $\frac{dF(j\omega)}{d(j\omega)} > 0$.

Признаком реактивной рациональной функции является то, что либо полином числителя четный $(a_0 + a_2p^2 + a_4p^4 + \ldots)$, а полином знаменателя нечетный $(b_1p + b_3p^3 + b_5p^5 + \ldots)$, либо наоборот.

Функция реактивного сопротивления может быть разложена на простые дроби в следующем виде:

$$Z_{LC}(\overline{p}) = k_\infty p + \frac{k_0}{p} + \sum_{i=1}^{n} \frac{2k_i p}{p^2 + \omega_i^2}, \qquad (14.6)$$

где k_∞ — вычет функции $Z_{LC}(\overline{p})$ в полюсе $p = \infty$ (или для инверсной величины в полюсе $p = 0$); k_0 — вычет в полюсе $p = 0$, k_i — вычет в полюсе $p_i = j\omega_i$.

Схема реализации функции $Z_{LC}(\overline{p})$ имеет вид первой формы Фостера (рис. 14.1, *а*) — последовательное соединение параллельных LC-контуров. Ее элементы находят по формулам

$$L_\infty = k_\infty; \quad C_0 = \frac{1}{k_0}; \quad L_i = \frac{2k_i}{\omega_i^2}; \quad C_i = \frac{1}{2k_i}. \qquad (14.7а)$$

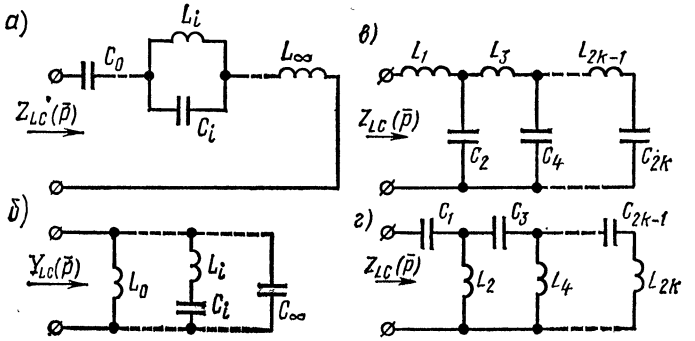


Рис. 14.1

Это следует из того, что в операторной форме индуктивное сопротивление записывают в виде $pL = k_\infty p$, емкостное $1/pC = k_0/p$, сопротивление параллельного контура, состоящего из L_i и C_i, равно

$$Z_{LC}(\overline{p}) = \frac{pL_i \dfrac{1}{pC_i}}{pL_i + \dfrac{1}{pC_i}} = \frac{\dfrac{1}{C_i} p}{p^2 + \dfrac{1}{L_i C_i}} = \frac{2k_i p}{p^2 + \omega_i^2}. \qquad (14.7б)$$

Функция реактивной проводимости может быть разложена на простые дроби в следующем виде:

$$Y_{LC}(\overline{p}) = k'_\infty p + \frac{k'_0}{p} + \sum_{i=1}^{n} \frac{2k'_i p}{p^2 + \omega_i'^2}, \qquad (14.8)$$

где k'_∞ и k'_0 — вычеты функции $Y_{LC}(\overline{p})$ в полюсах $p = \infty$ и $p = 0$; k'_i — вычет в полюсе $p_i = j\omega'_i$.

Схема реализации имеет вид второй формы Фостера (рис. 14.1, *б*), т. е. параллельное соединение последовательных LC-ветвей. Ее элементы находят по формулам

$$L_0 = 1/k'_0; \quad C_\infty = k'_\infty; \quad L_i = 1/2k'_i; \quad C_i = 2k'_i/\omega_i'^2. \qquad (14.9а)$$

Это вытекает из того, что в операторной форме индуктивная проводимость имеет вид $1/pL_i = k'_0/p$, емкостная проводимость $pC_i = k'_\infty p$, а проводимость последовательно соединенных элементов L_i и C_i равна

$$Y_i(\overline{p}) = \frac{1}{pL_i + \dfrac{1}{pC_i}} = \frac{\dfrac{1}{L_i} p}{p^2 + \dfrac{1}{L_i C_i}} = \frac{2k'_i p}{p^2 + \omega_i'^2}. \qquad (14.9б)$$

Пример дан в задаче 14.5.

Две другие формы реализации могут быть получены разложением заданной функции сопротивления (или проводимости) в цепную дробь, начиная деление с высших (или низших) степеней p. Разложение, например, $Z(\overline{p})$ в цепную дробь имеет вид

$$Z(\overline{p}) = Z_1(\overline{p}) + \cfrac{1}{Y_2(\overline{p}) + \cfrac{1}{Z_3(\overline{p}) + \cfrac{1}{Y_4(\overline{p}) + \ddots + \cfrac{1}{Z_{n-1}(\overline{p}) + \cfrac{1}{Y_n(\overline{p})}}}}}. \qquad (14.10)$$

Этому выражению соответствует цепная (лестничная) схема.

Для реактивных цепей схемы реализации имеют вид схем, соответствующих первой (рис. 14.1, *в*) и второй (рис. 14.1, *г*) формам Кауэра. Пример дан в задаче 14.5.

6. Синтез двухполюсников, состоящих из элементов R **и** C. Особенности функции $Z_{RC}(\overline{p})$:

а) высшая степень полинома числителя меньше или равна высшей степени полинома знаменателя;

б) все полюсы и нули расположены на отрицательной вещественной полуоси и взаимно чередуются, причем ближайшим к началу координат является полюс (он может, в частности, находиться и в начале координат).

Особенности функции $Y_{RC}(\overline{p})$:

а) высшая степень полинома числителя больше или равна высшей степени полинома знаменателя;

б) полюсы и нули расположены на отрицательной вещественной полуоси, причем первым является нуль.

Функция сопротивления $Z_{RC}(\overline{p})$ может быть разложена на следующие простые дроби:

$$Z_{RC}(\overline{p}) = k_\infty + \frac{k_0}{p} + \sum_{i=1}^{n} \frac{k_i}{p+\sigma_i}, \qquad (14.11)$$

где k_∞, k_0 и k_i — вычеты функции Z_{RC} в бесконечно удаленной точке (в полюсе $p = \infty$), в начале координат (в полюсе $p = 0$) и в полюсах — σ_i.

Схема реализации функции $Z_{RC}(\overline{p})$ по формуле (14.11) имеет вид первой формы Фостера (рис. 14.2, *а*) — последовательное соединение параллельных RC-контуров. Ее элементы вычисляют по формулам

$$R_\infty = k_\infty; \quad C_0 = 1/k_0; \quad R_i = k_i/\sigma_i; \quad C_i = 1/k_i. \qquad (14.12а)$$

Это вытекает из того, что в операторной форме активное сопротивление выражается действительным числом $R_\infty = k_\infty$, емкостное со-

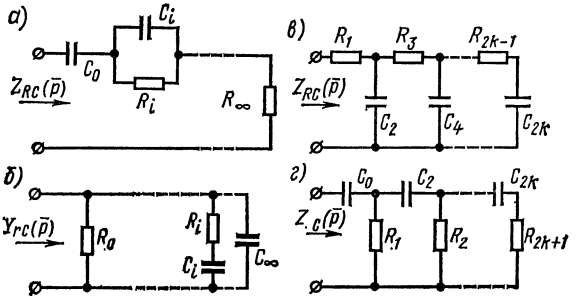


Рис. 14.2

противление $1/pC = k_0/p$, а сопротивление параллельного контура, состоящего из R_i и C_i, равно

$$Z_i(\overline{p}) = \frac{\frac{1}{pC_i} R_i}{\frac{1}{pC_i} + R_i} = \frac{\frac{1}{C_i}}{p + \frac{1}{R_i C_i}} = \frac{k_i}{p + \sigma_i}. \qquad (14.12б)$$

Аналогично функция проводимости $Y_{RC}(\overline{p})$ может быть разложена на простые дроби:

$$Y_{RC}(\overline{p}) = k'_\infty p + k'_0 + \sum \frac{k'_i p}{p + \sigma_i}, \qquad (14.13)$$

где k'_∞, k'_0 и k'_i — вычеты функции $\frac{1}{pC} Y_{RC}(\overline{p})$ в полюсах $p = \infty$, $p = 0$ и $p = \sigma_i$.

Схема реализации функции $Y_{RC}(\overline{p})$ по формуле (14.13) имеет вид второй формы Фостера, показанной на рис. 14.2, *б*, т. е. параллельное соединение последовательных RC-ветвей. Ее элементы определяют по формулам

$$R_0 = 1/k'_0; \quad C_\infty = k'_\infty; \quad R_i = 1/k'_i; \quad C_i = k'_i/\sigma'_i. \qquad (14.14а)$$

Это следует из того, что в операторной форме активная проводимость $1/R_0 = k'_i$ есть действительное число, емкостную проводимость записывают в виде $pC_\infty = pk'_\infty$, а проводимость ветви, состоящей из последовательно соединенных элементов R_i и C_i, равна

$$Y_i(\overline{p}) = \frac{1}{R_i + \frac{1}{pC_i}} = \frac{\frac{1}{R_i} p}{p + \frac{1}{R_i C_i}} = \frac{k'_i p}{p + \sigma'_i}. \qquad (14.14б)$$

По аналогии с LC-цепью можно получить две другие формы реализации разложением заданной функции сопротивления $Z_{RC}(\overline{p})$ или проводимости $Y_{RC}(\overline{p})$ в цепную дробь, начиная деление с высших или низших степеней p. Схемы реализации имеют вид цепных (лестничных) схем, соответствующих первой (рис. 14.2, *в*) и второй (рис. 14.2, *г*) формам Кауэра.

Пример дан в задаче 14.7.

7. Синтез двухполюсников, состоящих из RL-элементов. Особенности функции $Z_{RL}(\overline{p})$:

а) высшая степень полинома числителя больше или равна высшей степени полинома знаменателя;

б) полюсы и нули расположены на отрицательной вещественной полуоси и чередуются, при этом первым к началу координат расположен нуль; в начале координат может располагаться только нуль, в бесконечности может быть только полюс.

Свойства функции $Y_{RL}(\overline{p})$, очевидно, обратны свойствам функции $Z_{RL}(\overline{p})$.

Функции $Z_{RL}(\overline{p})$ и $Y_{RL}(\overline{p})$ могут быть разложены на простые дроби:

$$Z_{RL}(\overline{p}) = k_\infty p + k_0 + \sum_{i=1}^{n} \frac{k_i p}{p + \sigma_i}; \tag{14.15}$$

$$Y_{RL}(\overline{p}) = k'_\infty + \frac{k'_0}{p} + \sum_{i=1}^{n} \frac{k'_i}{p + \sigma'_i}, \tag{14.16}$$

где k_∞, k_0 и k_i — вычеты функции $\frac{1}{p} Z_{RL}(\overline{p})$; k'_∞, k'_0 и k'_i — вычеты функции $Y_{RL}(\overline{p})$ в точках $p = \infty$, $p = 0$ и $p = -\sigma_i$ либо $p = -\sigma'_i$.

Схемы реализации по формулам (14.15) и (14.16) имеют вид первой и второй форм Фостера и показаны на рис. 14.3, *а* и *б*. Их элементы вычисляют по формулам

$$R_0 = k_0; \quad L_\infty = k_\infty; \quad R_i = k_i; \quad L_i = k_i/\sigma_i; \tag{14.17}$$

$$\left.\begin{aligned} R_\infty &= 1/k'_\infty, \quad L_0 = 1/k'_0; \\ R_i &= \sigma'_i/k'_i, \quad L_i = 1/k'_i. \end{aligned}\right\} \tag{14.18}$$

Это следует из того, что сопротивление ветви, состоящей из параллельно соединенных элементов R_i и L_i, равно

$$Z_i(\overline{p}) = \frac{pL_iR_i}{pL_i + R_i} = \frac{R_i p}{p + \frac{R_i}{L_i}} = \frac{k'_i p}{p + \sigma'_i}. \tag{14.19}$$

Проводимость ветви, состоящей из последовательно соединенных элементов R_i и L_i, равна

$$Y_i(\overline{p}) = \frac{1}{pL_i + R_i} = \frac{\frac{1}{L_i}}{p + \frac{R_i}{L_i}} = \frac{k'_i}{p + \sigma'_i}. \tag{14.20}$$

Следует заметить, что функция сопротивления двухполюсника из RL-элементов аналогична функции проводимости двухполюсника из элементов RC, а функция проводимости двухполюсника из элементов RL аналогична функции сопротивления из элементов RC.

Разлагая функцию сопротивления $Z_{RL}(\overline{p})$ [проводимости $Y_{RL}(\overline{p})$] в цепную дробь, начиная деление с высших или низших степеней p, можно получить схемы Кауэра (рис. 14.3, *в* и *г*).

Пример дан в задаче 14.9.

8. Синтез двухполюсников, состоящих из R, L и C-элементов. Реализация двухполюсников общего вида возможна одним из следующих методов.

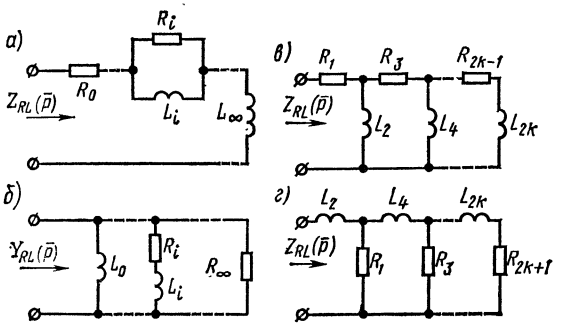


Рис. 14.3

1. Выделение из $Z(p)$ чисто мнимых полюсов (если они имеются) и реализация их в виде последовательного соединения элементов цепей без потерь, т. е.

$$Z(p) = k_\infty p + \frac{k_0}{p} + \sum_{i=1}^{n} \frac{2k_i p}{p^2 + \omega_i^2} + Z_1(p). \qquad (14.21)$$

Первые два слагаемых и Σ реализуются в виде реактивных элементов, показанных на рис. 14.4, *а*. Далее, если функция $Z_1(p)$ имеет нули на мнимой оси, то их выделяют из функции проводимости $Y_1(p)$ в следующем виде:

$$Y_1(p) = \frac{1}{Z_1(p)} = k'_\infty p + \frac{k'_0}{p} + \sum_{i=1}^{m} \frac{2k'_i p}{p^2 + \omega_i'^2} + \frac{1}{Z_2(p)}. \qquad (14.22)$$

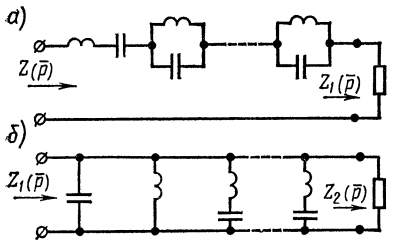


Рис. 14.4

Этот этап реализации показан на рис. 14.4, *б*.

Если $Z_2(p)$ имеет полюсы на мнимой оси, то они вновь выделяются по аналогии с предыдущим [см. формулу (14.21)]. В результате будет получена функция $Z_2(p)$, не имеющая полюсов и нулей на мнимой оси. Такая функция называется функцией минимального реактивного сопротивления. Если нули и полюсы этой функции лежат на отрицательной вещественной полуоси, то они реализуются в виде элементов RL и (или) RC.

Пример дан в задаче 14.11.

2. Реализация разложением заданной функции в цепную дробь.

Примеры приведены в задачах 14.13 и 14.14.

Существуют и другие способы реализации, рассматриваемые в литературе по синтезу электрических цепей (см. [19, 20]).

УПРАЖНЕНИЯ И ЗАДАЧИ

А. Положительные вещественные функции

14.1. Проверить положительность и вещественность функции

$$F(\overline{p}) = \frac{p^2 + p + 1}{p^2 + p + 4}.$$

Р е ш е н и е. Заданная функция рациональна. Она будет положительной и вещественной, если выполняются все пять условий, указанных в п. 3 основных положений и соотношений. Проверим это. Условие а) выполняется, так как все коэффициенты a_k и b_k положительны. Пункт б) тоже выполняется, так как наибольшие и наименьшие степени p соответственно в числителе и знаменателе одинаковы.

Для проверки условия в) выясним расположение полюсов $F(\overline{p})$. Сначала найдем их, приравнивая знаменатель $F(\overline{p})$ нулю:

$$p^2 + p + 4 = 0$$

отсюда $p_{1,2} = -0{,}5 \pm j0{,}5\sqrt{15}$, т. е. полюсы лежат в левой полуплоскости, что соответствует выполнению условия.

Проверим выполнимость условия г). Для этого найдем корни числителя $p^2 + p + 1 = 0$: $p_{1,2} = -0{,}5 \pm j\sqrt{0{,}75}$, т. е. нули $F(\overline{p})$ лежат в левой полуплоскости, что соответствует выполнению условия.

Наконец, проверим выполнимость условия д). Для этого найдем выражение $F(\overline{p})$ на мнимой оси (т. е. при $p = j\omega$) и определим его вещественную часть:

$$[F(\overline{p})]_{p=j\omega} = F(j\omega) = \left[\frac{p^2 + p + 1}{p^2 + p + 4}\right]_{p=j\omega} = \frac{-\omega^2 + j\omega + 1}{-\omega^2 + j\omega + 4} =$$

$$= \frac{(1 - \omega^2 + j\omega)(4 - \omega^2 - j\omega)}{(4 - \omega^2 + j\omega)(4 - \omega^2 - j\omega)} = \frac{(\omega^2 - 2)^2 + j3\omega}{(4 - \omega^2)^2 + \omega^2}.$$

Отсюда видно, что вещественная часть этого выражения при любых ω положительна, т. е. условие д) тоже выполняется. Итак, выполняются все пять условий. Следовательно, заданная функция $F(\overline{p})$ является п.в.ф.

14.2. Проверить положительность и вещественность функций

$$F(\overline{p}) = \frac{4p^2 + p + 1}{p^2 + p + 1}; \quad F(\overline{p}) = \frac{p^2 + p + 2}{2p^2 + p + 1}.$$

14.3. Определить, почему функции

$$\text{а) } F_1(\overline{p}) = \frac{2}{p^2 + 2p + 2}; \quad \text{б) } F_2(\overline{p}) = \frac{p^3 + 2p}{p^4 + 2p^2 + 1};$$

в) $F_3(\overline{p}) = \dfrac{3p^2 + p + 1}{p^3 + p^2 + p + 1}$

не являются положительными вещественными функциями.

14.4. Показать на комплексной плоскости полюсно-нулевое изображение функций:

а) $F(\overline{p}) = \dfrac{p^2 + 4p + 3}{p^2 + 2p}$; б) $F(\overline{p}) = \dfrac{1}{(p+1)(p+2)(p+3)}$;

в) $F(\overline{p}) = \dfrac{p}{(p+1)(p^2+p+1)}$; г) $F(\overline{p}) = \dfrac{p^4 - 1}{p^4 + 5p^2 + 4}$.

Указать, какие из них являются п.в.ф., а какие не являются.

Б. Синтез реактивных двухполюсников

14.5. Осуществить реализацию функции сопротивления

$$Z(\overline{p}) = \frac{8p^4 + 40p^2 + 32}{20p^3 + 45p}$$

разложением на простейшие дроби и разложением в цепную дробь.

Р е ш е н и е. Заданная функция представляет собой отношение четного полинома к нечетному, поэтому она является реактивной функцией (см. п. 5 основных положений и соотношений).

Решим задачу разложением на простейшие дроби [см. формулу (14.6)]. Для этого найдем корни знаменателя уравнения

$$20p^3 + 45p = 5p(4p^2 + 9) = 0,$$

отсюда

$$p_1 = 0, \quad p_{2,3} = \pm j\,\frac{3}{2}.$$

Так как высшая степень полинома числителя больше высшей степени полинома знаменателя, то делением числителя на знаменатель, начиная с высших степеней p, выделим слагаемое $k_\infty p$:

$$\begin{array}{r|l} 8p^4 + 40p^2 + 32 & 20p^3 + 45p \\ \hline 8p^4 + 18p^2 & \dfrac{2}{5}\,p \\ \hline 22p^2 + 32 & \end{array}$$

Таким образом:

$$Z(\overline{p}) = \frac{8p^4 + 40p^2 + 32}{20p^3 + 45p} = \frac{2}{5}\,p + \frac{22p^2 + 32}{20p^3 + 45}. \qquad (1)$$

В полученном выражении второе слагаемое, обозначаемое $Z_1(\overline{p})$, разложим на простые дроби:

$$Z_1(\overline{p}) = \frac{22p^2 + 32}{20p^3 + 45p} = \frac{k_0}{p} + \frac{2k_1 p}{p^2 + \omega_1^2} = \frac{k_0}{p} + \frac{2k_1 p}{p^2 + \dfrac{45}{20}}, \qquad (2)$$

где $\omega_1^2 = 45/20 = 9/4$.

Определим k_0 — вычет функции $Z_1(\overline{p})$ в точке $p_1 = 0$ (см. замечание к п. 3 основных положений и соотношений):

$$k_0 = [\operatorname{Res} Z_1(\overline{p})]_{p=0} = \left[\frac{22p^2 + 32}{60p^2 + 45}\right]_{p=0} = \frac{32}{45}.$$

Вычислим k_1 (вычет $Z_1(\overline{p})$ в полюсе при $p = p_2 = j\frac{3}{2}$):

$$k_1 = [\operatorname{Res} Z_1(\overline{p})]_{p=j\frac{3}{2}} = \left[\frac{22p^2 + 32}{60p^2 + 45}\right]_{p=j\frac{3}{2}} = \frac{22\left(j\frac{3}{2}\right)^2 + 32}{60\left(j\frac{3}{2}\right)^2 + 45} = \frac{7}{36}.$$

Той же величине 7/36 равен вычет $Z(\overline{p})$ при сопряженном значении корня $p = p_3 = -j\frac{3}{2}$.

Учитывая найденные значения k_0 и k_1, из формул (1) и (2) получим разложение выражения заданного сопротивления в виде суммы простых дробей:

$$Z(\overline{p}) = \frac{2}{5}p + \frac{\frac{32}{45}}{p} + \frac{2 \cdot \frac{7}{36}\, p}{p^2 + \frac{9}{4}} = \frac{2}{5}p + \frac{1}{\frac{45}{32}\, p} + \frac{\frac{7}{18}\, p}{p^2 + \frac{9}{4}}. \qquad (3)$$

Первое слагаемое представляет собой индуктивное сопротивление, индуктивность которого равна 2/5, второе — емкостное сопротивление, емкость которого равна 45/32, а третье — параллельное соединение индуктивности 14/81 и емкости 18/7, вычисляемые по формулам (14.7а):

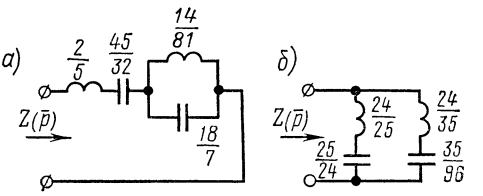


Рис. 14.5

$$L = \frac{2k_1}{\omega_1^2} = \frac{2 \cdot \frac{7}{36}}{\frac{9}{4}} = \frac{14}{81}; \quad C = \frac{1}{2k_1} = \frac{1}{2 \cdot \frac{7}{36}} = \frac{18}{7}.$$

На рис. 14.5, *а* приведена схема, составленная на основе формулы (3), т. е. первой формы Фостера. Все величины L и C даны в генри и фарадах (в ряде случаев расчеты ведутся в нормализованных величинах, тогда L и C — величины безразмерные).

Разложим на простейшие дроби функцию проводимости

$$Y(\overline{p}) = \frac{1}{Z(\overline{p})} = \frac{20p^3 + 45p}{8p^4 + 40p^2 + 32}.$$

Найдем корни уравнения знаменателя этого выражения:

$$8p^4 + 40p^2 + 32 = 8(p^2 + 1)(p^2 + 4) = 0,$$

отсюда

$$p_{1,2} = \pm j1, \quad p_{3,4} = \pm j2.$$

Так как наибольшая степень показателя числителя при p в выражении $Y(\overline{p})$ меньше наибольшей степени показателя p в знаменателе, то при разложении по формуле (14.8) нет слагаемых $k'_\infty p$ и k'_0/p, так как знаменатель $Y(\overline{p})$ не содержит множителя p; в разложении будут только слагаемые вида $2k'_i p/(p^2 + \omega'^2_i)$.
Итак,

$$Y(\overline{p}) = \frac{20p^3 + 45p}{8p^4 + 40p^2 + 32} = \frac{2k'_1 p}{p^2 + 1} + \frac{2k'_2 p}{p^2 + 4}. \qquad (4)$$

Найдем k'_1 — вычет $Y(\overline{p})$ при $p = p_1 = j1$ (он такой же и при $p_2 = -j1$):

$$k'_1 = [\operatorname{Res} Y(\overline{p})]_{p=j1} = \left[\frac{20p^3 + 45p}{32p^3 + 80p}\right]_{p=j1} = \frac{20(-j1)^3 + 45j}{32(-j1)^3 + 80j} = \frac{25}{48}.$$

Аналогично вычислим k'_2 — вычет $Y(\overline{p})$ при $p = j2$ (такой же вычет и при $p = -j2$):

$$k'_2 = [\operatorname{Res} Y(\overline{p})]_{p=j2} = \left[\frac{20p^3 + 45p}{32p^3 + 80p}\right]_{p=j2} = \frac{20(-j2)^3 + 45 \cdot j2}{32(-j2)^3 + 80 \cdot j2} = \frac{35}{48}.$$

Подставляя найденные значения k'_1 и k'_2 в формулу (4), получим

$$Y(\overline{p}) = \frac{\frac{25}{24}p}{p^2 + 1} + \frac{\frac{35}{24}p}{p^2 + 4}. \qquad (5)$$

По (14.9а) находим элементы первой параллельной ветви, состоящей из последовательно соединенных

$$L_1 = \frac{1}{2k'_1} = \frac{1}{2 \cdot \frac{25}{48}} = \frac{24}{25} \text{ и } C_1 = \frac{2k'_1}{\omega'^2_1} = \frac{2\frac{25}{48}}{1} = \frac{25}{24},$$

и второй параллельной ветви, состоящей из последовательно соединенных

$$L_2 = \frac{1}{2k'_2} = \frac{1}{2\frac{35}{48}} = \frac{24}{35} \text{ и } C_2 = \frac{2k'_2}{\omega'^2_2} = \frac{2\frac{35}{48}}{4} = \frac{35}{96}.$$

По полученным результатам на рис. 14.5, *б* дана схема, соответствующая уравнению (5), т. е. второй форме Фостера.

Реализуем заданную функцию $Z(\overline{p})$ разложением ее в цепную дробь. Это можно сделать двумя способами:

1. Осуществим деление, начиная с высших степеней p. Для этого делим числитель на знаменатель, получаем первое слагаемое и прекращаем деление. При этом высшая степень p остатка числителя станет на два ниже, чем была, и на единицу меньше, чем высшая степень знаменателя. Далее делим делитель на этот остаток и т. д., пока процесс деления не закончится без остатка:

$$
\begin{array}{r|l}
8p^4+40p^2+32 & 20p^3+45p \\
8p^4+18p^2 & \dfrac{2}{5}p \to Z_1(\overline{p}) \\
\hline
20p^3+45p & 22p^2+32 \\
20p^3+\dfrac{320}{11}p & \dfrac{10}{11}p \to Y_2(\overline{p}) \\
\hline
22p^2+32 & \dfrac{175}{11}p \\
22p^2 & \dfrac{242}{175}p \to Z_3(\overline{p}) \\
\hline
\dfrac{175}{11}p & 32 \\
\dfrac{175}{11}p & \dfrac{175}{352}p \to Y_4(\overline{p}) \\
\hline
0 &
\end{array}
$$

Таким образом, цепная дробь имеет вид

$$
Z(\overline{p}) = \frac{2}{5}p + \cfrac{1}{\dfrac{10}{11}p + \cfrac{1}{\dfrac{242}{175}p + \cfrac{1}{\dfrac{175}{352}p}}}, \tag{6}
$$

где 2/5 и 242/175 — индуктивности; 10/11 и 175/352 — емкости. Это видно из выражения $Z(\overline{p})$.

Формуле (6) соответствует схема рис. 14.6, *а* — первая форма Кауэра. Все величины L и C даны в генри и фарадах.

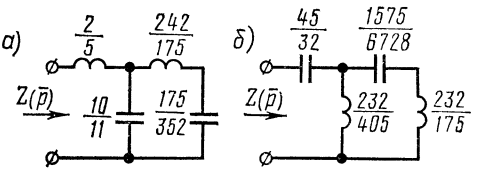


Рис. 14.6

2. Осуществим разложение $Z(\overline{p})$ в цепную дробь, начиная деление с низших степеней p:

$$
\begin{array}{l|l}
32+40p^2+8p^4 & 45p+20p^3 \\
\hline
32+\dfrac{128}{9}\,p^2 & \dfrac{32}{45p}\to Z_1'(p) \\
\hline
45p+20p^3 & \dfrac{232}{9}\,p^2+8p^4 \\
\hline
45p+\dfrac{405}{29}\,p^3 & \dfrac{405}{232p}\to Y_2'(p) \\
\hline
\dfrac{232}{9}\,p^2+8p^4 & \dfrac{175}{29}\,p^3 \\
\hline
\dfrac{232}{9}\,p^2 & \dfrac{6728}{1575}\to Z_3'(p) \\
\hline
\dfrac{175}{29}\,p^3 & 8p^4 \\
\hline
\dfrac{175}{29}\,p^3 & \dfrac{175}{232p}\to Y_4'(p) \\
\hline
0 &
\end{array}
$$

Следовательно, получена следующая цепная дробь:

$$
Z(\overline{p})=\frac{32}{45p}+\cfrac{1}{\dfrac{405}{232p}+\cfrac{1}{\dfrac{6728}{1575p}+\cfrac{1}{\dfrac{175}{232p}}}}, \tag{7}
$$

где 45/32 и 1575/6728 — емкости; 232/405 и 232/175 — индуктивности.

Формуле (7) соответствует схема рис. 14.6, *б*, т. е. вторая форма Кауэра.

14.6. Осуществить реализацию реактивных функций:

а) $Z(\overline{p})\ \dfrac{2p(p^2+4)}{(p^2+1)}$; б) $Z(\overline{p})=\dfrac{p^2+1}{p(p^2+4)}$; в) $Z(\overline{p})=$

$=\dfrac{(p^2+1)(p^2+9)}{p(p^2+4)}$; г) $Y(\overline{p})=\dfrac{(p^2+1)(p^2+9)}{p(p^2+4)}$

разложением на элементарные дроби и в цепные дроби.

В. Синтез двухполюсников, состоящих из *RC*- или *RL*-элементов

14.7. Найти схемы по формам Фостера и Кауэра, реализующие функцию входного сопротивления $Z(\overline{p})=\dfrac{(p+2)(p+4)}{(p+1)(p+3)}$.

Р е ш е н и е. Из выражения данной функции видно, что она определяет цепь, состоящую только из элементов R и C, так как все ее полюсы и нули чередуются и лежат на отрицательной вещественной

полуоси, при этом функция сопротивления первым имеет полюс, а не нуль (см. п. 6 основных положений и соотношений).

Решим задачу методом разложения $Z(\overline{p})$ на элементарные дроби [см. формулу (14.11)]. Вначале из $Z(\overline{p})$ выделим постоянную величину k_∞, не зависящую от p и равную

$$k_\infty = \lim Z\,(\overline{p})_{p\to\infty} = \left(\frac{p^2+6p+8}{p^2+4p+3}\right)_{p\to\infty} = 1.$$

Затем вычтя ее из $Z(\overline{p})$, получим

$$Z_1(\overline{p}) = Z(\overline{p}) - 1 = \frac{p^2+6p+8}{p^2+4p+3} - 1 = \frac{2p+5}{p^2+4p+3}.$$

В рассматриваемой задаче в формуле (14.11) $k_0 = 0$, так как функция $Z(\overline{p})$ не имеет полюса при $p = 0$.

Итак, согласно (14.11)

$$Z(\overline{p}) = k_\infty + \frac{k_1}{p+1} + \frac{k_2}{p+3}. \qquad (1а)$$

Найдем k_1 — вычет функции $Z_1(\overline{p})$ при $p = -1$:

$$k_1 = [\operatorname{Res} Z_1(\overline{p})]_{p=-1} = \left(\frac{2p+5}{p+3}\right)_{p=-1} = \frac{3}{2}.$$

Аналогично вычислим k_2 — вычет функции $Z_1(\overline{p})$ при $p = -3$:

$$k_2 = [\operatorname{Res} Z_1(\overline{p})]_{p=-3} = \left(\frac{2p+5}{p+1}\right)_{p=-3} = \frac{1}{2}.$$

Итак, искомое сопротивление

$$Z(\overline{p}) = 1 + \frac{\frac{3}{2}}{p+1} + \frac{\frac{1}{2}}{p+3}. \qquad (1б)$$

Первое слагаемое — активное сопротивление, равное 1; второе слагаемое представляет собой параллельно соединенные активное сопротивление и емкость, вычисляемые по (14.12а):

$$R_1 = \frac{k_1}{\sigma_1} = \frac{\frac{3}{2}}{1} = \frac{3}{2}; \quad C_1 = \frac{1}{k_1} = \frac{1}{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}.$$

Аналогично определяем элементы третьего слагаемого:

$$R_2 = \frac{k_2}{\sigma_2} = \frac{\frac{1}{2}}{3} = \frac{1}{6}; \quad C_2 = \frac{1}{k_2} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2.$$

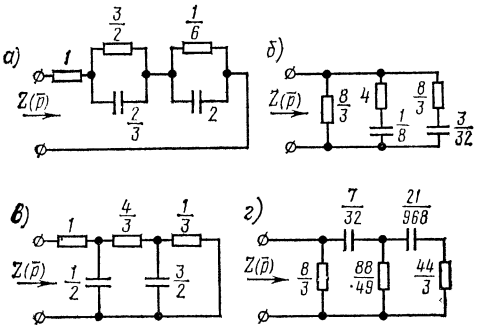


Рис. 14.7

Таким образом, выражение (1б) представляет собой три последовательно соединенные цепи, первая из которых — активное сопротивление, а каждая из двух остальных — параллельное соединение R и C. Схема реализации изображена на рис. 14.7, *а* (первая форма Фостера). Все величины R и C даны в омах и фарадах (если расчеты ведутся в нормализованных величинах, то R и C — безразмерные величины).

Вторую форму Фостера получим разложением на простые дроби выражения проводимости $Y(\overline{p})$, умноженной на $1/p$ [см. формулу (14.13)]:

$$\frac{1}{p}Y(\overline{p}) = \frac{(p+1)(p+3)}{p(p+2)(p+4)} = \frac{p^2+4p+3}{p^3+6p^2+8p};$$

$$\frac{1}{p}Y(\overline{p}) = \frac{k_0'}{p} + \frac{k_1'}{p+2} + \frac{k_2'}{p+4}. \qquad (2а)$$

Выражение (2а) в соответствии с (14.13) не содержит слагаемого k_∞', так как $Y(\overline{p})$ не имеет полюса при $p = \infty$.

Вычислим коэффициенты k_0', k_1' и k_2':

$$k_0' = \left[\operatorname{Res}\frac{1}{p}Y(\overline{p})\right]_{p=0} = \left(\frac{p^2+4p+3}{3p^2+12p+8}\right)_{p=0} = \frac{3}{8};$$

$$k_1' = \left[\operatorname{Res}\frac{1}{p}Y(\overline{p})\right]_{p=-2} = \left(\frac{p^2+4p+3}{3p^2+12p+8}\right)_{p=-2} = \frac{1}{4};$$

$$k_2' = \left[\operatorname{Res}\frac{1}{p}Y(\overline{p})\right]_{p=-4} = \left(\frac{p^2+4p+3}{3p^2+12p+8}\right)_{p=-4} = \frac{3}{8}.$$

Подставляя найденные значения k_0', k_1', и k_2' в формулу (2а) и умножая обе части равенства на p, получим выражение проводимости $Y(\overline{p})$ в виде суммы простых дробей:

$$Y(\overline{p}) = \frac{3}{8} + \frac{\frac{1}{4}p}{p+2} + \frac{\frac{7}{8}p}{p+4}. \qquad (2б)$$

Первое слагаемое представляет собой активное сопротивление, равное 8/3; второе и третье слагаемые — последовательно соединенные цепи, составленные из R и C. Их элементы рассчитываем по (14.14а):

$$R_1 = \frac{1}{k_1'} = \frac{1}{\frac{1}{4}} = 4; \quad C_1 = \frac{k_1'}{\sigma_1'} = \frac{\frac{1}{4}}{2} = \frac{1}{8};$$

$$R_2 = \frac{1}{k_2'} = \frac{1}{\frac{3}{8}} = \frac{8}{3}; \quad C_2 = \frac{k_2'}{\sigma_2'} = \frac{\frac{3}{8}}{4} = \frac{3}{32}.$$

Таким образом, схема реализации по формуле (2б) имеет вид рис. 14.7, *б* (см. также рис. 14.2, *б*).

Осуществим реализацию разложением $Z(\overline{p})$ в цепную дробь. Начнем деление с высших степеней p, поступая аналогично тому, как это было сделано при решении задачи 14.5:

$$\begin{array}{r|l}
p^2+6p+8 & p^2+4p+3 \\
\hline
p^2+4p+3 & 1 \to Z_1(\overline{p}) \\
\hline
p^2+4p+3 & 2p+5 \\
\hline
p^2+\frac{5}{2}p & \frac{1}{2}p \to Y_2(\overline{p}) \\
\hline
2p+5 & \frac{3}{2}p+3 \\
\hline
2p+4 & \frac{4}{3} \to Z_3(\overline{p}) \\
\hline
\frac{3}{2}p+3 & 1 \\
\hline
\frac{3}{2}p & \frac{3}{2}p \to Y_4(\overline{p}) \\
\hline
3 & 3 \\
\hline
3 & \frac{1}{3} \to Z_5(\overline{p}) \\
\hline
0 &
\end{array}$$

Итак, получена следующая цепная дробь:

$$Z(\overline{p}) = 1 + \cfrac{1}{\frac{1}{2}p + \cfrac{1}{\frac{4}{3} + \cfrac{1}{\frac{3}{2}p + \cfrac{1}{\frac{1}{3}}}}}, \qquad (3)$$

где 1, 4/3 и 1/3 — активные сопротивления; 1/2 и 3/2 — емкости.

Схема реализации по формуле (3) представлена на рис. 14.7, *в* (см. также рис. 14.2 *в*), т. е. первая форма Кауэра.

Осуществим разложение в цепную дробь, начиная деление с низших степеней p, предварительно инвертируя дробь, переписав ее в следующем виде:

$$Z(\overline{p}) = \frac{1}{\dfrac{3+4p+p^2}{8+6p+p^2}}.$$

Заметим, что непосредственное до инвертирования деление числителя на знаменатель, начиная с низших степеней p, привело бы к отрицательному остатку, что не имело бы смысла, так как он не может быть реализован положительными элементами R и C:

$$\begin{array}{l|l}
3+4p+p^2 & 8+6p+p^2 \\
3+\frac{9}{4}p+\frac{3}{8}p^2 & \hline \frac{3}{8} \to Y_2(\overline{p}) \\
\hline
8+6p+p^2 & \frac{7}{4}p+\frac{5}{8}p^2 \\
8+\frac{20}{7}p & \hline \frac{32}{7p} \to Z_3(\overline{p}) \\
\hline
\frac{7}{4}p+\frac{5}{8}p^2 & \frac{22}{7}p+p^2 \\
\frac{7}{4}p+\frac{49}{88}p^2 & \hline \frac{49}{88} \to Y_4(\overline{p}) \\
\hline
\frac{22}{7}p+p^2 & \frac{3}{44}p^2 \\
\frac{22}{7}p & \hline \frac{968}{21p} \to Z_5(\overline{p}) \\
\hline
\frac{3}{44}p^2 & p^2 \\
\frac{3}{44}p^2 & \hline \frac{3}{44} \to Y_6(\overline{p}) \\
\hline
0 &
\end{array}$$

Таким образом, получена следующая цепная дробь:

$$Z(\overline{p}) = \cfrac{1}{\frac{3}{8}+\cfrac{1}{\frac{32}{7p}+\cfrac{1}{\frac{49}{88}+\cfrac{1}{\frac{968}{21p}+\cfrac{1}{\frac{3}{44}}}}}}, \qquad (4)$$

где 3/8 — активная проводимость, соответствующая активному со-

противлению 8/3; $32/7p$ — емкостное сопротивление, соответствующее емкости 7/32, и т. д.

Схема реализации по формуле (4) приведена на рис. 14.7, *г* (см. также рис. 14.2, *г*) — вторая форма Кауэра.

14.8. Требуется построить канонические схемы двухполюсников, состоящих из R- и C-элементов по заданным входным функциям путем разложения на простейшие дроби и в цепные дроби:

$$\text{а)}\quad Z(\overline{p}) = \frac{(p+1)(p+3)}{p(p+2)}; \quad \text{б)}\quad Y(\overline{p}) = \frac{(p+1)(p+4)}{p+2}.$$

14.9. По функции входного сопротивления $Z(\overline{p}) = \frac{5p+2}{4p+3}$ осуществить реализацию двухполюсника.

Указание. Найдя полюсы и нули функции, можно убедиться в том, что они лежат на отрицательной действительной полуоси и ближайшим к началу координат является нуль. Поэтому заданная функция может быть реализована в виде двухполюсника, состоящего только из R- и L-элементов (см. п. 7 основных положений и соотношений).

14.10. Найти канонические схемы двухполюсников, состоящих из R- и L-элементов, по заданным входным функциям:

$$\text{а)}\quad Z(\overline{p}) = \frac{2p(p+2)}{(p+1)(p+3)}; \quad \text{б)}\quad Y(\overline{p}) = \frac{(p+2)(p+4)}{(p+1)(p+3)}$$

путем разложения на простейшие дроби и в цепные дроби.

Г. Синтез двухполюсников общего вида. Полином Гурвица

14.11. Найти схему и элементы двухполюсника, входное сопротивление которого

$$Z(\overline{p}) = \frac{p(4p^3+10p^2+44p+10)}{(p^2+3)(2p^2+8p+1)}.$$

Р е ш е н и е. Схему реализации будем искать методом постепенного выделения мнимых полюсов и нулей функции сопротивления (см. п. 8 основных положений и соотношений).

Из выражения $Z(\overline{p})$ видно, что имеется пара мнимых полюсов при $p = \pm j\sqrt{3}$. Выделим их. Это рассчитывается так же, как и при синтезе чисто реактивных двухполюсников (см. п. 5 основных положений и соотношений). Для этого находим вычет k_1 от $Z(\overline{p})$ при $p = +j\sqrt{3}$ [см. формулу (14.2)]:

$$k_1 = [\operatorname{Res} Z(\overline{p})]_{p=j\sqrt{3}} = \left[\frac{4p^4+10p^3+44p^2+10p}{8p^3+24p^2+14p+24}\right]_{p=j\sqrt{3}} = 2.$$

То же значение имеет вычет и при $p = -j\sqrt{3}$.

Таким образом из $Z(\overline{p})$ можно выделить функцию

$\frac{2k_1 p}{p^2+3} = \frac{4p}{p^2+3}$, представляющую собой параллельный контур [см. формулу (14.4 б)], элементы которого определяют по (14.4а):

$$L_1 = \frac{2k_1}{\omega_1^2} = \frac{2 \cdot 2}{3} = \frac{4}{3}, \quad C_1 = \frac{1}{2k_1} = \frac{1}{2 \cdot 2} = \frac{1}{4}.$$

Поэтому $Z(\overline{p}) = \frac{4p}{p^2+3} + Z_1(\overline{p})$ можно представить схемой рис. 14.8, *а*, тогда

$$Z_1(\overline{p}) = Z(\overline{p}) - \frac{4p}{p^2+3} = \frac{4p^4+10p^3+44p^2+10p}{(p^2+3)(2p^2+8p+1)} - \frac{4p}{p^2+3} = \frac{2p(p+1)}{2p^2+8p+1}.$$

Функция сопротивления $Z_1(\overline{p})$ имеет нуль при $p = 0$ или функция проводимости

$$Y_1(\overline{p}) = \frac{1}{Z_1(\overline{p})} = \frac{2p^2+8p+1}{2p(2p+1)}$$

имеет полюс при $p = 0$. Аналогично предыдущему выделим его:

$$[\operatorname{Res} Y_1(\overline{p})]_{p=0} = \left[\frac{2p^2+8p+1}{8p+2}\right]_{p=0} = \frac{1}{2}.$$

Следовательно, проводимость $Y_1(\overline{p})$ имеет индуктивность, равную 2, проводимость которой $\frac{1}{pL} = \frac{1}{2p}$, т. е.

$$Y_1(\overline{p}) = \frac{1}{2p} + Y_2(\overline{p}),$$

отсюда

$$Y_2(\overline{p}) = Y_1(\overline{p}) - \frac{1}{2p} = \frac{2p^2+8p+1}{2p(2p+1)} - \frac{1}{2p} = \frac{p+3}{2p+1}.$$

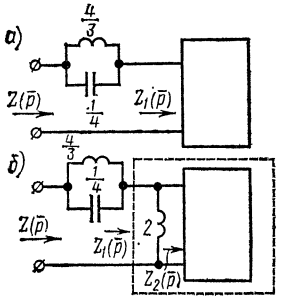


Рис. 14.8

Инвертируя эту проводимость, получим сопротивление

$$Z_2(\overline{p}) = \frac{2p+1}{p+3}.$$

Поэтому рис. 14.8, *а* можно представить в виде рис. 14.8, *б*.

Функция $Z_2(\overline{p})$ — функция минимального реактивного сопротивления, состоит только из R- и L-элементов, так как она содержит нуль в точке $p = -1/2$, лежащий ближе к началу координат, чем полюс в точке $p =$

$= -3$ (см. п. 7 основных положений и соотношений). Функцию $Z_2(\overline{p})$ можно разложить на простые дроби (см. п. 7 основных положений и соотношений и указание к решению задачи 14.9):

$$Z_2(\overline{p}) = \frac{1}{3} + \frac{\frac{5}{3}p}{p+3}$$

и

$$Y_2(\overline{p}) = \frac{1}{2} + \frac{\frac{5}{4}}{p+\frac{2}{5}},$$

которым соответствуют две схемы рис. 14.9, *а* и *б*. Если представить в виде цепных дробей

$$Z_2(\overline{p}) = \cfrac{1}{\frac{1}{2} + \cfrac{1}{\frac{4}{5}p + \cfrac{1}{\frac{5}{2}}}}, \quad Z_2(\overline{p}) = \frac{1}{3} + \cfrac{1}{\frac{9}{5p} + \cfrac{1}{\frac{5}{3}}},$$

то будут получены те же схемы.

Окончательно для $Z(\overline{p})$ получим схемы в виде рис. 14.10, *а* или *б*.

14.12. Используя выделение мнимых полюсов и нулей, найти схемы двухполюсников по их входным сопротивлениям. Даны:

а) $Z(\overline{p}) = \dfrac{8p^3+4p^2+6p+2}{p(2p^3+p^2+3p+1)}$; б) $Z(\overline{p}) = \dfrac{35p^4+14p^3+66p^2+24p+8}{p(p^2+4)(5p^2+2p+1)}$.

14.13. Дана функция входного сопротивления двухполюсника

$$Z(\overline{p}) = \frac{24p^4+58p^3+120p^2+115p+20}{12p^3+26p^2+54p+45}.$$

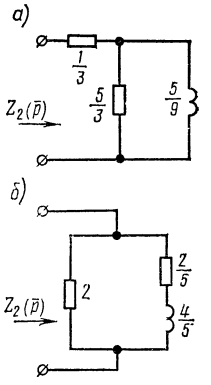


Рис. 14.9

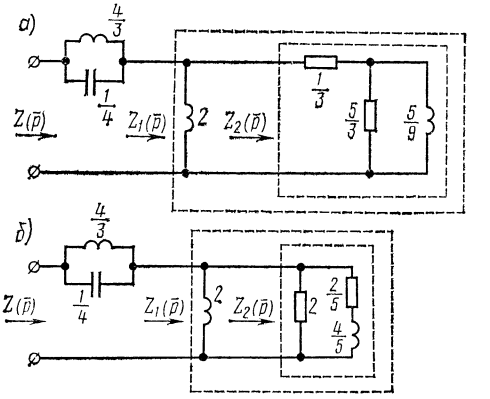


Рис. 14.10

Реализовать ее, используя метод разложения, в цепную дробь.

Р е ш е н и е. Осуществим разложение в цепную дробь, начиная деление с высших степеней p полиномов:

1) $\begin{array}{l|l} 24p^4+58p^3+120p^2+115p+20 & 12p^3+26p^2+54p+45 \\ \underline{24p^4+52p^3+108p^2+90p} & \hline 2p \to Z_1(\bar{p}) \\ 6p^3+12p^2+25p+20 & \end{array}$;

2) $\begin{array}{l|l} 12p^3+26p^2+54p+45 & 6p^3+12p^2+25p+20 \\ \underline{12p^3+24p^2+50p+40} & \hline 2 \to Y_2(\bar{p}) \\ 2p^2+4p+5 & \end{array}$;

3) $\begin{array}{l|l} 6p^3+12p^2+25p+20 & 2p^2+4p+5 \\ \underline{6p^3+12p^2+15p} & \hline 3p \to Z_3(\bar{p}) \\ 10p+20 & \end{array}$;

4) $\begin{array}{l|l} 2p^2+4p+5 & 10p+20 \\ \underline{2p^2+4p} & \hline \frac{1}{5}p \to Y_4(\bar{p}) \\ 5 & \end{array}$;

5) $\begin{array}{l|l} 10p+20 & 5 \\ \underline{10p+20} & \hline 2p+4 \to Z_5(\bar{p}) \\ 0 \quad 0 & \end{array}$.

Таким образом получена следующая цепная дробь:

$$Z(\bar{p}) = 2p + \cfrac{1}{2p + \cfrac{1}{3p + \cfrac{1}{\frac{1}{5}p + \cfrac{1}{2p+4}}}}.$$

Схему рекомендуется начертить самостоятельно.

14.14. Дана функция входного сопротивления двухполюсника

$$Z(\bar{p}) = \frac{2p^2+9p+2}{8p^2+4p+2}.$$

Реализовать ее в виде электрической цепи, используя метод разложения, в цепную дробь.

14.15. Требуется реализовать следующие функции входных сопротивлений:

а) $Z(\bar{p}) = \dfrac{16p^3+16p^2+8p+3}{8p^2+5p+3}$; б) $Z(\bar{p}) = \dfrac{6p^3+7p^2+20p+10}{p(2p^2+7p+5)}$.

14.16. Проверить положительность следующих функций:

а) $F_1(\bar{p}) = 6p^5+17p^4+27p^3+37p^2+17p+16$;

б) $F_2(\overline{p}) = 2p^5 + 2p^4 + 6p^3 + 2p^2 + 4p$;

в) $F_3(\overline{p}) = p^4 + 3p^3 + 7p^2 + 5p + 8$;

г) $F_4(\overline{p}) = 2p^4 + p^3 + 9p^2 + 4p + 4$.

Р е ш е н и е. а. В соответствии с п. 4 основных положений и соотношений составим отношение четной части полинома $F_1(\overline{p})$ к его нечетной части:

$$\frac{17p^4 + 37p^2 + 16}{6p^5 + 27p^3 + 17p} = \frac{17p^4 + 37p^2 + 16}{6p\,(p^4 + 4{,}5p^2 + 2{,}83)}. \qquad (1a)$$

Вычислим нули знаменателя:

$$p^2_{1,2} = -2{,}25 \pm \sqrt{2{,}25^2 - 2{,}83} = -2{,}25 \pm 1{,}493;$$

$$p_1^2 = -0{,}757; \quad p_2^2 = -3{,}743.$$

Таким образом,

$$p^4 + 4{,}5p^2 + 2{,}83 = (p^2 - p_1^2)(p^2 - p_2^2) = (p^2 + 0{,}757)(p^2 + 3{,}743).$$

Выражение (1а) разложим на простые дроби [см. формулу (14.6)]:

$$\frac{17p^4 + 37p^2 + 16}{6p\,(p^4 + 4{,}5p^2 + 2{,}83)} = \frac{17p^4 + 37p^2 + 16}{6p\,(p^2 + 0{,}757)(p^2 + 3{,}743)} =$$

$$= k_\infty p + \frac{k_0}{p} + \frac{2k_1 p}{p^2 + 0{,}757} + \frac{2k_2 p}{p^2 + 3{,}743}. \qquad (2a)$$

Коэффициент $k_\infty = 0$, так как выражение (1а) не имеет полюса в бесконечности (степень числителя ниже степени знаменателя).

Определим коэффициент k_0. Он равен вычету выражения (1а) в полюсе $p = 0$:

$$k_0 = \operatorname{Res}\left[\frac{17p^4 + 37p^2 + 16}{30p^4 + 81p^2 + 17}\right]_{p=0} = \frac{16}{17} = 0{,}941.$$

Коэффициент $2k_1$ найдем как вычет выражения (2а) в полюсе $p_1^2 = -0{,}757$:

$$2k_1 = \operatorname{Res}\left[\frac{17p^4 + 37p^2 + 16}{6p\,(p^2 + 0{,}757)(p^2 + 3{,}743)} \cdot \frac{p^2 + 0{,}757}{p}\right]_{p^2 = -0{,}757} =$$

$$= \frac{17(-0{,}757)^2 + 37(-0{,}757) + 16}{6(-0{,}757)(-0{,}757 + 3{,}743)} = \frac{-2{,}268}{-13{,}562} = 0{,}167.$$

Аналогично найдем $2k_2$ как вычет выражения (2а) в полюсе $p^2 = -3{,}743$:

$$2k_2 = \operatorname{Res}\left[\frac{17p^4 + 37p^2 + 16}{6p\,(p^2 + 0{,}757)(p^2 + 3{,}743)} \cdot \frac{p^2 + 3{,}743}{p}\right]_{p^2 = -3{,}743} =$$

$$= 1{,}725.$$

Таким образом, с учетом найденных значений коэффициентов k_∞, k_0, $2k_1$ и $2k_2$ выражение (1а) примет вид

$$\frac{17p^4+37p^2+16}{6p\,(p^4+4{,}5p^2+2{,}83)}=\frac{0{,}941}{p}+\frac{0{,}167}{p^2+0{,}757}+\frac{1{,}725}{p^2+3{,}743}.$$

Итак, выражение (1а) — реактивная функция и, следовательно согласно п.4 основных положений и соотношений $F_1(\overline{p})$ — полином Гурвица, т. е. положительная функция.

б. Составим отношение четной к нечетной части полинома:

$$\frac{2p^4+2p^2}{2p^5+6p^3+4p}=\frac{p^2+p}{p^4+3p^2+2}. \qquad (1б)$$

Найдем нули знаменателя:

$$p^4+3p^2+2=0;\quad p_1^2=-1,\quad p_2^2=-2.$$

Выражение (1б) примет вид

$$\frac{p\,(p^2+1)}{(p^2+1)\,(p^2+2)}=\frac{p}{p^2+2}. \qquad (2б)$$

Следовательно, выражение (1б) является реактивной функцией, т. е. $F_2(\overline{p})$ — полином Гурвица (положительная функция).

Наличие в числителе и знаменателе общего множителя (p^2+1) указывает на то, что он является множителем заданной функции $F_2(\overline{p})$. Действительно, поделив $F_2(\overline{p})$ на p^2+1, получим

$$\begin{array}{l|l}
2p^5+2p^4+6p^3+2p^2+4p & p^2+1 \\
\underline{2p^5\qquad+2p^3} & \overline{2p^3+2p^2+4p} \\
2p^4+4p^3+2p^2+4p & \\
\underline{2p^4\qquad+2p^2} & \\
4p^3+4p & \\
\underline{4p^3+4p} & \\
0\qquad 0 &
\end{array}$$

Таким образом, $F_2(\overline{p})$ может быть представлено в виде

$$F_2(\overline{p})=2p^5+2p^4+6p^3+2p^2+4p=(p^2+1)\,(2p^3+2p^2+4p).$$

в. Запишем отношение четной части полинома к его нечетной части, вычислим нули знаменателя этого отношения и разложим его на простые дроби:

$$\frac{p^4+7p^2+8}{3p^2+5p}=k_\infty p+\frac{k_0}{p}+\frac{2k_1p}{p^2+\frac{5}{3}}. \qquad (1в)$$

Вычисляем вычеты последней функции в точках $p=\infty$, $p=0$ и $p^2=-\frac{5}{3}$:

$$k_\infty = \frac{1}{3}; \quad k_0 = \operatorname{Res}\left[p\,\frac{p^4+7p^2+8}{3p^3+5p}\right]_{p=0} = \frac{8}{5};$$

$$2k_1 = \left[\frac{\left(p^2+\frac{5}{3}\right)(p^4+7p^2+8)}{p\,(3p^2+5p)}\right]_{p^2=-\frac{5}{3}} = \frac{8}{45}.$$

Итак,

$$\frac{p^4+7p^2+8}{3p^3+5p} = \frac{1}{3}p + \frac{8}{5p} + \frac{8p}{45\left(p^2+\frac{5}{3}\right)},$$

т. е. выражение (1в) — реактивная функция, а $F_3(p)$ — положительная функция.

г. Функцию $F_4(\overline{p})$ рассмотрим аналогично:

$$\frac{2p^4+9p^2+4}{p^3+4p} = k_\infty p + \frac{k_0}{p} + \frac{2k_1 p}{p^2+4}.$$

Находим

$$k_\infty = 2; \quad k_0 = 1.$$

Найдем вычет функции при $p^2 = -4$:

$$2k_1 = \operatorname{Res}\left[\frac{p^2+4}{p}\cdot\frac{2p^4+9p^2+4}{p^3+4p}\right]_{p^2=-4} =$$

$$= \left[\frac{2p^4+9p^2+4}{p^2}\right]_{p^2=-4} = \frac{2(-4)^2+9(-4)+4}{-4} = \frac{0}{-4} = 0.$$

Равенство нулю вычета при $p^2 = -4$ означает, что рассматриваемая функция $F_4(\overline{p})$ имеет множитель p^2+4. Для этого достаточно убедиться в том, что $F_4(\overline{p})$ делится без остатка на p^2+4. Действительно,

$$\begin{array}{l|l}
2p^4+p^3+9p^2+4p+4 & p^2+4 \\ \cline{2-2}
2p^4 \qquad\quad +8p^2 & 2p^2+p+1 \\ \cline{1-1}
\qquad p^3+p^2+4p+4 & \\
\qquad p^2+\qquad\quad 4p & \\ \cline{1-1}
\qquad\qquad p^2+4 & \\
\qquad\qquad p^2+4 & \\ \cline{1-1}
\qquad\qquad 0 \quad 0 &
\end{array}$$

Следовательно, функцию $F_4(\overline{p})$ можно представить в виде двух сомножителей:

$$F_4(\overline{p}) = 2p^4+p^3+9p^2+4p+4 = (p^2+4)(2p^2+p+1).$$

14.17. Проверить вещественность функции

$$F(p) = \frac{6p^5+17p^4+27p^3+37p^2+17p+16}{2p^5+2p^4+6p^3+2p^2+4p}.$$

Р е ш е н и е. Для проверки вещественности функции $F(\overline{p})$ надо убедиться в том, что ее вещественная часть во всех точках мнимой оси не имеет отрицательных значений, т. е. выполняется неравенство (14.5), в котором четные и нечетные части числителя и знаменателя соответственно равны:

$$m_1(\overline{p}) = 17p^4 + 37p^2 + 16; \quad n_1(\overline{p}) = 6p^5 + 27p^3 + 17p;$$

$$m_2(\overline{p}) = 2p^4 + 2p^2; \quad n_2(\overline{p}) = 2p^5 + 6p^3 + 4p;$$

$$N(\overline{p}) = m_1(\overline{p})\, m_2(\overline{p}) - n_1(\overline{p})\, n_2(\overline{p}) =$$

$$= (17p^4 + 37p^2 + 16)(2p^4 + 2p^2) -$$

$$- (6p^5 + 27p^3 + 17p)(2p^5 + 6p^3 + 4p) =$$

$$= -12p^{10} - 56p^8 - 112p^6 - 104p^4 - 36p^2.$$

Полагая в этом выражении $p = j\omega$, а следовательно, $p^2 = -\omega^2$; $p^4 = \omega^4$, $p^6 = -\omega^6$, $p^8 = \omega^8$, $p^{10} = -\omega^{10}$, получим $N(\omega^2) = 12\omega^{10} - 56\omega^8 + 112\omega^6 - 104\omega^4 + 36\omega^2$.

Обозначим ω^2 через x, последнее выражение примет вид

$$N(x) = 4(3x^5 - 14x^4 + 28x^3 - 26x^2 + 9x).$$

Здесь x может принимать только положительные значения, а пределы его изменения от 0 до ∞, так как ω может изменяться в тех же пределах.

Последнее выражение, стоящее в круглых скобках, обозначим через $N_0(x) = 3x^5 - 14x^4 + 28x^3 - 26x^2 + 9x$.

Исследование проведем по методу Штурма (см. п. 4 основных положений и соотношений). $N_0(x)$ начальная функция Штурма. Первая функция Штурма — это производная от начальной функции Штурма

$$N_1(x) = N_0'(x) = 15x^4 - 56x^3 + 84x^2 - 52x + 9.$$

Определим вторую функцию Штурма $N_2(x)$. Для этого разделим $N_0(x)$ на $N_1(x)$, прекратив деление, когда показатель высшей степени x остатка станет на единицу меньше высшей степени делителя.

$$\begin{array}{l|l}
3x^5 - 14x^4 + 28x^3 - 26x^2 + 9x & 15x^4 - 56x^3 + 84x^2 - 52x + 9 \\
\underline{3x^5 - 11{,}2x^4 + 16{,}8x^3 + 10{,}4x^2 + 1{,}8x} & \underline{\quad 0{,}2x - 0{,}1867} \\
-2{,}8x^4 + 11{,}2x^3 - 15{,}6x^2 + 7{,}2x & \\
\underline{-2{,}8x^4 + 10{,}453x^3 - 15{,}68x^2 + 9{,}707x - 1{,}68} & \\
0{,}747x^3 + 0{,}08x^2 - 2{,}507x + 1{,}68 &
\end{array}$$

Итак,

$$N_2(x) = -0{,}747x^3 - 0{,}08x^2 + 2{,}507x - 1{,}68.$$

Определим третью функцию Штурма $N_3(x)$ как остаток с обратным знаком от деления $N_1(x)$ на $N_2(x)$:

$$
\begin{array}{l|l}
15x^4 - 56x^3 + 84x^2 - 52x + 9 & -0{,}747x^3 - 0{,}08x^2 + 2{,}507x - 1{,}68 \\
\underline{15x^4 + 1{,}60x^3 - 50{,}36x^2 + 33{,}75x} & \underline{\quad -20{,}893x + 77{,}0} \\
-57{,}6x^3 + 134{,}36x^2 - 85{,}75x + 9 & \\
\underline{-57{,}6x^3 - 6{,}16x^2 + 193{,}05x - 129{,}36} & \\
140{,}52x^2 - 278{,}8x + 138{,}36 &
\end{array}
$$

Итак,

$$N_3(x) = -140{,}52x^2 + 278{,}8x - 138{,}36.$$

Аналогично находим четвертую функцию Штурма $N_4(x)$ как остаток с обратным знаком от деления $N_2(x)$ на $N_3(x)$:

$$\frac{N_2(x)}{N_3(x)} = 0{,}00533x + 0{,}0112 + \frac{0{,}12x - 0{,}13}{-140{,}52x^2 + 278{,}8x - 138{,}36}$$

$$N_4(x) = -0{,}12x + 0{,}13.$$

И наконец, находим пятую функцию Штурма $N_5(x)$:

$$\frac{N_3(x)}{N_4(x)} = 1171x - 1063{,}3 - \frac{0{,}13}{-0{,}12x + 0{,}13}; \quad N_5(x) = 0{,}13.$$

Так как нас интересует положительность функции $N(x)$ во всем диапазоне частот, т. е. от $\omega = 0$ до $\omega = \infty$, которым соответствуют $x = 0$ и $x = \infty$, то определим знаки функций Штурма при указанных значениях и занесем их в табл. 14.2.

Таблица 14.2

$N(x)$ / x	$N_0(x)$	$N_1(x)$	$N_2(x)$	$N_3(x)$	$N_4(x)$	$N_5(x)$	W
$x_1 = 0$	0	+	−	−	+	+	2
$x_2 = \infty$	+	+	−	−	−	+	2

Отсюда видно, что число вариаций знака для крайних значений корней $W(x_1) = W(0) = 2$ и $W(x_2) = W(\infty) = 2$, т. е. одинаково, а их разность равна $W(x_1) - W(x_2) = 0$. Поэтому функция $N(x)$ не меняет своего знака на всей оси $j\omega$. Она всюду положительна, так как при $x = 0$ она положительна. Таким образом, установлено, что вещественная часть $F(\overline{p})$ при $p = j\omega$ больше нуля для всх значений ω. Следовательно, заданная функция $F(\overline{p})$ вещественна.

14.18. Проверить положительность и вещественность следующих функций:

а) $F_1(\overline{p}) = \dfrac{2p^3 + 6p^2 + 3p + 1}{p^2 + p + 1}$; б) $F_2(\overline{p}) = \dfrac{p^4 + 3p^3 + 7p^2 + 5p + 8}{2p^4 + p^3 + 9p^2 + 4p + 4}$.

ГЛАВА ПЯТНАДЦАТАЯ

ОСНОВЫ СИНТЕЗА ЧЕТЫРЕХПОЛЮСНИКОВ *

ОСНОВНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ И СООТНОШЕНИЯ

Приводимый далее материал относится к вопросам синтеза четырехполюсников по их передаточным функциям при нагрузке четырехполюсника на частотно-независимое сопротивление.

1. Свойства передаточных функций четырехполюсника.

а. Знаменатель и числитель любой передаточной функции $T(\overline{p}) = Q(\overline{p})/V(\overline{p})$ представляют собой полиномы с вещественными коэффициентами.

б. Знаменатель $V(\overline{p})$ у всех передаточных функций $T(\overline{p})$ является строгим полиномом Гурвица.

в. Высшая степень полинома числителя $Q(\overline{p})$ передаточной функции $T(\overline{p})$ ниже или равна высшей степени знаменателя.

Полином числителя передаточной функции может оказаться и не полиномом Гурвица.

Перечисленные условия являются необходимыми и достаточными для физической реализации четырехполюсника.

Реализация передаточной функции $T(\overline{p})$ в виде пассивного четырехполюсника, нагруженного на согласованное сопротивление, возможна только тогда, когда коэффициент усиления четырехполюсника, т. е. модуль $|T(j\omega)| < 1$. Если $|T(j\omega)| > 1$, то можно найти такое положительное число n, чтобы $n > |T(j\omega)|$, и тогда модуль передаточной функции $|T_1(j\omega)| = \frac{1}{n}|T(j\omega)| < 1$ и четырехполюсник может быть синтезирован, так как он отличается от $|T(j\omega)|$ лишь постоянным множителем n. Для того чтобы на выходе четырехполюсника получить требуемое выходное напряжение U_2, надо на выходе четырехполюсника поставить либо идеальный трансформатор с коэффициентом трансформации, равным n, либо усилитель.

Любую передаточную функцию $T(\overline{p})$, удовлетворяющую условиям реализации, можно синтезировать в виде симметричного мостового четырехполюсника, нагруженного на согласованное сопротивление R_0. Сопротивления ветвей этого четырехполюсника определяются по формулам

$$Z_a(\overline{p}) = R_0 \frac{1 - T(\overline{p})}{1 + T(\overline{p})}; \qquad (15.1а)$$

* До изучения материала этой главы рекомендуется повторить основные положения из глав 11 и 14.

$$Z_b(\overline{p}) = R_0 \frac{1 + T(\overline{p})}{1 - T(\overline{p})}. \qquad (15.1б)$$

Отсюда видно, что сопротивления $Z_a(\overline{p})$ и $Z_b(\overline{p})$ взаимно-обратны, т. е. $Z_a(\overline{p}) \cdot Z_b(\overline{p}) = R_0^2$.

В тех случаях, когда это возможно, для упрощения схемы целесообразно перейти к эквивалентной T- или $П$-схеме, используя для этого условия эквивалентности (см. п. 7 основных положений гл. 11). Пример дан в задаче 15.1.

2. Фазовые контуры. Передаточная функция фазового контура при нагрузке на согласованное сопротивление в общем случае имеет вид

$$T(\overline{p}) = \frac{V(-\overline{p})}{V(\overline{p})}, \qquad (15.2)$$

где $V(\overline{p})$ и $V(-\overline{p})$ соответственно строгий полином Гурвица и сопряженный полином Гурвица.

Передаточная функция фазового контура на мнимой оси определяется выражением

$$T(j\omega) = \frac{|V(-j\omega)|}{|V(j\omega)|} = e^{-j2\varphi_г}, \qquad (15.3)$$

из которого видно, что ее модуль равен единице и не зависит от частоты, а аргумент равен удвоенному аргументу полинома Гурвица, взятому с обратным знаком.

Передаточные функции фазовых контуров первого и второго порядка имеют вид

$$T(\overline{p}) = \frac{a - p}{a + p}; \quad (15.4а); \quad T(\overline{p}) = \frac{p^2 - ap + b}{p^2 + ap + b}. \qquad (15.4б)$$

Фазовый контур можно реализовать с помощью реактивного мостового четырехполюсника, сопротивления плеч которого определяются через передаточную функцию по формулам (15.1а) и (15.1б).

В тех случаях когда это возможно, целесообразно перейти к более простой эквивалентной схеме, используя для этого схемы рис. 13.7, *а—е*, обратив при этом внимание на условие их применимости в зависимости от соотношения между α и β (см. п. 2 основных положений главы 13).

Пример дан в задаче 15.3.

3. Четырехполюсники постоянного активного сопротивления. Эти четырехполюсники могут быть реализованы с помощью мостового четырехполюсника, сопротивления плеч которого вычисляются по формулам (15.1а и б).

Пример дан в задаче 15.5.

4. Синтез цепи по заданной амплитудно-частотной характеристике передаточной функции*. Свойства АЧХ передаточной функции

* Под амплитудно-частотной характеристикой передаточной функции понимается зависимость квадрата модуля передаточной функцией от частоты при $p = j\omega$.

$F(\omega^2)$: она представляет собой отношение двух четных полиномов $A(\omega^2)/B(\omega^2)$. Для возможности реализации по $F(\omega^2)$ четырехполюсника эта функция должна удовлетворять следующим требованиям: а) быть функцией ω^2 с вещественными коэффициентами; б) положительной при любых значениях ω; в) ограниченной при изменении ω от 0 до ∞.

Этапы синтеза. В $F(\omega^2)$ заменяем ω^2 на $-p^2$ и находим

$$F(-p^2) = A(p^2)/B(p^2).$$

Приравниваем $A(\overline{p})$ и $B(\overline{p})$ нулю, находим корни этих уравнений и каждое разложим на сопряженные полиномы:

$$A(p^2) = Q(\overline{p})\,Q(-\overline{p}), \quad B(p^2) = V(\overline{p})\,V(-\overline{p}),$$

где $Q(\overline{p})$ и $V(\overline{p})$ имеют корни только в левой полуплоскости, а $Q(-\overline{p})$ и $V(-\overline{p})$ имеют корни, симметричные по отношению к $Q(\overline{p})$ и $V(\overline{p})$, лежащие в правой полуплоскости. Затем находим передаточную функцию $T(\overline{p}) = Q(\overline{p})/V(\overline{p})$, которая является единственной минимально-фазовой функцией, имеющей заданную амплитудно-частотную характеристику. Синтез четырехполюсника по найденной $T(\overline{p})$ осуществляется по формулам (15.1а,б.)

Пример приведен в задаче 15.7.

УПРАЖНЕНИЯ И ЗАДАЧИ

15.1. Требуется реализовать четырехполюсник с передаточной функцией $T(\overline{p}) = \dfrac{2p}{8p^2+6p+1}$ в форме мостового четырехполюсника, нагруженного на частотно-независимое согласованное сопротивление $R_0 = 1$.

Р е ш е н и е. По (15.1а) определим сопротивление ветви a мостовой схемы:

$$Z_a(\overline{p}) = R_0\,\frac{1-T(\overline{p})}{1+T(\overline{p})} = \frac{1-\dfrac{2p}{8p^2+6p+1}}{1+\dfrac{2p}{8p^2+6p+1}} = \frac{8p^2+4p+1}{8p^2+8p+1}.$$

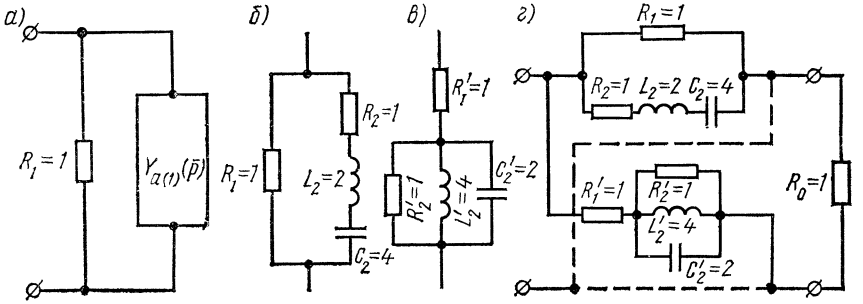


Рис. 15.1

Реализуем его. Непосредственное деление числителя на знаменатель приводит к отрицательному слагаемому, которое не может быть реализовано. Поэтому находим $Y_a(\overline{p}) = 1/Z_a(\overline{p})$:

$$Y_a(\overline{p}) = \frac{8p^2+8p+1}{8p^2+4p+1} = 1 + \frac{4p}{8p^2+4p+1} = 1 + Y_{a1}(\overline{p}).$$

Здесь $G_1 = 1$, а $R_1 = 1/G_1 = 1$.

Схема частичной реализации приведена на рис. 15.1, *а*.

Остаточная функция $Y_{a1}(\overline{p})$ легко реализуется, если ее инвертировать:

$$Z_{a1}(\overline{p}) = \frac{1}{Y_{a1}(\overline{p})} = \frac{8p^2+4p+1}{4p} = 2p + 1 + \frac{1}{4p}.$$

Это представляет собой последовательное соединение индуктивности $L_2 = 2$, активного сопротивления $R_2 = 1$ и емкости $C_2 = 4$.

Схема полной реализации ветви *а* дана на рис. 15.1, *б*. Сопротивление ветви *b* обратно сопротивлению ветви *а*. Ее элементы вычисляются по формуле (10.4) (см. пример 10.7):

$$R_1' = \frac{R_0^2}{R_1} = \frac{1^2}{1} = 1, \quad R_2' = \frac{R_0^2}{R_2} = \frac{1^2}{1} = 1,$$

$$C_2' = \frac{L_2}{R_0^2} = \frac{2}{1^2} = 2, \quad L_2' = C_2 R_0^2 = 4 \cdot 1^2 = 4.$$

Схема реализации ветви *b* приведена на рис. 15.1, *в*. Полная схема реализации четырехполюсника приведена на рис. 15.1, *г*.

15.2. Требуется реализовать в форме мостовых четырехполюсников, нагруженных на постоянное согласованное сопротивление $R_0 = 1$, передаточные функции которых равны:

1) $T(\overline{p}) = \frac{-p+1}{9p+5}$; 2) $T(\overline{p}) = \frac{p^3-p^2+4p-1}{p^3+p^2+4p+1}$.

15.3. Реализовать в виде мостового четырехполюсника фазовый контур второго порядка, нагруженный на входе и выходе цепи на согласованное сопротивление $R_0 = 1$. Рабочая передаточная функция контура имеет вид

$$T_p(\overline{p}) = \frac{10p^2-2p+1}{10p^2+2p+1}.$$

Р е ш е н и е. Поскольку контур нагружен на согласованные сопротивления, его передаточная функция $T(\overline{p})$ совпадает с заданной $T_p(\overline{p})$. Расчет сопротивления продольного плеча проводим по формуле (15.1а):

$$Z_a(\overline{p}) = \frac{1-T(\overline{p})}{1+T(\overline{p})} = \frac{1-\frac{10p^2-2p+1}{10p^2+2p+1}}{1+\frac{10p^2-2p+1}{10p^2+2p+1}} = \frac{2p}{10p^2+1}.$$

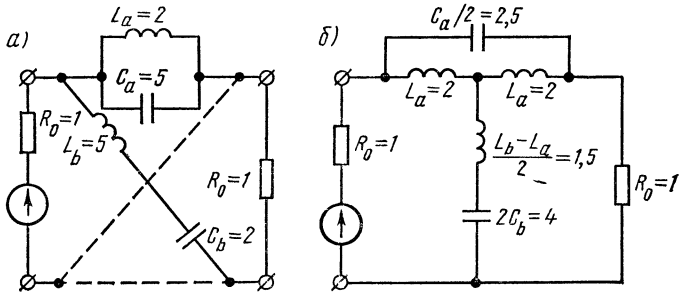


Рис. 15.2

Полученное выражение реализуется параллельным LC-контуром, параметры которого находим по (14.7а). Для этого представим сопротивление плеча a в виде [см. формулу (14.6)]

$$Z_a(\overline{p})=\frac{2p}{10p^2+1}=\frac{1}{10}\cdot\frac{2p}{p^2+0,1}=\frac{2\cdot 0,1p}{p^2+0,1},$$

$$L_a=\frac{2\cdot 0,1}{0,1}=2;\quad C_a=\frac{1}{2\cdot 0,1}=5.$$

Параметры плеча b обратны плечу a (соединены они последовательно) и равны

$$C_b=\frac{L_a}{R_0^2}=\frac{2}{1^2}=2;\quad L_b=C_aR_0^2=5\cdot 1^2=5.$$

Схема реализации четырехполюсника показана на рис. 15.2, *а*. Эта схема может быть заменена эквивалентной более простой (см. рис. 13.7 и формулы для α и β):

$$\alpha=\frac{1}{C_a}\sqrt{\frac{C_b}{L_a}}=\frac{1}{5}\sqrt{\frac{2}{2}}=0,2;\quad \beta=\frac{1}{L_aC_a}=\frac{1}{2\cdot 5}=0,1.$$

Здесь $\beta=0,1>\alpha^2=0,04$. Поэтому 8-элементную схему мостового четырехполюсника можно заменить согласно рис. 13.7, *г* 5-элементной (рис. 15.2, *б*).

15.4. Требуется синтезировать фазовые контуры первого и второго порядков нагруженных на согласованное сопротивление, передаточные функции которых имеют следующие значения:

а) $T(\overline{p})=\frac{4-p}{4+p}$; б) $T(\overline{p})=\frac{p^2-2p+5}{p^2+2p+5}$.

15.5. Требуется синтезировать четырехполюсник постоянного сопротивления $R_0=1$, коэффициент передачи которого имеет вид

$$T(\overline{p})=\frac{2-2p}{3+2p}.$$

Указание. См. п. 3 основных положений и соотношений.

15.6. Реализовать T-схемой четырехполюсник постоянного ослабления, нагрузка которого $R_н = 600$ Ом, а коэффициент передачи $T(\overline{p}) = 0{,}2$.

Указание. Наиболее просто решить задачу, если вначале найти параметры мостовой схемы $\underline{Z_a}$ и $\underline{Z_b}$, используя соотношения

$$\underline{Z_a} = R_н \frac{1 - T_U}{1 + T_U}, \quad \underline{Z_a}\underline{Z_b} = R_н^2,$$

а затем с помощью условий эквивалентности преобразовать ее в T-схему.

15.7. Требуется синтезировать четырехполюсник, амплитудно-частотная характеристика которого при $R_0 = 1$ имеет вид

$$F(\omega^2) = \frac{\omega^4 + 17\omega^2 + 16}{\omega^4 + 29\omega^2 + 100}.$$

Р е ш е н и е. Вначале произведем проверку на возможность физической реализации согласно п. 4 основных положений: а) выполняется — все коэффициенты вещественны; б) также выполняется, так как при любых значениях ω $F(\omega^2)$ — положительна; выполняется и п. в), так как при $\omega = 0$ $F(\omega^2) = 0{,}16$, а при $\omega = \infty$ $F(\omega^2) = 1$, т. е. функция ограничена. АЧХ представляет собой отношение двух полиномов, являющихся функциями ω^2.

Для синтеза цепи вначале найдем $F(-p^2)$, для этого заменим ω^2 на $(-p^2)$, тогда получим

$$F(-p^2) = \frac{p^4 - 17p^2 + 16}{p^4 - 29p^2 + 100}.$$

Найдем нули полинома числителя: $p^4 - 17p^2 + 16 = 0$, отсюда $p_{10,20} = 16$ и $p_{30,40} = 1$, а следовательно, $p_{10} = 4$, $p_{20} = -4$, $p_{30} = 1$, $p_{40} = -1$.

Аналогично находим нули знаменателя: $p^4 - 29p^2 + 100 = 0$, отсюда $p^2_{1,2} = 25$, $p^2_{3,4} = 4$; $p_1 = 5$, $p_2 = -5$, $p_3 = 2$, $p_4 = -2$. Итак,

$$F(-p^2) = \frac{(4 + p)(1 + p)}{(5 + p)(2 + p)} \cdot \frac{(4 - p)(1 - p)}{(5 - p)(2 - p)}.$$

Отбрасывая множители, имеющие нули и полюсы в правой полуплоскости, получим

$$T(\overline{p}) = \frac{(4 + p)(1 + p)}{(5 + p)(2 + p)} = \frac{p^2 + 5p + 4}{p^2 + 7p + 10}.$$

Эту передаточную функцию реализуем в виде мостового четырехполюсника. По формуле (15.1а) найдем выражение продольного сопротивления

$$Z_a(\overline{p}) = \frac{1 - T(\overline{p})}{1 + T(\overline{p})} = \frac{1 - \dfrac{p^2 + 5p + 4}{p^2 + 7p + 10}}{1 + \dfrac{p^2 + 5p + 4}{p^2 + 7p + 10}} = \frac{p + 3}{p^2 + 6p + 7}.$$

Так как $Z_a(\overline{p})$ имеет нуль в точке $p = \infty$, то для реализации определим

$$Y_a(\overline{p}) = 1/Z_a(\overline{p}).$$

Последнее выражение раскладываем в цепную дробь:

$$Y_a(\overline{p}) = \frac{p^2 + 6p + 7}{p + 3} = p + \frac{3p + 7}{p + 3} = p + \frac{1}{\dfrac{p + 3}{3p + 7}} =$$

$$= p + \cfrac{1}{\dfrac{1}{3} + \cfrac{1}{\dfrac{9}{2}p + \dfrac{21}{2}}}.$$

Последнему выражению соответствует схема, изображенная на рис. 15.3, *а*. Ветвь *b* обратна ветви *а*. Ее схема и значения величины элементов даны на рис. 15.3, *б*.

Полная схема реализации четырехполюсника дана на рис. 15.3, *в*.

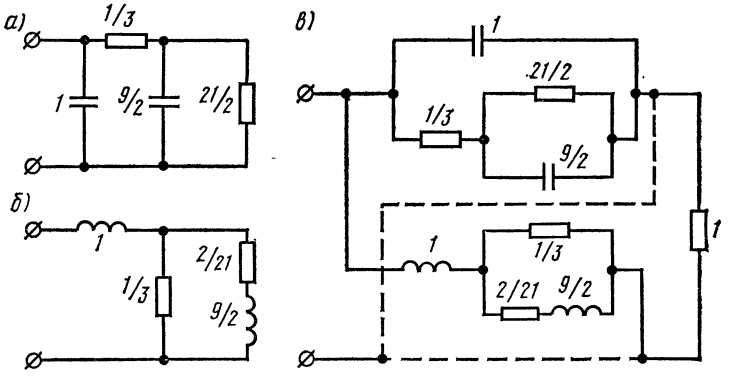


Рис. 15.3

15.8. Реализовать в виде симметричных мостовых схем четырехполюсники, амплитудно-частотные характеристики которых заданы:

а) $F(\omega^2) = \dfrac{2\omega^2 + 2}{4\omega^2 + 9}$; б) $F(\omega) = \dfrac{\omega^4 + 10\omega^2 + 9}{\omega^4 + 20\omega^2 + 64}$.

ГЛАВА ШЕСТНАДЦАТАЯ

СИНТЕЗ ФИЛЬТРОВ И ЛИНИЙ ЗАДЕРЖКИ С ПОМОЩЬЮ ТАБЛИЦ *

ОСНОВНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ И СООТНОШЕНИЯ

В настоящее время расчет фильтров часто проводится на основе таблиц, составленных для нормированных элементов схем, с последующим переходом к истинным значениям элементов фильтров. Обычно таблицы составлены для фильтров нижних частот (ФНЧ), называемых НЧ-п р о т о т и п а м и. Переход от ФНЧ-прототипа к другим типам фильтров (ФВЧ, ППФ, ПЗФ) производится на основе формул частотного преобразования.

1. Нормализация параметров цепи к единичным значениям сопротивления нормализации R_n и частоты нормализации ω_n. Безразмерные сопротивления α_R, индуктивности α_L и емкости α_C получают по соответствующим истинным значениям сопротивлений R, индуктивностей L и емкостей C с помощью следующих формул нормализации:

$$\alpha_R = R/R_n, \quad \alpha_L = \omega_n L/R_n, \quad \alpha_C = \omega_n R_n C. \tag{16.1}$$

Переход к истинным параметрам цепи осуществляется по формулам денормализации:

$$R = \alpha_R R_n, \quad L = \alpha_L R_n/\omega_n, \quad C = \alpha_C/(\omega_n R_n). \tag{16.2}$$

Примеры даны в задачах 16.1 и 16.2.

2. Таблицы фильтров. Важные для практики схемы рассчитывают часто заранее, а их параметры табулируют в нормализованном виде. При составлении таблиц типовых фильтров чаще всего нормализуют к единице величины нагрузочных сопротивлений $R_n = R$ и граничной частоты полосы эффективного пропускания $\omega_n = \omega_p = 2\pi f_г$. Извлечения из соответствующих таблиц фильтров приведены далее (табл. 16.1—16.3). Фильтры Баттерворта или Чебышева нижних и верхних частот (ФНЧ и ФВЧ) могут быть соответственно реализованы в виде лестничных четырехполюсников (рис. 16.1 и 16.2). Требования к рабочей характеристике ослабления ФНЧ представлены на рис. 16.3, где $\Delta A_р$ — максимально допустимая величина рабочего ослабления в полосе пропускания, A_0 — минимально допустимая величина гарантированного ослабления в полосе задерживания, Ω_s — нормированная величина границы полосы задерживания. Характеристики рабочего ослабления фильтров нижних частот Баттерворта и Чебышева для двух значений n (n называется порядком фильтра) показаны на рис. 16.4, *а* и *б*.

---

* Глава написана совместно с доц. М. Г. Витковым.

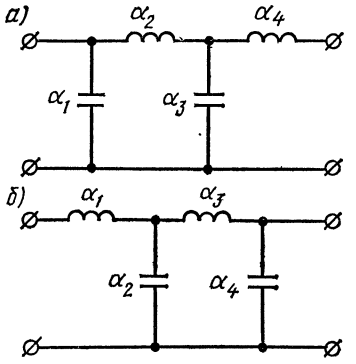


Рис. 16.1

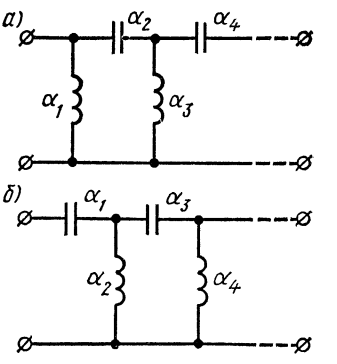


Рис. 16.2

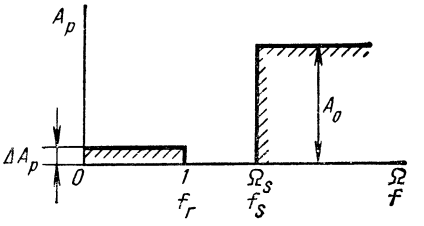


Рис. 16.3

В табл. 16.1 приведены параметры нормализованных элементов фильтров Баттерворта и Чебышева НЧ и ВЧ, обеспечивающих в полосе пропускания неравномерность рабочего ослабления (затухания) $\Delta A_p = 3$ дБ. Эти фильтры рассчитаны для работы между одинаковыми сопротивлениями R источника сигнала и нагрузки.

Таблица 16.1

Схемы ФНЧ (рис. 16.1)	Порядок фильтра n	$\alpha_1 = \alpha_n$	$\alpha_2 = \alpha_{n-1}$	$\alpha_3 = \alpha_{n-2}$	$\alpha_4 = \alpha_{n-3}$	$\alpha_5 = \alpha_{n-4}$
Фильтр Баттерворта	3	1,00	2,00	1,00	—	
	5	0,618	1,62	2,00	1,62	0,618
	7	0,445	1,25	1,80	2,00	1,80
	9	0,347	1,00	1,53	1,88	2,00
Фильтр Чебышева	3	3,35	0,712	3 ,5	—	—
	5	3,48	0,762	4,54	0,762	3,48
	7	3,52	0,772	4,64	0,804	4,64
	9	3,53	0,776	4,67	0,812	4,73
Схемы ФВЧ (рис. 16.2)	n	$1/\alpha_1 = 1/\alpha_n$	$1/\alpha_2 = 1/\alpha_{n-1}$	$1/\alpha_3 = 1/\alpha_{n-2}$	$1/\alpha_4 = 1/\alpha_{n-3}$	$1/\alpha_5 = 1/\alpha_{n-4}$

Фильтры НЧ и ВЧ Баттерворта и Чебышева (табл. 16.2) предназначены для работы с нагрузкой R при подключении к входным зажи-

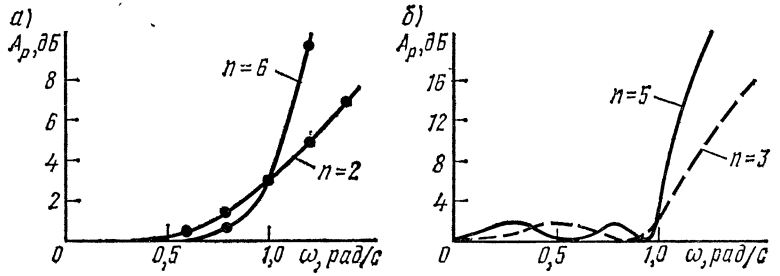


Рис. 16.4

мам идеальных источников тока (схемы рис. 16.1, *а* и 16.2, *а*) или идеальных источников э.д.с. (схемы рис. 16.1, *б* и 16.2, *б*) при $\Delta A_р = 3$ дБ.

Таблица 16.2

Схемы ФНЧ (рис. 16.1)	Порядок фильтра n	α_1	α_2	α_3	α_4	α_5	α_6	α_7	α_8
Фильтр Баттерворта	3	1,50	1,33	0,500	—	—	—	—	—
	4	1,53	1,58	1,08	0,383	—	—	—	—
	5	1,55	1,69	1,38	0,894	0,309	—	—	—
	6	1,55	1,76	1,55	1,20	0,758	0,259	—	—
	7	1,56	1,80	1,66	1,40	1,06	0,656	0,223	—
	8	1,56	1,82	1,73	1,53	1,26	0,937	0,578	0,195
Фильтр Чебышева	3	2,03	1,17	1,67	—	—	—	—	—
	4	1,06	2,53	1,23	1,72	—	—	—	—
	5	2,45	1,30	2,62	1,25	1,74	—	—	—
	6	1,09	2,63	1,35	2,66	1,26	1,75	—	—
	7	2,18	1,33	2,71	1,36	2,68	1,27	1,76	—
	8	1,10	2,66	1,37	2,74	1,37	2,69	1,27	1,76
Схемы ФВЧ (рис. 16.2)	n	$1/\alpha_1$	$1/\alpha_2$	$1/\alpha_3$	$1/\alpha_4$	$1/\alpha_5$	$1/\alpha_6$	$1/\alpha_7$	$1/\alpha_8$

Элементы нормализованных схем ФНЧ и ФВЧ фильтров Золотарева—Кауэра (рис. 16.5 и 16.6) рассчитаны в табл. 16.3 для двух уровней $\Delta A_р = 0{,}044$ дБ и $\Delta A_р = 0{,}011$ дБ неравномерности ослабления при различных значениях параметра расфильтровки Ω_s — граничной частоты полосы эффективного задерживания ($\Omega_s = f_s/f_г$ для ФНЧ и $\Omega_s = f_г/f_s$ для ФВЧ). Они предназначены для работы между одинаковыми сопротивлениями R источника сигнала и нагрузки. В таблицах приведены расчетные значения рабочего ослабления $A_р$, обеспечиваемого в области задерживания последних фильтров: $f \geqslant f_s$ для ФНЧ или $f \leqslant f_s$ для ФВЧ.

Таблица 16.3

ФНЧ (рис. 16.5)		Ω_s	A, дБ	α_1	α_2	β_2	α_3	α_4	β_4	α_5	α_6	β_6	α_7
$n=7$	$\Delta A_p =$ $= 0{,}044$ дБ	1,14	40,1	0,8466	1,205	0,2076	1,243	0,6852	1,112	1,046	0,7267	0,8291	0,4795
		1,18	45,3	0,8728	1,242	0,1725	1,329	0,7938	0,8827	1,146	0,8177	0,6596	0,5556
		1,24	50,6	0,8951	1,273	0,1431	1,409	0,8972	0,7085	1,243	0,9020	0,5293	0,6230
		1,37	60,5	0,9270	1,319	0,1021	1,536	1,064	0,4856	1,402	1,034	0,3614	0,7236
	$\Delta A_p =$ $= 0{,}011$ дБ	1,20	40,5	0,6744	1,202	0,1712	1,197	0,7840	0,8734	1,049	0,7512	0,6973	0,3467
		1,26	45,9	0,6963	1,234	0,1417	1,271	0,8925	0,6935	1,133	0,8396	0,5505	0,4180
		1,31	50,1	0,7107	1,255	0,1226	1,324	0,9699	0,5859	1,195	0,9015	0,4628	0,4657
		1,47	60,6	0,7387	1,296	0,08589	1,435	1,136	0,3945	1,332	1,031	0,3081	0,5612
$n=6$	$\Delta A_p =$ $=0{,}044$ дБ	1,31	40,0	0,6461	1,112	0,2989	1,227	0,9890	0,5656	1,125	0,8981	—	—
		1,41	46,0	0,6957	1,181	0,2323	1,312	1,118	0,4268	1,190	0,8989	—	—
		1,52	51,2	0,7304	1,230	0,1883	1,375	1,213	0,3401	1,237	0,8993	—	—
	$\Delta A_p =$ $=0{,}011$ дБ	1,41	40,0	0,5153	1,067	0,2572	1,210	0,9923	0,4810	1,070	0,7357	—	—
		1,51	45,1	0,5520	1,118	0,2071	1,270	1,089	0,3788	1,121	0,7347	—	—
		1,64	50,6	0,5844	1,165	0,1651	1,326	1,178	0,2969	1,167	0,7337	—	—
$\Delta A_p = 0{,}044$ дБ	$n=5$	1,53	40,7	0,8613	1,216	0,1454	1,498	0,9195	0,4338	0,6533	—	—	—
		1,67	45,6	0,8833	1,247	0,1155	1,552	1,001	0,3337	0,7140	—	—	—
	$n=4$	2,46	40,3	0,6968	1,179	0,1183	1,287	0,8052	—	—	—	—	—
		2,85	45,9	0,7245	1,226	0,08436	1,305	0,8037	—	—	—	—	—
	$n=3$	4,14	40,7	0,8233	1,052	0,04202	0,8233	—	—	—	—	—	—
		5,24	47,0	0,8348	1,0721	0,02559	0,8348	—	—	—	—	—	—
ФВЧ (рис. 16.6)		Ω_s	A, дБ	$1/\alpha_1$	$1/\alpha_2$	$1/\beta_2$	$1/\alpha_3$	$1/\alpha_4$	$1/\beta_4$	$1/\alpha_5$	$1/\alpha_6$	$1/\beta_6$	$1/\alpha_7$

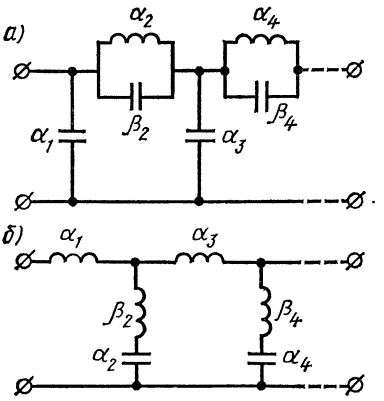


Рис. 16.5

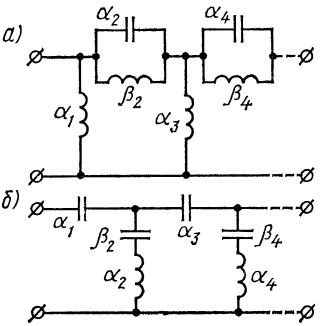


Рис. 16.6

3. Расчет фильтров по таблицам. Приведенные далее формулы содержат параметр n — порядок фильтра (для цепочечных фильтров Баттерворта и Чебышева n равно числу реактивных элементов).

Рабочее ослабление фильтров Баттерворта при нормированной частоте $\Omega(\Omega = f/f_г$ для ФНЧ и $\Omega = f_р/f$ для ФВЧ) может быть рассчитано по формуле

$$A_р = 10 \lg(1 + \Omega^{2n}) \text{ дБ}. \qquad (16.3)$$

Рабочее ослабление в области задерживания фильтров Чебышева (табл. 16.1 и 16.2) может быть рассчитано по формуле

$$A_р = 10 \lg \left\{ 1 + \frac{1}{4} \left[(\Omega + \sqrt{\Omega^2 - 1})^n + \frac{1}{(\Omega + \sqrt{\Omega^2 - 1})^n} \right]^2 \right\} \qquad (16.4)$$

По требуемому на частоте Ω_s рабочему ослаблению могут быть рассчитаны требуемые значения порядка фильтра n соответственно фильтров Баттерворта и Чебышева (табл. 16.1 и 16.2):

$$n \geqslant \frac{\lg \sqrt{10^{0,1A_р} - 1}}{\lg \Omega_s}, \qquad (16.5а);$$

$$n \geqslant \frac{\lg \left[\sqrt{10^{0,1A_р} - 1} + \sqrt{10^{0,1A_р}} \right]}{\lg \left(\Omega_s + \sqrt{\Omega_s^2 - 1} \right)}. \qquad (16.5б)$$

Пример дан в задаче 16.2.

Для фильтров Золотарева—Кауэра выбор порядка n производится по табличным данным $A_р$. Для этих фильтров в табл. 16.3 приведены нормированные элементы для ФНЧ и ФВЧ (рис. 16.6, *а* и *б*) при одинаковых сопротивлениях источника сигнала и нагрузки. Пример дан в задаче 16.4.

Расчет полосно-пропускающих (ППФ) и полосно-заграждающих (ПЗФ) фильтров с симметричными характеристиками. Характеристики называют симметричными, если требуются одинаковые условия по ослаблению на нижних и верхних частотах и равны средние частоты:

$$f_0 = \sqrt{f_{г1} f_{г2}} = \sqrt{f_{s1} f_{s2}} \text{ или } \omega_0 = 2\pi f_0 = \sqrt{\omega_{г1}\omega_{г2}} = \sqrt{\omega_{s1}\omega_{s2}}. \quad (16.16)$$

По требуемым условиям вначале рассчитывают схему НЧ прототипа (при синтезе ППФ) или ВЧ прототипа (при синтезе ПЗФ), соответственно определяя Ω_s по следующим формулам:

$$\Omega_s = \frac{f_{s2} - f_{s1}}{f_{г2} - f_{г1}} \text{ (для ППФ) или } \Omega_s = \frac{f_{г2} - f_{г1}}{f_{s2} - f_{s1}} \text{ (для ПЗФ). } (16.7)$$

После расчета схемы прототипа переходят к составлению схемы расчетного фильтра. Для этого последовательно каждой индуктивности прототипа включают емкость C', а параллельно каждой емкости C прототипа включают индуктивность L', определяемые по следующим формулам:

$$C' = 1/\omega_0^2 L, \quad L' = 1/\omega_0^2 C. \quad (16.8)$$

Примеры даны в задачах 16.5, 16.6 и 16.7.

4. Линии задержки. Параметры цепочечных схем линий задержки с максимально плоскими характеристиками группового времени задерживания (ГВЗ) (рис. 16.1, *а* и *б*) нормированы к единичным сопротивлениям R источника сигнала и нагрузки и к единичному значению граничной частоты $\omega_г$, где неравномерность времени задерживания не превосходит 10% от начального значения (табл. 16.4). Выбор подходящей линии задержки производится по требуемому значению времени задержки сигнала τ (пример приведен в задаче 16.8).

Таблица 16.4

n	$\tau\omega_г$	α_1	α_2	α_3	α_4	α_5	α_6	α_7
1	0,34	0,680	—	—	—	—	—	—
2	1,09	1,72	0,461	—	—	—	—	—
3	1,94	2,43	1,07	0,373	—	—	—	—
4	2,84	3,01	1,45	0,903	0,314	—	—	—
5	3,76	3,50	1,72	1,25	0,786	0,270	—	—
6	4,69	3,93	1,93	1,48	1,11	0,694	0,237	—
7	5,64	4,33	2,11	1,66	1,34	1,00	0,623	0,212

УПРАЖНЕНИЯ И ЗАДАЧИ

16.1. Схема амплитудного корректора (рис. 16.7) нормализована к единичному нагрузочному сопротивлению R и единичной граничной частоте области корректирования $\omega_г$. Безразмерные параметры корректора: $\alpha_1 = 10$, $\alpha_2 = 0{,}1$, $\alpha_3 = 1$, $\alpha_4 = 10$, $\alpha_5 = 10$. Рассчитать

элементы корректора при сопротивлении нагрузки $R = 100$ Ом и граничной частоте области корректирования $\omega_г = 10^5$ с$^{-1}$.

Р е ш е н и е. По условию задачи для нормализации были выбраны значения $R_n = R$, $\omega_n = \omega_г$. Денормализацию проводим по формулам (16.2), где $R_n = R = 100$ Ом, $\omega_n = \omega_г = 10^5$с$^{-1}$:

$$C = \alpha_1/(\omega_n R_n) = 10/(10^5 \cdot 100) = 10^{-6}\ \Phi = 1\ \text{мкФ};$$

$$R_2 = \alpha_2 R_n = 0{,}1 \cdot 100 = 10\ \text{Ом};$$

$$R_3 = \alpha_3 R_n = 1 \cdot 100 = 100\ \text{Ом};$$

$$L = \alpha_5 R_n = 10 \cdot 100/10^5 = 10^{-2}\ \text{Гн} = 10\ \text{мГн};$$

$$R_4 = \alpha_4 R_n = 10 \cdot 100 = 10^3\ \text{Ом} = 1\ \text{кОм}.$$

16.2. Рассчитать чебышевский ФНЧ с неравномерностью ослабления $\Delta A_р = 3$ дБ в области пропускания с граничной частотой $f_г = 2{,}5$ кГц. В области задерживания при $f > f_s = 5$ кГц фильтр должен обеспечивать ослабление не ниже $A_р = 40$ дБ. Фильтр предназначен для работы между равными сопротивлениями источника сигнала и нагрузки $R = 150$ Ом.

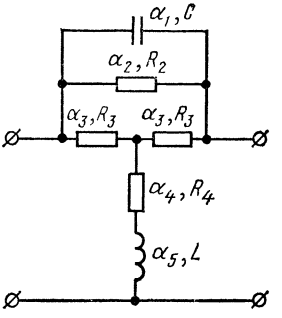


Рис. 16.7

Р е ш е н и е. Для ФНЧ $\Omega_s = f_s/f_г = 5/2{,}5 = 2$. По (16.5б) находим для чебышевского фильтра

$$n \geqslant \frac{\lg\left[\sqrt{10^{0{,}1\cdot 40} - 1} + \sqrt{10^{0{,}1\cdot 40}}\right]}{\lg\left(2 + \sqrt{2^2 - 1}\right)} = \frac{\lg 200}{\lg 3{,}732} = \frac{2{,}30}{0{,}572} = 4{,}02.$$

Так как n должно быть целым числом, то следует взять ближайшее бóльшее число. Поэтому поставленным в задаче условиям удовлетворяет фильтр Чебышева порядка $n = 5$, схема которого согласно рис. 16.1, *а* может быть выбрана в следующем виде (рис. 16.8). Выбор согласно схеме рис. 16.1, *б* нерационален, так как в этом случае в схеме фильтра было бы вместо двух три индуктивности. По табл. 16.1 определяем безразмерные параметры чебышевского фильтра порядка $n = 5$: $\alpha_1 = \alpha_5 = 3{,}48$, $\alpha_2 = \alpha_4 = 0{,}762$, $\alpha_3 = 4{,}54$. Денормализацию проводим по формулам (16.2) при $R_n = R = 150$ Ом и $\omega_n = \omega_г = 2\pi f_г = 6{,}28 \cdot 2{,}5 \cdot 10^3 = 15{,}7 \cdot 10^3$с$^{-1}$:

$$C_1 = C_5 = \frac{\alpha_1}{\omega_n R_n} = \frac{3{,}48}{15{,}7 \cdot 10^3 \cdot 150} = 1{,}48 \cdot 10^{-6}\ \Phi = 1{,}48\ \text{мкФ},$$

$$L_2 = L_4 = \frac{\alpha_4 R_n}{\omega_n} = \frac{0{,}762 \cdot 150}{15{,}7 \cdot 10^3} = 7{,}28\ \text{мГн},$$

$$C_3 = 1{,}93\ \text{мкФ}.$$

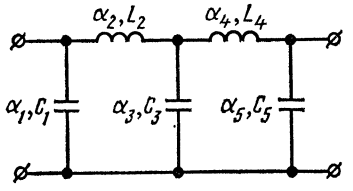


Рис. 16.8

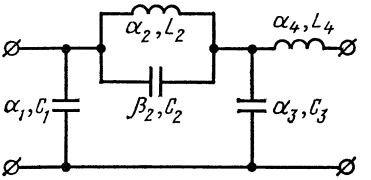


Рис. 16.9

16.3. Определить порядок и начертить схему фильтра Баттерворта, для условий предыдущей задачи.

Указание. Воспользоваться формулой (16.5а) для фильтра Баттерворта.

16.4. Рассчитать ФНЧ с параметрами $R = 75$ Ом, $f_г = 100$ кГц, $f_s = 250$ кГц, $\Delta A_р \leqslant 0{,}05$ дБ, $A_р \geqslant 40$ дБ.

Указание. Поставленным требованиям удовлетворяет фильтр Золотарева—Кауэра порядка $n = 4$ при $\Omega_s = 2{,}46 < \Omega_{s0} = f_s/f_г = 250/100 = 2{,}5$, $A_р = 40{,}3$ дБ, $\Delta A_р = 0{,}044$ дБ (см. табл. 16.3). Таким образом, согласно рис. 16.5, *а* (она имеет меньшее число индуктивностей, чем схема 16.5, *б*) можно выбрать схему синтезированного фильтра (рис. 16.9). Элементы схемы можно рассчитать по формулам (16.2) при $R_n = R = 75$ Ом, $\omega_n = \omega_г = 2\pi f_г = 6{,}28 \cdot 100 \cdot 10^3 = 628 \cdot 10^3 с^{-1}$. Например, $C_1 = \alpha_1/(\omega_n R_n)$, $L_2 = \alpha_2 R_n/\omega_n$, $C_2 = \beta_2/(\omega_n R_n)$ и т. д.

16.5. Рассчитать схему ФВЧ с затуханием не ниже 45 дБ при частотах ниже $f_s = 100$ кГц. В области верхних частот $f > f_г = 550$ кГц рабочее ослабление фильтра должно быть не более 0,044 дБ. Сопротивления источника сигнала и нагрузки фильтра $R = 75$ Ом.

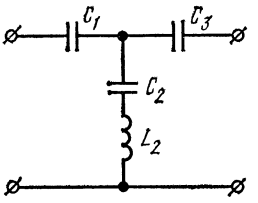


Рис. 16.10

Р е ш е н и е. Рассчитываем параметр расфильтровки ФВЧ:

$$\Omega_s = f_г/f_s = 550/100 = 5{,}5.$$

Поставленным условиям удовлетворяет фильтр Золотарева -Кауэра порядка $n = 3$ (см. табл. 16.3) со следующими параметрами схемы ФВЧ (рис. 16.6, *б* и 16.10): $1/\alpha_1 = 0{,}8348$, $1/\alpha_2 = 1{,}0721$, $1/\beta_2 = 0{,}02559$, $1/\alpha_3 = 0{,}8348$.

Для расчета элементов схемы вычисляем частоту

$$\omega_n = \omega_г = 2\pi f_г = 6{,}28 \cdot 550 \cdot 10^3 = 3{,}46 \cdot 10^6 \text{ рад/с}.$$

Затем расчет ведем согласно формулам (16.2):

$$C_1 = \alpha_1/(\omega_n R_n) = 1 \Big/ \left(\omega_n R_n \frac{1}{\alpha_1}\right) = 1/(3{,}46 \cdot 10^6 \cdot 75 \cdot 0{,}8348) =$$

$$= 0{,}462 \cdot 10^{-6} \text{ Ф} = 0{,}462 \text{ мкФ};$$

$$C_2 = \beta_2/(\omega_n R_n) = 1 \Big/ \left(\omega_n R_n \frac{1}{\beta_2}\right) = 1/(3{,}46 \cdot 10^6 \cdot 75 \cdot 0{,}2559) =$$

$$= 0{,}151 \cdot 10^{-6} \text{ Ф} = 0{,}151 \text{ мкФ};$$

$$L_2 = \alpha_2 R_n/\omega_n = R_n \Big/ \left(\omega_n \frac{1}{\alpha_2}\right) = 75/(3{,}46 \cdot 10^6 \cdot 1{,}0721) =$$

$$= 20{,}2 \cdot 10^{-6}\ \text{Гн} = 20{,}2\ \text{мкГн};$$

$$C_3 = \alpha_3/(\omega_n R_n) = 1 \Big/ \left(\omega_n R_n \frac{1}{\alpha_3}\right) = 1/(3{,}46 \cdot 10^6 \cdot 75 \cdot 0{,}8348) =$$

$$= 0{,}462 \cdot 10^{-6}\ \Phi = 0{,}462\ \text{мкФ}.$$

16.6. Рассчитать ППФ для нагрузок $R = 150$ Ом, обеспечивающий неравномерность передачи не более 0,05 дБ в полосе частот $f_{г2}—f_{г1} = 3$ кГц при гарантированном ослаблении не менее 40 дБ в области задерживания с граничными частотами 26 и 13 кГц.

Указание к решению. Согласно (16.7)

$$\Omega_s = (f_{s2} - f_{s1})/(f_{г2} - f_{г1}) = (26 - 13)/3 = 4{,}33,$$

и поставленным условиям удовлетворяет фильтр Золотарева—Кауэра порядка $n = 3$ при $\Omega_s = 4{,}14$ (см. табл. 16.3) с параметрами: $\alpha_1 = 0{,}8233$, $\alpha_2 = 1{,}052$, $\beta_2 = 0{,}04202$, $\alpha_3 = 0{,}8233$. Схему ФНЧ прототипа можно выбрать согласно рис. 16.5, *б* в следующем виде (рис. 16.11, *а*). При расчете элементов прототипа по формулам (16.2) следует применить условия задания: $R_n = 150$ Ом, $\omega_n = 2\pi \times (f_{г2} - f_{г1}) = 6{,}28 \cdot 3 \cdot 10^3 = 18{,}8 \cdot 10^3\ \text{с}^{-1}$. Например, $L_1 = \alpha_1 R_n/\omega_n = 0{,}8233 \cdot 150/18{,}8 \times 10^3 = 6{,}57 \cdot 10^{-3}$ Гн $= 6{,}57$ мГн и т. д. При переходе к схеме ППФ (рис. 16.11, *б*) ее рассчитываем по формулам (16.8) при $\omega_0 = 2\pi \sqrt{f_{s2} f_{s1}} = 6{,}28 \sqrt{26 \cdot 13} \times$

$\times 10^3 = 116 \cdot 10^3\ \text{с}^{-1}$. Например, $C_1' = 1/\omega_0^2 L_1 = 1/[(116 \cdot 10^3)^2 \cdot 6{,}57 \cdot 10^{-3}] = 11{,}3 \cdot 10^{-9}\ \Phi = 11{,}3$ нФ и т. д.

16.7. Синтезировать заграждающий фильтр для нагрузок 75 Ом, обеспечивающий в области пропускания с граничными частотами

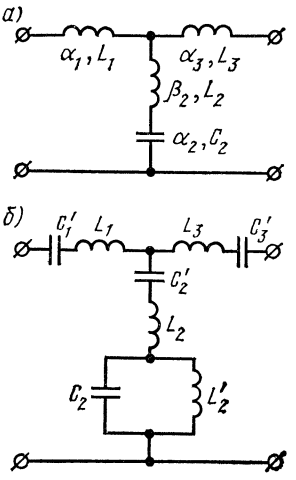


Рис. 16.11

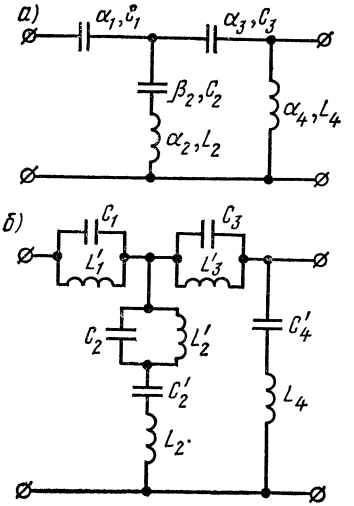


Рис. 16.12

$f_{г1} = 100$ кГц и $f_{г2} = 150$ кГц неравномерность ослабления менее 0,045 дБ. В полосе задерживания с граничными частотами $f_{s1} = 113$ кГц и $f_{s2} = 133$ кГц ослабление должно быть не менее 40 дБ.

Указание. По условиям задачи можно проверить, что им удовлетворяет фильтр Золотарева—Кауэра (табл. 16.3) порядка $n = 4$ при $\Omega_s = 2{,}46$. Схемы ФВЧ прототипа и ПЗФ могут быть выбраны согласно рис. 16.6,*б* соответственно в следующем виде (рис. 16.12, *а* и *б*).

16.8. Синтезировать цепочечную линию задержки для низкочастотного сигнала, спектр которого ограничен частотой $f = 325$ кГц. Время задержки $\tau = 2{,}31$ мкс должно быть выдержано во всей области частот $f < f_г$ с точностью не менее 10%. Сопротивление источника сигнала, подключаемого на входе линии задержки, и сопротивление нагрузки этой линии одинаковы и равны $R = 75$ Ом.

Р е ш е н и е. Вычислим для синтезируемой линии задержки основной параметр

$$\tau\omega_г = \tau 2\pi f_г = 2{,}31 \cdot 10^{-6} \cdot 6{,}28 \cdot 325 \cdot 10^3 = 4{,}72.$$

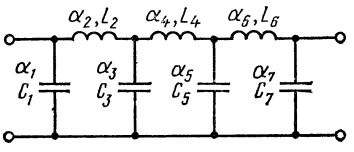


Рис. 16.13

Согласно табл. 16.4 заданным требованиям удовлетворяет линия задержки порядка $n = 7$. В соответствии с рис. 16.1, *а* схема линии может быть представлена рис. 16.13. Ее параметр $\tau\omega_г = 5{,}64 > 4{,}72$. По параметру $\tau\omega_г$ табулированной схемы линии и требуемому времени задержки τ находим значение граничной частоты расчетной линии

$$\omega_г = \frac{\tau\omega_г}{\tau} = \frac{5{,}64}{2{,}31 \cdot 10^{-6}} = 2{,}44 \cdot 10^6 \text{ с}^{-1}.$$

По значениям параметров α_k (см. табл. 16.4) проводим денормализацию по формулам (16.2) при $R_n = R = 75$ Ом и $\omega_n = \omega_г = 2{,}44 \cdot 10^6 \text{с}^{-1}$:

$$C_1 = \alpha_1/(\omega_n R_n) = 4{,}33/(75 \cdot 2{,}44 \cdot 10^6) = 23{,}7 \cdot 10^{-9} \text{ Ф} = 23{,}7 \text{ нФ};$$

$$C_3 = 1{,}66/(75 \cdot 2{,}44 \cdot 10^6) = 9{,}07 \text{ нФ}; \quad C_5 = 5{,}46 \text{ нФ};$$

$$C_7 = 1{,}16 \text{ нФ};$$

$$L_2 = \alpha_2 R_n/\omega_n = 2{,}11 \cdot 75/(2{,}44 \cdot 10^6) = 64{,}9 \cdot 10^{-6} \text{ Гн};$$

$$L_3 = 64{,}9 \text{ мкГн}; \quad L_4 = 1{,}34 \cdot 30{,}8 \cdot 10 = 41{,}2 \text{ мкГн};$$

$$L_6 = 19{,}1 \text{ мкГн}.$$

16.9. Рассчитать цепочечную линию задержки сигнала на 50 мкс, обеспечивающую до частоты $f_г = 3$ кГц неравномерность задержки в пределах 10%. Сопротивление источника сигнала и нагрузки линии задержки равны $R = 100$ Ом.

ОТВЕТЫ

К главе 1

1.2. При разомкнутом контакте 12,1 Ом, при замкнутом — 8,33 Ом. **1.3.** а) $R_{1x} = 120$ Ом, $R_{1к} = 72$ Ом; б) $R_{1x} = 20$ Ом, $R_{1к} = 18$ Ом, в) $R_{1x} = 838$ Ом, $R_{1к} = 200$ Ом. **1.4.** $I = \frac{100}{R+1}$, $U = \frac{100R}{R+1}$, $P_{вш} = \frac{10\,000R}{(R+1)^2}$, $P_{вт} = \frac{10\,000}{(R+1)^2}$, $P = \frac{10\,000}{R+1}$, $\eta = \frac{R}{R+1}$, $P_{вш\ max} = 2500$ Вт.

Уравнения кривых: $U = E - Ir$, $P_{вш} = EI - I^2r$, $P_{вт} = I^2r$, $P = EI$, $\eta = 1 - \frac{Ir}{E}$. **1.6.** 15 В. **1.7.** $V_a = V_m$, где точка m находится на середине сопротивления R_3; при $V_к = 0$ потенциалы всех точек будут положительны. **1.9.** 18 А; $R_ш = 5 \cdot 10^{-4}$ Ом. **1.10.** а) 0,15; б) 0,05. **1.11.** 6 Ом. **1.12.** $R_x = 5$ Ом. **1.13.** 750 Ом. **1.14.** 12 В; 2 кОм. **1.15.** На середине линии. **1.17.** 7,5%. **1.18.** Точное значение 41,8 мм², по ГОСТ надо взять 50 мм². **1.20.** $I_1 = 2{,}5$ А; $I_2 = 1{,}5$ А; $I_3 = 1$ А. **1.21.** $I_1 = 5$ А; $I_2 = 1$ А; $I_3 = 4$ А; $U_{ba} = 30$ В. **1.22.** 20 А; 10 А; 36 В; 36,7 В. **1.23.** $I_1 = 98$ А; $I_2 = 144$ А; $I_0 = 46$ А, $U_1 = 102$ В; $U_2 = 71$ В. **1.24.** $I_1 = 2{,}6$ А; $I_2 = 1{,}2$ А; $I_3 = 0{,}75$ А; $I_4 = 1{,}85$ А; $I_5 = 3{,}8$ А; $I_6 = 1{,}95$ А. **1.25.** $I_1 = 2{,}4$ А; $I_2 = 1{,}6$ А; $I_3 = 0{,}8$ А. **1.26.** 25 В; $P_1 = 9$ Вт; $P_2 = 15{,}6$ Вт. **1.28.** 2 В; $I_2 = 0{,}08$ А. $I_3 = 0{,}02$ А; $I_4 = 0{,}012$ А; $I_5 = 0{,}008$ А. **1.29.** $I_1 = 30$ мА; $I_2 = 100$ мА; $I = 10$ мА. **1.30.** $[R_{(к)}][I_{(к)}] = [E_{(к)}]$, где $[R_{(к)}]$ — квадратная матрица контурных сопротивлений; $[I_{(к)}]$ — матрица столбец контурных токов; $[E_{(к)}]$ — матрица столбец контурных э. д. с; $[R_{(к)}] = \begin{bmatrix} 20 & -10 & 0 \\ -10 & 22 & -7 \\ 0 & -7 & 22 \end{bmatrix}$; $[I_{(к)}] = \begin{bmatrix} I_{11} \\ I_{22} \\ I_{33} \end{bmatrix}$; $[E_{(к)}] = \begin{bmatrix} 60 \\ 24 \\ -16 \end{bmatrix}$. **1.31.** $I_1 = 2$ А; $I_2 = 2{,}7$ А; $I_3 = 0{,}7$ А; $I_4 = 2{,}2$ А, $I_5 = 4{,}7$ А; $I_6 = 2{,}5$ А; $V_a = -22$ В; $V_b = 47$ В; $V_c = -10$ В. **1.33.** $[G][V] = [I_и]$, где $[G]$ — квадратная матрица узловых проводимостей цепи; $[V]$ — матрица-столбец потенциалов узлов; $[I_и]$ — матрица-столбец токов источников. $[G] = \begin{bmatrix} 0{,}25 & -0{,}1 \\ -0{,}1 & 0{,}3 \end{bmatrix}$; $[V] = \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix}$; $[I_и] = \begin{bmatrix} -6 \\ -34 \end{bmatrix}$. **1.35.** $I_1 = 2{,}25$ мА; $I_2 = 1{,}4$ мА; $I_3 = 0{,}85$ мА; $I_4 = 0{,}75$ мА; $I_5 = 0{,}1$ мА; $I_6 = 1{,}5$ мА. **1.37.** $I_1 = 3$ мА; $I_2 = 5$ мА; $I_3 = 3$ мА; $I_4 = 6$ мА; $I_5 = 8$ мА. **1.38.** $I_1 = 1$ А, $I_2 = 3$ А; $I_3 = 2$ А. **1.39.** $I_1 = 0{,}8$ А; $I_2 = 0{,}75$ А; $I_3 = 2$ А; $I_4 = 1{,}55$ А; $I = 2{,}75$ А. **1.40.** $I_1 = 14{,}5$ А; $I_2 = 15{,}2$ А; $I_3 = 18$ А; $I_4 = 2{,}8$ А; $I_5 = 11{,}7$ А; $I_6 = 3{,}5$ А. **1.42.** 0,3 А; 0,2 А; 0,15 А; 0,1 А; 0,15 А; 0,05 А; $R_{ab} = 100$ Ом $P = 9$ Вт. **1.46.** $I_3 = 0{,}56$ А. **1.47.** а) $E_{эк} = kE$, $R_{эк} = R(1-k)$; б) $E_{эк} = kE - E_1$, $R_{эк} = R_1 + k(1-k)R$; в) $E_{эк} = \frac{kER}{R_1 + R}$, $R_{эк} = (1-k)R + \frac{kR_1R}{kR + R_1}$; г) $E_{эк} = \frac{ER_3R_4}{R_1R_2 + R_1R_3 + R_1R_4 + R_2R_3 + R_3R_4}$, $R_{эк} = \frac{R_4(R_1R_2 + R_1R_3 + R_2R_3)}{R_1R_2 + R_1R_3 + R_1R_4 + R_2R_3 + R_3R_4}$; д) $E_{эк} = E + RJ$, $R_{эк} = R + R_1$. **1.48.** 1) $E_{эк} = 0$, $R_{эк} = 10$ Ом; 2) $E_{эк} = 40$ В, $R_{эк} = 5$ Ом; 3) $E_{эк} = 5$ В, $R_{эк} = 5$ Ом. **1.49.** $I_4 = 1{,}76$ мА. **1.51.** $E_{эк} = 46$ В, $R_{эк} = 0{,}4$ Ом; $I_1 = 5$ А; $I_2 = 3$ А; $I_3 = 2$ А; $I = 10$ А. **1.52.** 0,4 А. **1.53.** 1,55 А. **1.54.** $I_4 = 3{,}8$ мА;

$I_5 = 1$ мА. **1.56.** Для схемы рис. 1.10, *а*: 45 Ом; 7,2 Вт; $P_2/P_1 = 12{,}5\%$; $U_2/U_1 = 0{,}25$. Для схемы рис. 1.10, *б*: 20 Ом; 7,2 Вт; $P_2/P_1 = 2{,}63\%$; $U_2/U_1 = 1/6$. **1.57.** $G_{12} = 0{,}02$ См; $G_{22} = 0{,}035$ См; $G_{32} = 0{,}028$ См; $G_{42} = 0{,}007$ См; $G_{52} = 0{,}015$ См; $G_{13} = 0{,}016$ См, $G_{23} = 0{,}028$ См; $G_{33} = 0{,}0424$ См; $G_{43} = 0{,}0144$ См; $G_{53} = 0{,}012$ См; $I_1 = 1{,}4$ А; $I_2 = 1{,}2$ А; $I_3 = 1{,}96$ А; $I_4 = 0{,}76$ А; $I_5 = 0{,}2$ А; $R_{11} = 25$ Ом; $R_{12} = 6$ Ом; $R_{13} = 4$ Ом; $R_{15} = 20$ Ом. **1.58.** $G_{11} = 1/30$ См; $G_{22} = 1/48$ См; $G_{33} = 1/75$ См; $G_{44} = 1/48$ См; $G_{55} = 7/400$ См; $G_{12} = G_{14} = 1/60$ См; $G_{13} = 1/150$ См; $G_{15} = 1/100$ См; $G_{23} = 1/120$ См; $G_{24} = 1/240$ См; $G_{25} = 1/80$ См; $G_{34} = 1/600$ См; $G_{35} = 1/200$ См, $G_{45} = 1/400$ См; $I_1 = 2{,}2$ А; $I_2 = 0{,}25$ А; $I_3 = 0{,}8$ А; $I_4 = 2{,}45$ А; $I_5 = 0{,}55$ А.

К главе 2

2.2. а) $\varphi = \pi/12$; $u_1 = 300 \sin \omega t$ В; $i_1 = 10 \sin(\omega t - \pi/12)$ А; $T = 0{,}02$ с; 50 Гц; б) $2\pi/3$; $i_2 = 5 \sin(\omega t + 2\pi/3)$ мА; $i_3 = 3 \sin \omega t$ мА; $T = 10$ мкс; $f = 10^5$ Гц. **2.3.** 18,6 Ом; 6,45 А; 57°30′; 416 Вт; 653 вар; 773 В · А; $U_R = 64{,}5$ В; $U_L = 103$ В; $E_L = -U_L = -103$ В. **2.4.** 13 Ом; 38,2 мГн. **2.5.** 12 Ом; 0,51 мГн. **2.7.** $R_{эк} = 34{,}6$ Ом; $L_{эк} = 31{,}8$ мГн, $f = 100$ Гц. **2.9.** 110 Вт. **2.11.** $U = 120$ В; $U_к = 38{,}2$ В; $P_к = 60{,}6$ Вт; $U_{конд} = 144$ В; $P_{конд} = 20{,}2$ Вт; $Q_L = 1{,}14$; $Q_C = 17{,}2$. **2.13.** 1) 19,5 Ом (емкостный); 2) 19,5 Ом (индуктивный). **2.15.** $U_1 = 63$ кВ; $U_{пад} = 1{,}27$ кВ; $\Delta U = 1{,}2$ кВ; $\eta = 93\%$. **2.16.** 1) $R_2 = 100$ Ом; $X_2 = 100$ Ом; 2) $R_2 = 100$ Ом; $X_2 = -220$ Ом. **2.17.** $P'_{пр\,max} = 18{,}3$ кВт; $P''_{пр\,max} = 50$ кВт и $P_{пр\,max} = 151$ кВт. **2.18.** 210 Вт. **2.19.** 5 А; 40 Ом; 20 Ом; 60 Ом. **2.21.** $U = 100e^{j15°} = 100 \cos 15° + j100 \sin 15° = 96{,}6 + j25{,}9$; $I = 5e^{-j20°} = 5 \cos 20° - j5 \sin 20° = 4{,}7 - j1{,}71$. **2.22.** 1) $3{,}44e^{\pm j21°20'}$; 2) $3{,}44e^{\pm j68°40'}$; 3) $3{,}44e^{\pm j158°40'}$; 4) $3{,}44e^{\pm j111°20'}$; 5) $12{,}9e^{-j75°40'}$; 6) $3{,}2e^{-j2°14'}$; 7) $3{,}2e^{j87°46'}$; 8) $3{,}2e^{j92°14'}$; 9) $1{,}29e^{-j75°40'}$; 10) $23e^{j0°9'}$; 11) $30{,}2 \pm j10{,}4$; 12) $10{,}4 \pm j30{,}2$; 13) $-30{,}2 \pm j10{,}4$; 14) $-32 \mp j1{,}44$; 15) $1{,}44 \pm j32$; 16) $32 + j0{,}4$; 17) $32 - j0{,}112$; 18) $-1{,}44 \pm j32$; 19) $-32 - j1{,}44$; 20) $0{,}425 - j7{,}3$; 21) $-147 - j28{,}6$; 22) $-3{,}66 - j27{,}8$; 23) $0{,}54 + j0{,}841$; 24) $8{,}78 - j14{,}79$. **2.25.** а) $\underline{Z} = (4 + j12)$ Ом; $\underline{Y} = (0{,}025 - j0{,}075)$ См; $R_{эк} = 4$ Ом, $X_{эк} = 12$ Ом (индуктивный); $\varphi = 71°35'$; $U_a = 17{,}9$ В; $U_p = 53{,}6$ В; $I_a = 1{,}41$ А; $I_p = 4{,}24$ А; $P = 80$ Вт; $Q = 240$ вар; $S = 253$ В·А; б) $\underline{Z} = (0{,}952 + j3{,}888)$ Ом; $\underline{Y} = (0{,}0595 - j0{,}243)$ См; $R_{эк} = 0{,}952$ Ом; $X_{эк} = 3{,}888$ Ом (индуктивный); $\varphi = 76°15'$; $U_a = 23{,}8$ В; $U_p = 97$ В; $I_a = 5{,}95$ А; $I_p = 24{,}25$ А; $P = 595$ Вт; $Q = 2425$ вар; $S = 2500$ В·А. **2.27.** 35 мкГн. **2.28.** 116 В. **2.30.** $\underline{U}_1 = 284e^{j17°30'}$ В; $\underline{U}_2 = 167e^{-j149°15'}$ В; $\widehat{\underline{U}_1, \underline{U}_2} = 166°45'$. **2.32.** $I_1 = 5e^{j53°10'}$ А; $I_2 = 4e^{j73°45'}$ А; $I = 8{,}85e^{j62°20'}$ А; а) 35,2 В; 1,2 А; б) 93,5 В. **2.33.** $\underline{I}_1 = 4$ А; $\underline{I}_2 = 8{,}8e^{-j74°}$ А; $\underline{I}_3 = j5$ А; $I = 7{,}3e^{-j28°}$ А. **2.35.** $\underline{U} = 161e^{j23°}$ В; $\underline{I}_2 = 2{,}06e^{j87°20'}$ А; $\underline{I}_1 = 2{,}94e^{j44°25'}$ А; $\widehat{\underline{U}, \underline{U}_{ab}} = 33°20'$; 440 Вт; 173 вар (емкостный). **2.36.** $i_1 = 2{,}5\sqrt{2} \cos \omega t$ А; $i_2 = 5\sqrt{2} \sin(\omega t + 126°55')$ А; $i = 7{,}2\sqrt{2} \sin(\omega t + 114°45')$ А; $u = 125\sqrt{2} \sin(\omega t + 73°45')$ В. **2.37.** $I_1 = 12$ А; $I_2 = 2{,}68$ А; $I_3 = 14{,}45$ А; $U = 30$ В; $u = 42{,}4 \sin(\omega t - 36°50')$ В; $i_2 = 3{,}8 \sin(\omega t - 153°25')$ А; $i_3 = 20{,}4 \sin(\omega t + 4°45')$ А. **2.39.** $\underline{I}_2 = 2{,}56e^{j38°40'}$ А; $\underline{I}_3 = 4{,}3e^{-j21°50'}$ А; $\underline{U} = 109e^{j35°45'}$ В. **2.40.** 51 Ом. **2.42.** $X_C = 10$ Ом; $\underline{I}_1 = 10$ А; $\underline{I}_2 = (-3 - j1)$ А; $\underline{I}_C = (13 + j1)$ А. **2.43.** 10 Ом. **2.44.** 1,012 мкФ. **2.45.** 53 мкФ. **2.46.** 200 кОм; 0,5 мкФ. **2.48.** $\underline{I}_1 = -j\,0{,}5$ А; $\underline{I}_2 = (0{,}8 - j0{,}2)$ А; $\underline{I}_3 = (-0{,}8 - j0{,}3)$ А; $\underline{I} = (0{,}8 - j0{,}7)$ А. **2.49.** $\underline{T} = 0{,}38e^{-j91°20'}$; а) $0{,}265e^{-j64°10'}$; б) $0{,}38e^{-j86°50'}$. **2.52.** $\underline{I} = 97e^{-j54°}$ А; $\underline{I}_1 = 58{,}2e^{-j54°}$ А;

$\underline{I}_2 = 38{,}8e^{-j54^\circ}$ А. **2.53.** Схема *а*: $\underline{V}_2 = 5{,}17e^{j2°7'}$ В; $\underline{V}_3 = 6{,}15e^{-j5°55'}$ В; $\underline{I}_1 = 0{,}198e^{-j0°33'}$ А; $\underline{I}_2 = 0{,}0694e^{j2°37'}$ А; $\underline{I}_3 = 0{,}206e^{j2°7'}$ А; $\underline{I}_4 = 0{,}0615e^{-j5°55'}$ А; $\underline{I}_C = 0{,}0126e^{j49°5'}$ А; схема *б*: $\underline{V}_2 = 40{,}3e^{-j4°7'}$ В; $\underline{V}_3 = 23{,}6e^{j14°10'}$ В; $\underline{I}_1 = 0{,}632e^{j2°37'}$ А; $\underline{I}_2 = 0{,}183e^{-j39°5'}$ А; $\underline{I}_3 = 0{,}403e^{-j4°7'}$ А; $\underline{I}_4 = 0{,}236e^{j14°10'}$ А; $\underline{I}_5 = 0{,}51e^{j16°28'}$ А; $\underline{I}_C = 0{,}194e^{j63°25'}$ А; схема *в*: $\underline{V}_2 = 17{,}1e^{-j7°7'}$ В; $\underline{I}_1 = 0{,}186e^{j36°15'}$ А; $\underline{I}_2 = 0{,}171e^{-j7°7'}$ А; $\underline{I}_C = 0{,}153e^{j56°20'}$ А; схема *г*: $\underline{V}_2 = \underline{V}_4 = 20$ В; $\underline{V}_3 = 7{,}07e^{-j45°}$ В; $\underline{I} = 0{,}453e^{j6°20'}$ А, $\underline{I}_1 = 0{,}16e^{j18°25'}$ А; $\underline{I}_2 = 0{,}4$ А; $\underline{I}_0 = 0{,}55e^{j5°12'}$ А; $\underline{I}_C = 0{,}0707e^{j45°}$ А. **2.54.** Для схемы рис. 2.42, *б*: $\underline{E}_{эк} = \dfrac{\underline{E}(R_L + j\omega L)}{R + R_L + j\omega L}$; $\underline{Z}_{эк} = \dfrac{R(R_L + j\omega L)}{R + R_L + j\omega L}$; для схемы рис. 2.42, *в*: $\underline{E}_{эк} = \dfrac{ER_1}{R + R_1}$; $\underline{Z}_{эк} = \dfrac{RR_1}{R + R_1} - j\dfrac{1}{\omega C}$. **2.55.** 150 В; 0,6 А. **2.56.** $\underline{I} = (6 - j22)$ А; $\underline{I}_1 = (4 - j6)$ А, $\underline{I}_2 = (12 - j18)$ А; $\underline{I}_3 = (2 - j16)$ А; $\underline{I}_4 = (-6 - j4)$ А; $\underline{I}_5 = (-8 + j12)$ А; 780 Вт. **2.57.** 56 мА. **2.58.** $\underline{I}_1 = 13{,}1e^{j58°10'}$ мА; $\underline{I}_2 = 11{,}5e^{-j74°20'}$ мА; $\underline{I}_3 = 23{,}6\ e^{j70°40'}$ мА; $\underline{I}_4 = 22{,}2e^{-j84°20'}$ мА; $\underline{I}_5 = 11{,}1e^{j85°25'}$ мА; 23,6 Вт. **2.59.** $\underline{I}_1 = 35e^{j2°50'}$ мА; $\underline{I}_2 = 17{,}8e^{-j8°30'}$ мА; $\underline{I}_3 = 17{,}5e^{j2°50'}$ мА; $\underline{I}_C = 3{,}6e^{j47°}$ мА. **2.61.** $\underline{Z}_н = (8 + j4)$ Ом; $P_{н\,max} = 250$ Вт; $P_{н\,max}$; $P_и = 0{,}5$; $T = 0{,}5$. **2.63.** $D_{окт} = -5{,}3$ дБ/окт $= -0{,}61$ Нп/окт; $D_{дек} = -16$ дБ/дек $= -1{,}84$ Нп/дек. **2.65.** Max $|\ T(2\omega)/T(\omega)\ | = 6$ дБ/окт $= 0{,}7$ Нп/окт; Max $|\ T(10\omega)/T(\omega)\ | = 20$ дБ/дек $= 2{,}3$ Нп/дек. **2.67.**

A_1/A_2 в числах	10^{-3}	10^{-2}	10^{-1}	1	10	10^2	10^3	10^4	10^5	10^6
$20\lg(A_1/A_2)$, дБ	−60	−40	−20	0	20	40	60	80	100	120
$\ln(A_1/A_2)$, Нп	−6,9	−4,6	−2,3	0	2,3	4,6	6,9	9,2	11,5	13,8

2.68. −3 дБ; −0,346 Нп. **2.70.** а) $U_1/U_2 = 1{,}122$ (+ 1 дБ); $U_1/U_2 = 0{,}891$ (− 1 дБ); б) $U_1/U_2 = 1{,}105$ (+ 0,1 Нп); $U_1/U_2 = 0{,}905$ (− 0,1 Нп). **2.71.** $f_{гр} = \dfrac{1}{13R_1C}\left(1 + \dfrac{R_1}{R_2}\right)$. **2.72.** $\underline{I}_A = 9{,}5e^{-j36°10'}$ А; $\underline{I}_B = 9{,}5e^{-j156°10'}$ А; $\underline{I}_C = 9{,}5e^{j83°50'}$ А; $\underline{U}_{A0} = 119{,}7e^{-j2°30'}$ В; $\underline{U}_{B0} = 119{,}7e^{-j122°30'}$ В; $\underline{U}_{C0} = 119{,}7e^{j117°30'}$ В; $\underline{U}_{AB} = 208e^{j27°30'}$ В; $\underline{U}_{ab} = 192e^{j24°50'}$ В; $P_и = 2920$ Вт; $P_н = 2710$ Вт. **2.73.** $\underline{E}_Ф = 230$ В. **2.75.** В три раза. **2.76.** $I_л = 6{,}8$ А; $I_Ф = 15{,}5$ А; $U_{Фи} = 165$ В; $\Delta U = 65$ В. **2.77.** а) 127 В; 8,75 А; 25°50'; 3 кВт; б) 220 В; 7,6 А; 30°; 2,5 кВт. **2.78** 3,34 квар. **2.79.** При удельном сопротивлении $\rho = 1{,}75 \cdot 10^{-6}$ Ом·см и удельной массе $d = 8{,}9$ г/см³: а) 129 т; б) 172 т. **2.80.** 6,3 кВ. **2.81.** $\underline{U}_{a0_1} = 170e^{j3°15'}$ В; $\underline{U}_{b0_1} = 230e^{-j134°20'}$ В; $\underline{U}_{c0_1} = 208e^{j108°35'}$ В; $\underline{I}_A = 37{,}9e^{-j60°10'}$ А; $\underline{I}_B = 27{,}4e^{-j67°40'}$ А; $\underline{I}_C = 41{,}6e^{j108°35'}$ А; $\underline{I}_N = 24{,}8e^{-j49°25'}$ А; при обрыве: $\underline{I}'_A = 28{,}6e^{-j44°40'}$ А;

$\underline{I}'_B = 28{,}6e^{-j86°15'}$ А; $\underline{I}'_C = 53{,}6e^{j114°40'}$ А. **2.82.** $\underline{I}_N = 3{,}46$ А; $U_I = 108$ В; $U_{II} = 121$ В. $U_{III} = 132$ В. **2.83.** $\underline{I}_A = 18{,}3e^{-j32°24'}$ А; $\underline{I}_B = 8{,}12e^{-j157°58'}$ А; $\underline{I}_C = 15{,}05e^{j121°53'}$ В; $\underline{U}_{AO_1} = 183e^{j20°46'}$ В; $\underline{U}_{BO_1} = 203e^{-j141°42'}$ В; $\underline{U}_{CO_1} = 301e^{-j121°53'}$ В. **2.85.** а) Линейные токи: $I_A = 11{,}6$ А; $I_B = 12{,}9$ А; $I_C = 13{,}6$ А. Фазные токи: $I_{AB} = 6{,}34$ А; $I_{BC} = 8{,}55$ А; $I_{CA} = 7{,}07$ А; б) линейные токи: $I'_A = I'_B = 10{,}22$ А; $I_C = 0$. Фазные токи: $I'_{AB} = 6{,}34$ А; $I'_{BC} = I'_{CA} = 3{,}88$ А. **2.86.** $I_A = I_1 = 0{,}433$ А; $I_B = 1{,}83$ А; $I_C = I_2 = 1{,}57$ А; $P_1 = 28$ Вт; $P_2 = 227$ Вт. **2.87.** $\underline{I}_A = 6{,}54e^{-j29°35'}$ А; $\underline{I}_B = 4{,}2e^{-j146°}$ А; $\underline{I}_C = 5{,}98e^{j111°20'}$ А; $\underline{U}_A = (142 - j80{,}8)$ В; $\underline{U}_B = (-68 - j80{,}8)$ В; $\underline{U}_C = (31{,}8 + j115)$ В; $P_1 = 1{,}19$ кВт; $P_2 = 0{,}87$ кВт. **2.88.** $I_{AB} = 4{,}8$ А; $I_{BC} = 5{,}5$ А; $I_{CA} = 6{,}98$ А; $I_A = 9{,}15$ А; $I_B = 8{,}68$ А; $I_C = 11{,}9$ А. **2.89.** При $\underline{U}_{AB} = U_{AB} = 220$ В, для звезды: $\underline{I}'_A = (6{,}06 - j2{,}68)$ А; $\underline{I}'_B = (-4{,}95 - j2{,}69)$ А; $\underline{I}'_C = (-1{,}11 + j5{,}37)$ А; для треугольника: $\underline{I}_{AB} = (7{,}04 - j5{,}28)$ А; $\underline{I}_{BC} = (-8{,}1 - j3{,}46)$ А; $\underline{I}_{CA} = (-5{,}5 + j9{,}5)$ А; на входе линии: $\underline{I}_A = (18{,}6 - j17{,}46)$ А; $\underline{I}_B = (-20{,}1 - j0{,}87)$ А; $\underline{I}_C = (1{,}5 + j18{,}33)$ А. **2.91.** $T_U = \dfrac{-SR_c R_i R_a}{(R_i + R_c)(R_i + R_a)}$. **2.92.** $T_U = \dfrac{-SR_н}{1 + SR_к + R_н/R_i + R_к/R_i}$. **2.93.** $T_U = \dfrac{-(R_б + \alpha R_к) R_н}{R_б [R_э + R_к (1 - \alpha) + R_н] + R_э (R_к + R_н)}$. **2.94.** $T_U = \dfrac{(R_э - \alpha R_к) R_н}{R_б [R_э + R_к (1 - \alpha) + R_н] + R_э (R_к + R_н)}$.

К главе 3

3.1. 160 пФ; 50 мА; 40 мВт; 49,6 В. **3.2.** 16 Ом; 40 мВт. **3.3.** 125 В. **3.4.** 10 Ом; 0,4 Гн; 0,1 мкФ; 1 В. **3.5.** $f_0 = 1/2\pi\sqrt{LC} = \sqrt{f_1 f_2}$. **3.6.** 24 Ом; 0,143 Гн; 70,8 мкФ; $R_1 = 26$ Ом. **3.8.** 1) $\omega_0 = 62{,}8 \cdot 10^3$ с$^{-1}$; $\omega_L = 88{,}6 \times 10^3$ с$^{-1}$; $\omega_C = 44{,}4 \cdot 10^3$ с$^{-1}$; $U_{L\,max} = U_{C\,max} = 11{,}6$ В; 2) $\omega_0 = 62{,}8 \cdot 10^3$ с$^{-1}$; $\omega_L = \infty$; $\omega_C = 0$; ~ 10 В. **3.9.** 6,37 Ом; 50,7 мГн. **3.14.** 19 мА; 71°30'; 47,5. **3.15.** 1) 400; 2) 100. **3.16.** 50; 31,83 кГц. **3.17.** 10 В; 8,24 В. **3.18** 30; 5,3 Ом. **3.19.** До шунтирования $Q = 40$; после шунтирования $Q_{эк} = 28{,}6$. **3.20.** До шунтирования: 46,4 мА, 37 В; после шунтирования: 34 мА, 27 В. **3.21.** $I_п = 870$ мкА; $U_{C_с} : U_{C_п} = 3{,}86$; после шунтирования это отношение равно 2,78. **3.22.** 500 с$^{-1}$; 0,625 А; 1,25 А; 1,25 А. **3.23.** 1,6 мГн; $i = i_R = \dfrac{\sqrt{2}\,U}{R}\sin\omega t$; $i_L = -\dfrac{\sqrt{2}\,U}{\omega L}\cos\omega t$; $i_C = \sqrt{2}\,U\omega C\cos\omega t$; $p_L = -\dfrac{U^2}{\omega L}\sin 2\omega t$; $p_C = U^2\omega C\sin 2\omega t$; $p_R = \dfrac{U^2}{R}(1 - \cos 2\omega t)$; $w_м = \dfrac{U^2}{\omega L}(1 + \cos 2\omega t)$; $w_э = U^2\omega C(1 - \cos 2\omega t)$. **3.24.** $Q = 0{,}715$; резонанс невозможен при $R_2 > 200$ Ом; резонанс будет при любой частоте, если $R_1 = R_2 = R_C = 200$ Ом. **3.25.** $I_1 = 4$ А; резонанс будет при: а) $C' = 0{,}466$ мкФ; $I'_2 = 2{,}68$ мА; $I' = 4{,}34$ А; $\varphi' = 64°55'$; б) $C'' = 2{,}12$ мкФ; $I''_2 = 5{,}67$ мА; $I'' = 8{,}34$ А; $\varphi'' = 25°5'$. **3.26.** $R_2 = 32$ Ом; $R_{рез} = 24$ Ом. **3.27.** 9600 с$^{-1}$; 143 Ом. **3.28.** $L' = 19{,}6$ мГн; $L'' = 0{,}4$ мГн; $\varphi' = 81°52'$; $\varphi'' = 8°8'$; $\varphi' + \varphi'' = \pi/2$. **3.29.** $f_{min} = 138$ кГц; $f_{max} = 184$ кГц. **3.30.** 10^7 с$^{-1}$; 100 кОм; 0,2 А; 2 мА; 0,4 Вт. **3.33.** 500 кГц; 70,2 кОм; 32,9 кОм; 34,9 кОм; 48 кОм; 3,12 мА; 141 мА;

32 мВт. **3.34.** 1) 25,6 кОм; 33,4 кОм; 42 кОм; 2) 27,4 кОм; 14,6 кОм; 31 кОм; 3) 50,7 кОм; 50 кОм; 71 кОм. **3.37.** $\underline{I} = 1{,}64e^{j15^\circ}$ мА; $\underline{U} = 95e^{-j18^\circ}$ В; $\underline{I}_1 = 90e^{-j107°5'}$ мА; $\underline{I}_2 = 90e^{j72^\circ}$ мА; $P_и = 317$ мВт; $P_{вт} = 186$ мВт; $P = 131$ мВт. **3.39.** 1) 400 кГц; 525 мкГн; 136 мВт; 21,8 кГц; $S_0 = 0{,}0545$. **3.40.** $\omega_{рез} = 1/\sqrt{LC}$; $R_{рез} = L/CR_1$; $\omega_{рез\ эк} = 1/\sqrt{LC}$; $R_{рез\ эк} = LR_н/(L + CR_1R_н)$. **3.42.** а) $Q'_{эк} = 21{,}7$; $S_а = 23$ кГц; $I_{рез} = 1{,}93$ мА; $U_0 = 67$ В; $P_{рез} = 64$ мВт; б) $Q'_{эк} = 16{,}25$; $S_а = 30{,}8$ кГц; $I_{рез} = 2{,}18$ мА; $U_0 = 50$ В; $P_{рез} = 72{,}25$ мВт. **3.44.** Резонанс напряжений: а) 605 кГц; 9,4 Ом; б) 298 кГц; 12 Ом; резонанс токов при 408 кГц; 28,8 кОм. **3.46.** $C_1 = 1180$ пФ; $C_2 = 865$ пФ; $R_{рез\ max} = 60$ кОм. **3.47.** $R_{эк} = 13$ кОм; $X_{эк} = \pm 14{,}3$ кОм; $Z_{эк} = 19{,}3$ кОм. **3.48.** $I = 2{,}32$ мА; $I_1 = I_2 = 86$ мА; $I_н = 0{,}8$ мА. При расстройке: $I' = 2{,}42$ мА; $I'_1 = 82$ мА; $I_2 = 81$ мА; $I'_н = 0{,}77$ мА; $R_ш = 80$ кОм; $P_{max} = 50$ мВт. **3.49.** $L_1 = 240$ мкГн; $L_2 = 160$ мкГн; $C = 400$ пФ; $R_1 = R_2 = 5$ Ом; частота резонанса токов: $2{,}5 \cdot 10^6$ с$^{-1}$, при этом $I = 2{,}55$ мА; $I_1 = I_2 = 102$ мА; $P = 104$ мВт; частота резонанса напряжений: $3{,}22 \cdot 10^6$ с$^{-1}$; $I' = 3{,}2$ мА; $I'_1 = 3{,}2$ мА; $I'_2 = 0{,}4$ А; $P = 0{,}8$ Вт. **3.51.** $R_{2min} = 2\omega L$; $I = \dfrac{U\left(1 + R_2^2\omega^2C^2\right)}{R_1 + R_2 + R_1R_2^2\omega^2C^2}$. **3.52.** $\underline{Z}_1 = 1{,}28$ Ом; $P_{max} = 1{,}9$ кВт. **3.53** а) $\underline{Z}'_3 = -j10$ Ом; $I_1 = 6$ А; $\underline{I}_2 = (-2{,}4 - j4{,}8)$ А; $\underline{I}_3 = (8{,}4 + j4{,}8)$ А; б) $\underline{Z}_3 = -j15{,}7$ Ом; $\underline{I}_1 = 3{,}28$ А; $\underline{I}_2 = (0{,}36 - j5{,}12)$ А; $\underline{I}_3 = (2{,}92 + j5{,}12)$ А. **3.54.** а) $\omega L' = 4$ Ом; 30 А; $(15 - j7{,}5)$ А; $(15 + j7{,}5)$ А; б) $\omega L'' = 16$ Ом; 20,4 А; $(2{,}55 - j5{,}1)$ А; $(17{,}85 + j5{,}1)$ А. **3.55.** $R_2 = 24$ Ом; $X_C = 10$ Ом; $\underline{I}_2 = 1{,}4e^{-j26°30'}$ А; $\underline{I}_3 = 1{,}4e^{j26°30'}$ А. **3.56.** $f_н = 2800$ Гц; $f_т = 2200$ Гц.

К главе 4

4.1. 0,25 мкГн. **4.2.** 900 пФ. **4.3.** 0,5. **4.5.** $(5 + j12)$ Ом; $\underline{I} = 10e^{-j67°20'}$ А; $\underline{U}_{ab} = 44{,}7e^{-j3°50'}$ В; $\underline{U}_{cd} = 85{,}5e^{j2°5'}$ В. **4.6.** $\underline{I} = (0{,}8 - j0{,}6)$ А; $\underline{U}_{ab} = (69 + j42)$ В; $\underline{U}_{cd} = (31 - j42)$ В. **4.7.** $10e^{-j36°50'}$ А; $78e^{j13°20'}$ В. **4.8.** 0,796 мкФ или 0,0442 мкФ. **4.10.** Встречное; 11,1 мГн. **4.12.** $\underline{I}_1 = (8 - j1)$ А; $\underline{I}_2 = (6 - j2)$ А; $\underline{I} = (14 - j3)$ А. **4.13.** 0,0324 мкФ; $I = 1{,}42$ мА; $\underline{I}_1 = (0{,}75 + j0{,}17)$ мА; $\underline{I}_2 = (0{,}67 - j0{,}17)$ мА. **4.14.** 1,1 мкФ; $\underline{I}_1 = j17{,}6$ мА; $\underline{I}_2 = -j17{,}6$ мА. **4.16.** $3{,}14e^{-j151°30'}$ А; $328e^{-j97°50'}$ В. **4.18.** $25 \cdot 10^3$ с$^{-1}$. **4.19.** $\underline{I}_1 = 1{,}24e^{-j71°40'}$ А; $\underline{I}_2 = 0{,}81e^{-j65°50'}$ А; $\underline{I}_3 = 0{,}444e^{-j82°20'}$ А. **4.20.** $\underline{X}_{C1} = 210$ Ом, при этом $\underline{I}_1 = 1{,}6$ А; $\underline{I}_2 = (1{,}44 - j0{,}32)$ А; $\underline{I}_3 = (0{,}16 + j0{,}32)$ А; $X_{C2} = 60$ Ом, при этом $\underline{I}_1 = 2$ А; $\underline{I}_2 = (1{,}2 - j0{,}4)$ А; $\underline{I}_3 = (0{,}8 + j0{,}4)$ А. **4.21.** $\underline{I}_1 = (2{,}4 - j1{,}8)$ А; $\underline{I}_2 = -j5$ А; $\underline{I}_3 = (2{,}4 + j3{,}2)$ А. **4.22.** 1/3; $\underline{I}_1 = 4{,}55e^{-j18°20'}$ А; $\underline{I}_2 = 10{,}2e^{-j81°50'}$ А; $\underline{I}_3 = 9{,}1e^{j71°40'}$ А. **4.25.** $\underline{Z}_{вх} = -j19$ Ом; $X_C = 10{,}24$ Ом. **4.26.** а) 28 Ом; $A_1 = 0$; $A_2 = A_3 = 2$ А; б) 20 Ом; $A_1 = 0{,}2$ А; $A_2 = 0{,}6$ А; $A_3 = 1{,}8$ А. **4.28.** 292 пФ; 2,7 мА; 0,507 мА; 110 мкВт; 25,8 мкВт; 0,19. **4.29.** 330 пФ; 93 мкГн; 1,67 мА; 0,645 мА; 42 мкВт; 42 мкВт; 0,5. **4.30.** 281 пФ; 234 пФ; 38,7 Ом; 1,67 мА; 0,645 мА; 42 мкВт; 42 мкВт; 0,5. **4.31.** 250 пФ; 4,85 Вт; 7,85 Вт; 0,617. **4.32.** 77 мкГн; 270 пФ; 8,33 Вт; 0,5. **4.33.** 278 пФ; 222 пФ; 4,6 мкГн; 8,33 Вт; 8,33 Вт; 0,5. **4.35.** 800 пФ; 400 пФ; $Q_1 = Q_2 = 50$; 5,66 мкГн; 3,54 мкА; 3,54 мВ; $S_r = 2{,}82 \cdot 10^{-2}$. **4.37.** 1250 Гц; 0,011; 4,4 мкГн. **4.41.** 61,5 Вт; 57%. **4.43.** 1,21 кВт; 0,81 кВт.

К главе 5

5.1. 1) $u=\frac{2U_m}{\pi}\left[\left(\frac{1}{1}\cdot\frac{2}{\pi}+1\right)\sin\omega_1 t-\frac{1}{2}\sin 2\omega_1 t+\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{\pi}+\right.\right.$ $\left.\left.+1\right)\sin 3\omega_1 t-\frac{1}{4}\sin 4\omega_1 t+\cdots\right]$ В, 2) $u=\frac{4U_m}{\pi}\left(\sin\omega_1 t+\frac{1}{3}\sin 3\omega_1 t+\right.$ $\left.+\frac{1}{5}\sin 5\omega_1 t+\cdots\right)$ В; 3) $u=\frac{2U_m}{\pi}\left(\sin\omega_1 t-\frac{1}{2}\sin 2\omega_1 t+\frac{1}{3}\sin 3\omega_1 t-\right.$ $\left.-\frac{1}{4}\sin 4\omega_1 t+\cdots\right)$ В. **5.3.** $u=128\sin(\omega_1 t+38°40')+63{,}3\sin(2\omega_1 t+108°25')+$ $+33{,}6\sin(3\omega_1 t-26°30')+14{,}4\sin(4\omega_1 t-123°40')$ В; $u(t)=\frac{1}{2}\sum_{n=-4}^{n=4}\underline{U}_n\times$ $\times\,\mathrm{e}^{jn\omega_1 t}$, где $\underline{U}_1=\underline{U}^*_{-1}=128\mathrm{e}^{-j51°20'}$ В, $\underline{U}_2=\underline{U}^*_{-2}=63{,}3\mathrm{e}^{j18°20'}$ В, $\underline{U}_3=\underline{U}^*_{-3}=$ $=33{,}6\mathrm{e}^{-j116°30'}$ В, $\underline{U}_4=\underline{U}^*_{-4}=14{,}4\mathrm{e}^{j146°20'}$ В. **5.4.** $i=\frac{I_{1m}+I_{2m}}{2}+$ $+\frac{2(I_{2m}-I_{1m})}{\pi}\left(\sin\omega_1 t+\frac{1}{3}\sin 3\omega_1 t+\frac{1}{5}\sin 5\omega_1 t+\cdots\right)$. **5.5.** $u=$ $=\frac{U_m}{2}-\frac{U_m}{\pi}\left(\sin\omega_1 t+\frac{1}{2}\sin 2\omega_1 t+\frac{1}{3}\sin 3\omega_1 t+\cdots\right)$. **5.6.** $\frac{a_0}{2}=\frac{U_m}{2}$; $a_k=-\frac{4U_m}{k^2}\cdot\frac{\sin^2\frac{k\omega_1 t_1}{2}}{\omega_1 t_1(2\pi-\omega_1 t_1)}$; $b_k=\frac{2U_m}{k^2}\cdot\frac{\sin k\omega_1 t_1}{\omega_1 t_1(2\pi-\omega_1 t_1)}$. 1) $u=\frac{U_m}{2}-$ $-\frac{U_m}{\pi}\left(\sin\omega_1 t+\frac{1}{2}\sin 2\omega_1 t+\frac{1}{3}\sin 3\omega_1 t+\cdots\right)$; 2) $u=\frac{U_m}{2}-\frac{4U_m}{\pi^2}\times$ $\times\left(\cos\omega_1 t+\frac{1}{3^2}\cos 3\omega_1 t+\frac{1}{5^2}\cos 5\omega_1 t+\cdots\right)$; 3) $u=\frac{U_m}{2}-\frac{8U_m}{3\pi^2}\left[\sin\omega_1 t-\right.$ $\left.-\frac{1}{3^2}\sin 3\omega_1 t+\frac{1}{5^2}\sin 5\omega_1 t-\cdots\right)+\left(\cos\omega_1 t+\frac{2}{2^2}\cos 2\omega_1 t+\frac{1}{3^2}\cos 3\omega_1 t+\right.$ $\left.+\frac{2}{4^2}\cos 4\omega_1 t+\cdots\right)$. **5.8.** 22,4 А; 0,82. **5.9.** $i=[34{,}3\sin(\omega_1 t+31°)+$ $+5{,}9\sin(3\omega_1 t-78°40')]$ А; $u_C=[100+103\sin(\omega_1 t-59°)+5{,}9\sin(3\omega_1 t-$ $-168°40')]$ В; 174 В; 24,6 А; 3040 Вт; а) 100 В; б) 127 В. **5.11.** 280 В; 388 Вт. **5.12.** $i_1=[0{,}1+0{,}0744\sin(\omega_1 t-42°25')+0{,}0157\sin(3\omega_1 t-71°20')]$ А; $i_2=$ $=[0{,}1+0{,}0336\sin(\omega_1 t-79°40')+0{,}00458\sin(3\omega_1 t-124°20')]$ А; $i_3=$ $=[0{,}052\sin(\omega_1 t-19°25')+0{,}0134\sin(3\omega_1 t-55°30')]$ А; 17,9 Вт. **5.13.** При подключении через фильтр $I'_{2\,(0)}:I_2\approx 1$, без фильтра $I'_{2\,(0)}:I_2=0{,}905$. **5.14.** $C_1=17$ мкФ; $C_2=2{,}22$ мкФ; $i_1=0{,}4\sin\omega_1 t$ А; $i_2=(-0{,}05\sin\omega_1 t+$ $+0{,}333\cos 3\omega_1 t)$ А; $i_3=(0{,}45\sin\omega_1 t-0{,}333\cos 3\omega_1 t)$ А; $u_{ab}=(4{,}5\cos\omega_1 t+$ $+10\sin 3\omega_1 t)$ В; $I_1=0{,}283$ А; $I_2=0{,}238$ А; $I_3=0{,}4$ А; $U_{ab}=7{,}75$ В; $P=$ $=4$ Вт. **5.15.** $R_3=20$ Ом; $I_1=1{,}8$ А; $I_2=1{,}06$ А; $I_3=0{,}81$ А. **5.16.** $i_1=$ $=[2{,}5+0{,}984\sqrt{2}\sin(\omega_1 t-31°30')]$ А; $i_2=0{,}232\sqrt{2}\sin(\omega_1 t-166°30')$ А. **5.17.** 26,3 мА. **5.18.** 78 В. **5.19.** $L_1=0{,}545$ мГн; $L_2=4{,}29$ мГн (большее значение). **5.21.** $K_\Phi=1{,}28$; $K_\text{а}=1{,}76$; $K_\text{и}=0{,}96$.

К главе 6

6.1. $\tau=2$ мс; $t=9{,}2$ мс; $e_L=-120\mathrm{e}^{-500t}$ В; $t_\text{м}=1{,}39$ мс. **6.2.** 6,67 А/с; 3,34 А/с. **6.3.** $i=3\mathrm{e}^{-500t}$ А. **6.5.** $i=(12-9\mathrm{e}^{-100t})$ А. **6.6.** $i=2\,(1+$ $+\mathrm{e}^{-300t})$ А. **6.7.** 7,8 мс. **6.8.** $i_1=(6-3{,}6\mathrm{e}^{-40t})$ А; $i_2=2{,}4\mathrm{e}^{-40t}$ А; $i_3=$

$= 6(1 - e^{-40t})$ А. **6.11.** $i_{1\,св}(0_+) = -0{,}9$ А; $i_{2\,св}(0_+) = -1{,}14$ А; $i_{3\,св}(0_+) = 0{,}24$ А; $u_{L\,св}(0_+) = 18{,}6$ В; $\left.\frac{du_{L\,св}}{dt}\right|_{t=0_+} = -12{,}2 \cdot 10^3$ В/с; $i_1 = (3{,}87 - 0{,}9e^{-653t})$ А; $i_2 = (2{,}905 - 1{,}14e^{-653t})$ А; $i_3 = (0{,}965 + 0{,}24e^{-653t})$ А.

6.13. $u_C = JR_2(1 - e)^{-\frac{1}{RC}t}$. **6.14.** а) 100 В; 100 Ом; б) 0,23 с. **6.15.** 11,25 мК; 25 мК/с; $2{,}23 \cdot 10^{-8}$ %. **6.16.** $u_C = U + (U_0 - U)e^{-\frac{1}{RC}t}$; $i = \frac{U - U_0}{R}e^{-\frac{1}{RC}t}$.

6.17. $i = 0{,}64e^{-1000t}$ А; $u_{C1} = (64e^{-1000t} + 36)$ В; $u_{C2} = (-16e^{-1000t} + 36)$ В; $w_{нач} = 58$ мДж; $w_{кон} = 32{,}4$ мДж. **6.18.** 44,1 В. **6.19.** $i_1 = (0{,}2 + 0{,}05e^{-5 \cdot 10^9 t})$ А; $i_2 = 0{,}2(1 - e^{-5 \cdot 10^9 t})$ А; $i_3 = 0{,}25e^{-5 \cdot 10^9 t}$ А. **6.21.** 1) $i_1(0_+) = 1$ А; $i_2(0_+) = 0{,}6$ А; $i_3(0_+) = 0{,}4$ А; $u_C(0_+) = 30$ В; $i_{1y} = i_{2y} = 0{,}8$ А; $i_3 = 0$; $u_{Cy} = 40$ В; $i_{1\,св}(0_+) = 0{,}2$ А; $i_{2\,св}(0_+) = -0{,}2$ А; $i_{3\,св}(0_+) = 0{,}4$ А; $u_{C\,св}(0_+) = -10$ В. 2) $i_1 = (0{,}8 + 0{,}2e^{-4 \cdot 10^4 t})$ А; $i_2 = (0{,}8 - 0{,}2e^{-4 \cdot 10^4 t})$ А; $i_3 = 0{,}4e^{-4 \cdot 10^4 t}$ А; $u_C = (40 - 10e^{-4 \cdot 10^4 t})$ В. **6.22.** $u_C = (16 + 8e^{-6250t})$ В; $i_1 = (0{,}16 - 0{,}1e^{-6250t})$ А; $i_2 = (0{,}16 + 0{,}05e^{-6250t})$ А; $i = -0{,}15e^{-6250t}$ А. **6.23.** $i_1 = (0{,}3 - 0{,}24e^{-1000t} - 0{,}06e^{-4000t})$ А; $i_2 = (0{,}3 - 0{,}4e^{-1000t} + 0{,}1e^{-4000t})$ А; $i_3 = 0{,}16(e^{-1000t} - e^{-4000t})$ А. **6.24.** $u_{C2} = 81{,}3(e^{-175t} - e^{-6325t})$ В. **6.25.** $-0{,}39$ А. **6.27.** $u_C = 5\left[\sin(\omega t + 22°40') - 0{,}385e^{\frac{1}{12 \cdot 10^6}t}\right]$ мВ. **6.28.** При $t_m = 405$ мкс $I_{max} = 4{,}68$ А. **6.29.** $\omega_0 = 98 \cdot 10^3$ с$^{-1}$; $\omega_0' = 126{,}4 \cdot 10^3$ с$^{-1}$. **6.30.** 230 колебаний. **6.32.** $i_1 = 0{,}02 \times (16e^{-500t} - e^{-125t})$ А; $i_2 = 0{,}1(4e^{-500t} - e^{-125t})$ А; $i_3 = 0{,}08(e^{-125t} - e^{-500t})$ А; $u_C = (30 - 40e^{-500t} + 10e^{-125t})$ В. При $R > \frac{1}{2}\sqrt{\frac{L}{C}}$. **6.34.** $i_1 = \frac{E_m}{Z_1}\left[\sin(\omega t + \psi - \varphi_1) - \sin(\psi - \varphi_1)e^{-\frac{t}{\tau}}\right]$; $i_2 = \frac{E_m}{Z_2}\sin(\omega t + \psi - \varphi_2) + \frac{E_m}{Z_1}\sin(\psi - \varphi_1)e^{-\frac{t}{\tau}}$; $i = \frac{E_m}{R}\sin(\omega t + \psi)$,

где

$Z_1 = \sqrt{R^2 + (\omega L)^2}$; $\operatorname{tg}\varphi_1 = \omega L/R$; $Z_2 = \sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2}$; $\operatorname{tg}\varphi_2 = -\frac{1}{\omega CR_2} = \operatorname{ctg}\varphi_1$. **6.35.** 1) $u_C = U\left\{1 - e^{-at}\left[\operatorname{ch} bt + \frac{1}{b}\left(\frac{R}{2L} - \frac{1}{RC}\right)\operatorname{sh} bt\right]\right\}$; $i = \frac{U}{R}e^{-at}\left(\operatorname{ch} bt + \frac{R}{2bL}\operatorname{sh} bt\right)$, где $a = \frac{R}{2L} = 1250$ с$^{-1}$, $b = \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}} = 750$ с$^{-1}$; 2) $u_C = U\left\{1 - e^{-at}\left[\cos\omega_0 t + \frac{1}{\omega_0}\left(\frac{R}{2L} - \frac{1}{RC}\right)\sin\omega_0 t\right]\right\}$; $i = \frac{U}{R}e^{-at}\left(\cos\omega_0 t + \frac{R}{2\omega_0 L}\sin\omega_0 t\right)$, где $\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2} = 5000$ с$^{-1}$; $a = \frac{R}{2L} = 1000$ с$^{-1}$. **6.36.** $i_1(0_+) = 2$ А;

$u_C(0_+)=0$; $\left.\frac{di_1}{dt}\right|_{t=0_+}=6{,}67\cdot10^3$ А/с; $\left.\frac{du_C}{dt}\right|_{t=0_+}=6{,}7\cdot10^3$ В/с; $i_2=2+$ $+0{,}94e^{-3\cdot10^4t}\sin(10^4t-45°)$ А; $u_C=20+21{,}2e^{-3\cdot10^4t}\sin(10^4t-71°35')$ В. **6.37.** $u_C=(40+24e^{-10^5t}-16e^{-1{,}5\cdot10^5t})$ В. **6.38.** Для $t=0_+$: $i_1=0{,}27$ А; $i_2=0{,}45$ А; $i_3=0{,}21$ А; $i_4=-0{,}18$ А; $i_5=0{,}06$ А; $u_L=-30$ В; $u_C=63$ В; для $t=\infty$: $i_1=i_2=0{,}28$ А; $i_3=i_5=0{,}14$ А; $i_4=0$; $u_L=0$; $u_C=28$ В. **6.40.** Для схем *а* — *д* $n=1$; для схемы *е* $n=2$; для схемы *ж* $n=3$. **6.44.** $u_C(0_-)=80$ В; $u_C(0_+)=-20$ В. **6.46.** $i_1(0_-)=10$ А; $i_1(0_+)=2{,}5$ А. **6.48.** $u_C=20$ В при $t<0$; $u_C=(70+8{,}5e^{-3{,}62\cdot10^5t}-58{,}5\ e^{-1{,}38\cdot10^5t})$ В. **6.49.** а) $u(t)=U_1\cdot1(t)-U_1\cdot1(t-t_1)+U_2\cdot1(t-t_1)-U_2\cdot1(t-t_2)$; б) $u(t)=\frac{U}{t_1}t\cdot1(t)-\frac{U}{t_1}t\cdot1(t-t_1)-U\cdot1(t-t_1)$.

К главе 7

7.2. $u_2=(83{,}3-33{,}3e^{-600t})$ В. **7.3.** См. ответ к задаче 6.8. **7.5.** При вещественных корнях $i=\frac{ER_1e^{-\delta t}}{\beta L(R_1+R)}\operatorname{sh}\beta t$; при комплексных корнях $i=$ $=\frac{ER_1e^{-\delta t}}{\omega L(R_1+R_2)}\sin\omega t$; при равных корнях $i=\frac{ER_1te^{-\delta t}}{L(R_1+R_2)}$, где $\delta=b/a$, $\beta=$ $=j\omega=\frac{1}{2a}\sqrt{b^2-4ac}$, $a=LC(R_1+R_2)$; $b=C(R_1R_2+RR_2+RR_1)$; $c=$ $=R+R_1$. **7.6.** $i=\frac{U}{R_0+R+R_{ш}}\left\{1+e^{-\delta t}\left[\frac{R_0+R+R_{ш}}{\omega_0L}-\frac{\delta}{\omega_0}\right]\sin\omega_0t-\cos\omega_0t\right\}$, где $\delta=\frac{1}{2}\left(\frac{R_0+R}{L}+\frac{1}{CR_{ш}}\right)$, $\omega_0=\sqrt{\frac{1}{LC}-\frac{1}{4}\left(\frac{R_0+R}{L}-\frac{1}{CR_{ш}}\right)^2}$.

7.7. $u_C=\frac{U_m\sin(\omega_0t+\psi-\varphi)}{\sqrt{\left(\frac{R_1+R_2}{R_2}\right)^2+(\omega CR_1)^2}}+\frac{U_m\sin(\psi-\varphi)\,e^{-\frac{R_1+R_2}{CR_1R_2}t}}{\sqrt{\left(\frac{R_1+R_2}{R_2}\right)^2+(\omega_0CR_1)^2}}$.

7.8. $i_1=\frac{U_m}{\sqrt{(R_1R_2)^2+(\omega LR_1+\omega LR_2)^2}}\left[\sqrt{R_2^2+(\omega L)^2}\sin(\omega t-\psi-\alpha+\beta)-\right.$ $\left.-\frac{R_2^2\sin(\psi-\alpha)\,e^{-\frac{t}{\tau}}}{R_1+R_2}\right]$, где $\operatorname{tg}\alpha=\omega L(R_1+R_2)/R_1R_2$, $\operatorname{tg}\beta=\omega L/R_2$, $\tau=$ $=L(R_1+R_2)/R_1R_2$. **7.9.** $i=7{,}22\sin(314t+43°50')+8{,}3e^{-100t}\sin(153t-$ $-37°20')$ А; $u_C=346\sin(314t-46°10')-412e^{-100t}\sin(153t-37°20')$ В. **7.11.** См. ответы к задачам 6.5 и 6.6. **7.13.** $i_1=(0{,}05+0{,}1e^{-2000t}-0{,}05e^{-3000t})$ А; $i_2=(0{,}05-0{,}1e^{-2000t}+0{,}1e^{-3000t})$ А; $i_3=(0{,}2e^{-2000t}-0{,}15e^{-3000t})$ А. **7.15.** См. ответы к задачам 6.35 — 6.38. **7.16.** $i_1=(0{,}32-0{,}28e^{-5000t})$ А; $i_2=(0{,}08+$ $+0{,}28e^{-5000t})$ А. **7.17.** $i_1=(0{,}24+0{,}08e^{-2500t})$ А; $i_2=(0{,}16-0{,}08e^{-2500t})$ А. **7.19.** $i_2=1{,}27\sin(314t+56°50')+0{,}196e^{-159t}$ А. **7.20.** $i_2=1{,}18\sin(314t+$ $+16°40')+0{,}43e^{-336t}$ А. **7.21.** $i=10te^{-10t}$ А; $I_{max}=0{,}368$ А. **7.22.** $i=$ $=(0{,}1e^{-10t}-0{,}05e^{-5t})$ А; $u_C=200(e^{-5t}-e^{-10t})$ В. **7.23.** $i=0{,}024(e^{-2t}-$

$-e^{-4t})$ А; $u_C = (120 + 120e^{-4t} - 240e^{-2t})$ В. **7.25.** а) $u_{ab} = \frac{U}{45}\left(9+9e^{-\frac{5R}{3L}t}\right)$; $u_{ab} = \frac{1}{6}RJ\left(2+e^{-\frac{3R}{L}t}\right)$; б) $u_{ab} = \frac{U}{30}\left(10-e^{-\frac{3}{5RC}t}\right)$; $u_{ab} = \frac{1}{3}JR \times$ $\times\left(3-e^{-\frac{1}{3RC}t}\right)$. **7.27.** 1) Для схемы рис. 7.22, *а* как при действии U, так и J $i_2 = 0{,}1\,(e^{-6000t} - e^{-1000t})$ А. Для схемы 7.22, *б* $i_2 = 0{,}1\,(1 - e^{-1500t})$ А.

К главе 8

8.2. $y(t) = \frac{1}{R_2} - \frac{R_1}{R_2(R_1+R_2)}e^{-\frac{R_1R_2}{L(R_1+R_2)}t}$; $h(t) = 1 - \frac{R_1}{R_1+R_2}e^{-\frac{R_1R_2}{L(R_1+R_2)}t}$.

8.3. $y(t) = 10^{-3}e^{-1000t}\sin(2\cdot 10^5 t)$. **8.4.** $h(t) = \frac{R_1}{R+R_1}\left(1-e^{-\frac{R+R_1}{CRR_1}t}\right)$; $y(t) = \frac{1}{R+R_1}\left(1+\frac{R_1}{R}e^{-\frac{R+R_1}{CRR_1}t}\right)$; $y_1(t) = \frac{1}{R+R_1}\left(1-e^{-\frac{R+R_1}{CRR_1}t}\right)$.

8.6. Для схемы рис. 8.10, *а*: $h_1(t) = \frac{R_2}{R_1+R_2}\left(1-e^{-\frac{R_1+R_2}{L}t}\right)$; $h_2(t) =$ $= \frac{1}{R_1+R_2}\left(R_1+R_2e^{-\frac{R_1+R_2}{L}t}\right)$; $z(t) = \frac{R_2}{R_1+R_2}\left(R_1+R_2e^{-\frac{R_1+R_2}{L}t}\right)$; для схемы рис. 8.10, *б*: $h_1(t) = \frac{1}{R_1+R_3}\left(R_3 + \frac{R_1R_2}{R_1+R_2+R_3}e^{p_1t}\right)$; $h_2(t) =$ $= \frac{R_1}{R_1+R_2+R_3}e^{p_1t}$; $z(t) = \frac{R_1R_2}{R_1+R_2+R_3}e^{p_1t}$, где $p_1 = -\frac{R_2(R_1+R_3)}{L(R_1+R_2+R_3)}$.

8.8. Для схемы рис. 8.12, *а*: $u_2(t) = U_1h(t)$ при $0 \leqslant t < t_1$, $u_2(t) = U_1h(t) -$ $-(U_1-U_2)h(t_1)$ при $t_1 < t < t_2$; $u_2(t) = U_1h(t) - (U_1-U_2)h(t_1) - U_2h(t_2)$ при $t > t_2$; для схемы рис. 8.12, *б*: $u_2(t) = U_1h(t)$ при $0 \leqslant t < t_1$; $u_2(t) =$ $= U_1h(t) - (U_1+U_2)h(t_1)$ при $t_1 < t < t_2$; $u_2(t) = U_1h(t) - (U_1+U_2)h(t_1) +$ $+ U_2h(t_2)$ при $t > t_2$; для схемы рис. 8.12, *в*: $u_2(t) = U_1h(t) + \frac{U_2-U_1}{t_1}\int\limits_0^t h(t-\tau)\,d\tau$ при $0 \leqslant t \leqslant t_1$; $u_2(t) = U_1h(t) + \frac{U_2-U_1}{t_1}\int\limits_0^t h(t-\tau)\,d\tau - U_2h(t_1)$ при $t > t_1$.

8.10. $i = \frac{U_m}{Z}\left[\sin(\omega t-\varphi) + \sin\varphi\cdot e^{-\frac{1}{RC}t}\right]$ при $0 \leqslant t < \frac{T}{2}$;

$i = \frac{U_m}{Z}\left[\sin(\omega t-\varphi)\,e^{-\frac{1}{RC}(t-t_1)} + \sin\varphi e^{-\frac{1}{RC}t}\right]$ при $\frac{T}{2} \leqslant t \leqslant \infty$, где $Z =$ $= \sqrt{R^2+\left(\frac{1}{\omega C}\right)^2}$, $\varphi = \operatorname{arctg}\left(-\frac{1}{\omega CR}\right)$. **8.11.** $i(t) = U\omega_0C\left(1-e^{-\frac{1}{RC}t}\right)$;

$u_C = U\omega_0 t - U\omega_0 CR\left(1 - e^{-\frac{1}{RC}t}\right)$ **8.12.** $u_C(t) = (5\cdot 10^3 t - 12{,}5 + 12{,}5e^{-400t})$В при $0 \leqslant t < t_и$; $u_C(t) = (5\cdot 10^3 t_и - 10 - 2{,}5e^{-400(t-t_и)} + 12{,}5e^{-400t})$ В при $t > t_и$. **8.13.** $i(t) = (50t - 0{,}1 + 0{,}1e^{-500t})$ А при $0 < t \leqslant 2$ мс; $i(t) = 0{,}1e^{-500t}$ А при $t > 2$ мс. **8.14.** $u_2(t) = 25(1 - e^{-1000t})$ В при $0 \leqslant t \leqslant t_1$; $u_2(t) = 1340e^{-1000t} = 24{,}5e^{-1000(t-t_1)}$ В при $t_1 \leqslant t \leqslant \infty$. **8.15.** $u_2(t) = U(\omega_0 t) - \omega_0\sqrt{LC}\sin\left(\frac{1}{\sqrt{LC}}t\right)$.

8.19. $u_2(t) = \frac{U_0 R_2}{R_1R_2 - aL(R_1+R_2)}\left[(R_1 - aL)e^{-at} - \frac{R_1^2}{R_1+R_2}e^{-\frac{R_1R_2}{L(R_1+R_2)}t}\right]$;

$y_{иR_1}(t) = \frac{1}{R_1+R_2}\delta(t) - \frac{R_1R_2}{L(R_1+R_2)}e^{-\frac{R_1R_2}{L(R_1+R_2)}t}$; $y_{иL}(t) = \frac{R_1}{L(R_1+R_2)}e^{-\frac{R_1R_2}{L(R_1+R_2)}t}$; $i_R = \frac{U_0}{R_1R_2 - aL(R_1+R_2)}\left(\frac{R_1R_2}{R_1+R_2}e^{-\frac{R_1R_2}{L(R_1+R_2)}t} - aLe^{-at}\right)$;

$i_L = \frac{U_0R_1}{R_1R_2 - aL(R_1+R_2)}\left(e^{-at} - e^{-\frac{R_1R_2}{L(R_1+R_2)}t}\right)$. **8.21.** Для RC-схемы: 1) да; 2) нет; для RL-схемы: 1) да; 2) нет. **8.22.** 1) Дифференцирующая, 2) интегрирующая, 3) переходная. **8.23.** а) нет; б) да. **8.24.** а) $U(j\omega) = \frac{10}{1000 + j\omega}$ В · с/рад;

б) $U(j\omega) = \frac{\alpha}{\alpha^2 + \omega^2}e^{-j2\operatorname{arctg}\omega/\alpha}$. **8.25.** $E(j\omega) = Ut_и\frac{\sin\frac{\omega t_и}{2}}{\frac{\omega t_и}{2}}$. **8.26.** $E(j\omega) = 2Et_и\frac{\sin\frac{\omega t_и}{2}}{\frac{\omega t_и}{2}}\cos\omega t_0$. **8.28.** Для рис. 8.21, *а*: $E(j\omega) = \frac{S}{j\alpha}\left(\frac{\sin\alpha}{\alpha}e^{-j\alpha} - e^{-j2\alpha}\right)$,

где $S = \frac{Et_и}{2}$, $\alpha = \frac{\omega t_и}{2}$, $E(1{,}5\cdot 10^6) = 1{,}08\cdot 10^{-6}$ В · с/рад; для рис. 8.21, *б*: $E(j\omega) = S\frac{\sin\alpha}{\alpha}\cdot\frac{\sin\beta}{\beta}$, где $S = E\frac{t_1+t_2}{2}$, $\alpha = \frac{\omega(t_2+t_1)}{2}$, $\beta = \frac{\omega(t_2-t_1)}{2}$;

$E(1{,}5\cdot 10^6) = 0{,}225\cdot 10^{-6}$ В · с/рад. **8.30.** $U(j\omega) = \frac{2\cdot 10^7}{(2\cdot 10^5)^2 - \omega^2}\times$

$\times\sin(10^5\pi\omega)e^{-j\pi(10^{-5}\omega - 0{,}5)}$. **8.31.** а) $u(t) = U\left(1 - e^{-\frac{1}{RC}t}\right)$; б) $u(t) = Ue^{-\frac{1}{RC}t}$; в) $u(t) = \frac{1}{1-\alpha RC}\left(e^{-\alpha t} - e^{-\frac{1}{RC}t}\right)$; г) $u(t) = \frac{1}{a^2}(1 - \cos at)$.

8.33. Для схемы 8.7, *а*: $T(j\omega) = \frac{R_2(R_1 + j\omega L)}{R_1R_2 + j\omega L(R_1+R_2)}$; $Y(j\omega) = \frac{R_1 + j\omega L}{R_1R_2 + j\omega L(R_1+R_2)}$; для схемы рис. 8.7, *б*: $T(j\omega) = \frac{1 + j\omega C_1R_2}{a}$;

$Y(j\omega) = \frac{j\omega C_2(1 + j\omega C_1R_2)}{a}$, где $a = 1 - \omega^2C_1C_2R_1R_2 + j\omega(C_1R_2 + C_2R_1 + C_2R_2)$.

8.35. $T_{1I}(j\omega) = \dfrac{R_2}{R_1+R_2+j\omega L}$; $T_{2I}(j\omega) = \dfrac{R_1+j\omega L}{R_1+R_2+j\omega L}$; $Z_2(j\omega) = \dfrac{R_2(R_1+j\omega L)}{R_1+R_2+j\omega L}$. **8.36.** $U_2(j\omega) = \dfrac{40\sin(5\cdot 10^{-4}\omega)}{\omega(1+j\cdot 10^{-4}\omega)} e^{-j5\cdot 10^{-4}\omega}$. **8.37.** $U_2(j\omega) = \dfrac{U\omega_0}{\omega^2(\omega^2LC-1)}$. **8.38.** $T(j\omega) = \dfrac{e^{-j0{,}5\cdot 10^{-6}\omega}}{100}$. **8.39.** $T(j\omega) = 0{,}1\omega e^{j\frac{\pi}{2}}$. **8.40.** $T(j\omega) = a + j\left(b\omega - \dfrac{c}{\omega}\right)$.

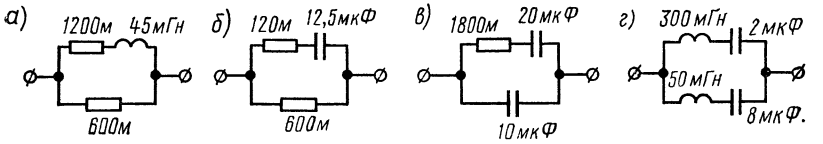
К главе 9

9.5. $R_0 = 5{,}05$ Ом/км; $L_0 = 2{,}06$ мГн/км; $C_0 = 6\cdot 10^{-9}$ Ф/км; $G_0 = 0{,}7\cdot 10^{-6}$ См/км; $\underline{Z}_в = 620e^{-j12\,25'}$ Ом; $\underline{\gamma} = 18{,}7\cdot 10^{-3}e^{j76°15'}$ км$^{-1}$; $\alpha = 4{,}45$ мНп/км; $\beta = 18{,}2$ мрад/км; $\lambda = 345$ км; $v_ф = 276\,000$ км/с. **9.6.** $\underline{Z}_в = 387$ Ом; $\alpha = 39$ мкНп/м; $\beta = 0{,}21$ рад/м. **9.7.** По полным формулам (9.1) и (9.2): $\underline{Z}_в = 357e^{-j41°5'}$ Ом, $\underline{\gamma} = 0{,}0634e^{j48°40'}$ км$^{-1}$; $\alpha = 0{,}042$ Нп/км; $\beta = 0{,}048$ рад/км; по приближенным формулам: $\underline{Z}_в = 358e^{-j45°}$ Ом; $\underline{\gamma} = 0{,}0634e^{j45°}$ км$^{-1}$; $\alpha = 0{,}045$ Нп/км; $\beta = 0{,}045$ рад/км. **9.11.** $U_1 = 15{,}9e^{j174°45'}$ В; $I_1 = 29{,}2e^{j175°55'}$ мА. **9.14.** $u_{пр2} = 14\sin(\omega t - 21°50')$ В; $u_{обр2} = 5{,}3\sin(\omega t + 77°)$ В; $u_{пр1} = 23{,}2\sin(\omega t + 57°30')$ В; $u_{обр1} = 3{,}2\sin(\omega t - 2°20')$ В. **9.15.** $\underline{U}_1 = 11{,}1e^{j177°40'}$ В; $\underline{I}_1 = 9{,}1e^{j169°20'}$ мА; $u_1 = 15{,}5\sin(\omega t + 177°40')$ В; $i_1 = 12{,}9\sin(\omega t + 169°20')$ мА; $\underline{U}_{y=20} = 3{,}4e^{j195°20'}$ В; $\underline{I}_{y=20} = 17{,}4e^{j259°20'}$ мА; $u_{y=20} = 4{,}8\sin(\omega t + 195°20')$ В; $i_{y=20} = 24{,}6\sin(\omega t + 259°20')$ мА. **9.16.** $\underline{U}_2 = 5{,}55e^{-j34°50'}$ В; $\underline{I}_2 = 5{,}55\times e^{-j34°50'}$ мА; $\underline{I}_1 = 6{,}05e^{j15°}$ мА; $u_2 = 7{,}83\sin(\omega t - 34°50')$ В; $i_2 = 7{,}83\sin(\omega t - 34°50')$ мА; $i_1 = 8{,}55\sin(\omega t + 15°)$ мА. **9.17.** $\underline{U}_1 = 2{,}74e^{j167°}$ В; $u_1 = 3{,}88\sin(\omega t + 167°)$ В; $\underline{I}_1 = 11{,}07e^{j177°40'}$ мА; $i_1 = 15{,}6\sin(\omega t + 177°40')$ мА; $\underline{Z}_{1x} = 1210e^{j8°20'}$ Ом; $\underline{Z}_{1k} = 248e^{-j10°40'}$ Ом. **9.18.** $\underline{U}_1 = 16{,}6e^{j2°30'}$ В; $\underline{I}_1 = 31e^{j4°50'}$ мА; $U_{пр1} = 16{,}8e^{j3°15'}$ В; $\underline{U}_{обр1} = 0{,}6e^{-j132°20'}$ В. **9.20.** При согласованной нагрузке $u_{2пр} = 4{,}33\sin(\omega t + 132°50') + 2{,}16\sin(2\omega t - 95°)$ В; при холостом ходе $u_2 = 9{,}8\sin(\omega t + 122°30') + 4{,}32\sin(2\omega t + 143°30')$ В. **9.21.** $\underline{U}_2 = 4{,}33e^{-j686}$ В; $\underline{I}_2 = 2{,}58e^{-j686}$ мА; $\underline{I}_1 = 5{,}98$ мА; $P_2 = 11{,}2$ мВт; $P_1 = 59{,}8$ мВт. **9.22.** $\underline{Z}_{1т} = \underline{Z}_{3т} = 2{,}61e^{j40°36'}$ Ом; $\underline{Z}_{2т} = 1{,}96e^{-j1°20'}$ Ом. **9.25.** $\underline{Z}_в = 615e^{-j13°20'}$ Ом; $\underline{\gamma} = (4{,}9 + j18{,}1)\cdot 10^{-3}$ км$^{-1}$; $R_0 = 5{,}4$ Ом/км; $L_0 = 2$ мГн/км; $C_0 = 6\cdot 10^{-9}$ Ф/км; $G_0 = 1\cdot 10^{-6}$ См/км. **9.27.** $p_{ap_1} = 18{,}2$ дБ; $p_{aU_1} = 22{,}2$ дБ; $p_{aI_1} = 14{,}2$ дБ; $p_{ap_н} = 13{,}8$ дБ; $p_{aU_н} = 17{,}8$ дБ; $p_{aI_н} = 9{,}8$ дБ; $p_p = p_U = p_I = -4{,}4$ дБ. **9.29.** 0,173 мА. **9.31.** $u_1 = 10\sin(\omega t - 108°45')$ мВ; $i_1 = 21{,}3\sin(\omega t - 108°45')$ мкА; $p_н = 0$; $k_{бв} = 1$. **9.35.** $\underline{Z}_1 = 141e^{-j45°}$ Ом; $\underline{I}_1 = 71$ мА. **9.36.** 0,081 В. **9.39.** $C_{эк} = 27{,}6$ пФ; $L_{эк} = 0{,}276$ мкГн.

К главе 10

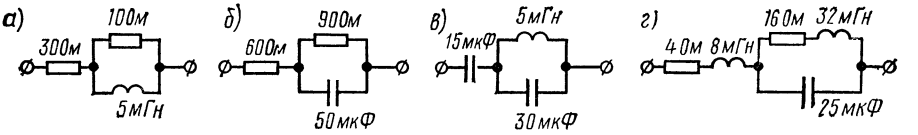
10.1. Для вариантов 2, 3, 4 и 6: $L = 1{,}8$ мГн; $C = 0{,}5$ мкФ; для вариантов 1 и 5: $L = 3{,}6$ мГн; $C = 1$ мкФ. Эквиваленты 2 и 3, 4 и 6; обратны 1 и 5; 2 и 3 обратны 4 и 6. **10.2.** а) $5\cdot 10^3$ с$^{-1}$; б) $5\cdot 10^3$ с$^{-1}$; в) $3{,}54\cdot 10^3$ с$^{-1}$ и $5\cdot 10^3$ с$^{-1}$; г) $2{,}5\cdot 10^4$ с$^{-1}$; $5\cdot 10^4$ с$^{-1}$.

10.4.



К ответу задачи 10.4

10.5.



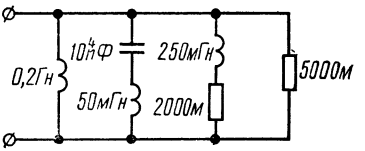
К ответу задачи 10.5

10.6. а) 500 Ом; б) 500 Ом. **10.7.** $Z(p) = \dfrac{p^3L_1L_2C + p^2(L_2R_1 + L_1R_2) + }{p^2CL_2 + pCR_2 + 1}$

$\dfrac{+ p(R_1R_2C + L_1 + L_2) + R_1 + R_2}{p^2CL_2 + pCR_2 + 1}$; $a_3 = CL_1L_2$; $a_2 = C(L_2R_1 + L_1R_2)$; $a_1 =$

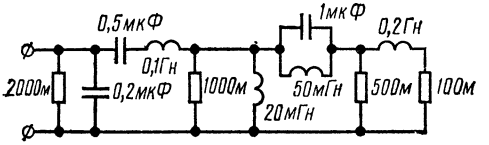
$= R_1R_2C + L_1 + L_2$; $a_0 = R_1 + R_2$; $b_2 = CL_2$; $b_1 = CR_2$; $b_0 = 1$.

10.9.



К ответу задачи 10.9

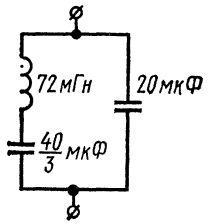
10.10.



К ответу задачи 10.10

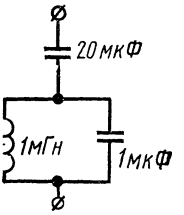
10.12.

а) Класс III



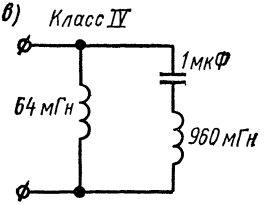
$$\underline{Z} = \frac{5 \cdot 10^4}{j\omega} \cdot \frac{1020^2 - \omega^2}{2550^2 - \omega^2};$$

б) Класс III



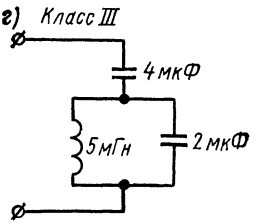
$$\underline{Z} = \frac{1{,}05 \cdot 10^6}{j\omega} \cdot \frac{6900^2 - \omega^2}{31600^2 - \omega^2};$$

в) Класс IV



$$\underline{Z} = j\omega 60 \cdot 10^{-3} \frac{1020^2 - \omega^2}{990^2 - \omega^2};$$

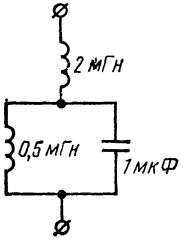
г) Класс III



$$\underline{Z} = \frac{0{,}75 \cdot 10^6}{j\omega} \cdot \frac{5780^2 - \omega^2}{10000^2 - \omega^2}.$$

К ответу задачи 10.12

10.14.



$$\underline{Z} = j\omega 2 \cdot 10^{-3} \frac{50000^2 - \omega^2}{44600^2 - \omega^2}.$$

К ответу задачи 10.14

10.16. 1,13 пФ; класс IV. $\underline{Z} = j\omega 222 \cdot 10^{-6} \dfrac{2{,}22 \cdot 10^{15} - \omega^2}{9{,}85 \cdot 10^{14} - \omega^2}$. **10.17.** $C_1 = 0{,}3$ мкФ; $C_2 = 0{,}15$ мкФ; $L = 133$ мГн. **10.19.** 1) $R(\omega) = \dfrac{\omega^2 L^2 R}{R^2 + (\omega^2 L^2)}$; $X(\omega) = -\dfrac{\omega L R^2}{R^2 + \omega^2 L^2}$; $Z(\omega) = \dfrac{\omega L R}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}}$; $\varphi(\omega) = 90^\circ - \operatorname{arctg} \omega L/R$.

2) $R(\omega) = \dfrac{R}{1 + (\omega CR)^2}$; $X(\omega) = \dfrac{\omega C R^2}{1 + (\omega CR)^2}$; $\underline{Z}(\omega) = \dfrac{R}{\sqrt{1 + (\omega CR)^2}}$; $\varphi(\omega) = -\operatorname{arctg} \omega CR$.

К главе 11

11.2. $\underline{Y}_{11} = (2 + j4) \cdot 10^{-3}$ См; $\underline{Y}_{12} = \underline{Y}_{21} = -(4 + j8) \cdot 10^{-3}$ См; $\underline{Y}_{22} = (8 + j6) \cdot 10^{-3}$ См; $\underline{Z}_{11} = (100 + j200)$ Ом; $\underline{Z}_{12} = \underline{Z}_{21} = 200$ Ом; $\underline{Z}_{22} = j100$ Ом; $\underline{H}_{11} = (100 - j200)$ Ом; $\underline{H}_{12} = -\underline{H}_{21} = 2$; $\underline{H}_{22} = -j0{,}05$ См; $\underline{F}_{11} = (2 - j4) \times 10^{-3}$ См; $\underline{F}_{12} = -(0{,}8 + j4) = -\underline{F}_{21}$; $\underline{F}_{22} = (80 - j60)$ Ом. **11.3.** $\underline{A}_{11} = 3{,}26e^{-j10^\circ 37'}$; $\underline{A}_{12} = 36{,}1e^{j56^\circ 20'}$ Ом; $\underline{A}_{21} = 6{,}32 \cdot 10^{-2} e^{-j71^\circ 35'}$ См; $\underline{A}_{22} = 1$; $\underline{Z}_{11} = 51{,}6e^{j60^\circ 58'}$ Ом; $\underline{Z}_{12} = \underline{Z}_{21} = \underline{Z}_{22} = 15{,}83e^{j71^\circ 35'}$ Ом; $\underline{Y}_{11} = 2{,}77 \times 10^{-3} e^{-j56^\circ 20'}$ См; $\underline{Y}_{12} = \underline{Y}_{21} = 2{,}77 \cdot 10^{-2} e^{j123^\circ 40'}$ См; $\underline{Y}_{22} = 9{,}03 \cdot 10^{-2} \times e^{-j66^\circ 57'}$ См. **11.4.** $\underline{Z}_{1т} = (10 + j40)$ Ом; $\underline{Z}_{2т} = -j100$ Ом; $\underline{Z}_{3т} = (20 + j50)$ Ом; $\underline{Z}_{1п} = (17 + j72)$ Ом; $\underline{Z}_{2п} = (20{,}3 - j136)$ Ом; $\underline{Z}_{3п} = (0{,}235 - j17{,}9)$ Ом. **11.5.** $\underline{A}_{11} = 1{,}66 - j0{,}106$; $\underline{A}_{12} = (9{,}76 + j56)$ Ом; $\underline{A}_{21} = -j0{,}053$ См; $\underline{A}_{22} = 2{,}39 - j0{,}159$. **11.6.** $\underline{Z}_{1т} = 37{,}6e^{j86^\circ 55'}$ Ом; $\underline{Z}_{2т} = 47{,}1e^{j86^\circ 22'}$ Ом; $\underline{Z}_{3т} = 15{,}7e^{j82^\circ 40'}$ Ом. **11.7.** $\underline{A}_{11} = 2 + j6$; $\underline{A}_{12} = (65 + j10)$ Ом; $\underline{A}_{21} = 0{,}2$ См; $\underline{A}_{22} = 1 - j2$. **11.8.** $\underline{Z}_{1х} = (100 + j200)$ Ом; $\underline{Z}_{2х} = j100$ Ом; $\underline{Z}_{1к} = (100 - j200)$ Ом; $\underline{Z}_{2к} = (80 - j60)$ Ом. **11.9.** $\underline{Z}_{1х} = 51{,}4e^{j60^\circ 58'}$ Ом; $\underline{Z}_{1к} = 36{,}1e^{j56^\circ 20'}$ Ом; $\underline{Z}_{2х} = 15{,}83e^{j71^\circ 35'}$ Ом; $\underline{Z}_{2к} = 11{,}12e^{j66^\circ 57'}$ Ом. **11.10.** $\underline{A}_{11} = 1 - j3$; $\underline{A}_{12} = (-30 - j20)$ Ом; $\underline{A}_{21} = -j0{,}1$ См; $\underline{A}_{22} = -1$. **11.11.** $\underline{A}_{11} = j2$; $\underline{A}_{12} = j25$ Ом; $\underline{A}_{21} = j0{,}2$ См. **11.12.** $\underline{Z}_{1вх} = (260 + j120)$ Ом; $\underline{Z}_{2вх} = (97{,}7 + j21{,}8)$ Ом. **11.14.** а) $\underline{A}_{11} = 12{,}87e^{-j20^\circ 11'}$; $\underline{A}_{12} = 153{,}2e^{j48^\circ 10'}$ Ом; $\underline{A}_{21} = 0{,}268e^{-j79^\circ 42'}$ См; $\underline{A}_{22} = 3{,}26e^{-j10^\circ 37'}$; б) $\underline{A}_{11} = \underline{A}_{22} = 5{,}54e^{-j12^\circ 32'}$; $\underline{A}_{12} = 235e^{j45^\circ 40'}$ Ом; $\underline{A}_{21} = 12{,}65 \cdot 10^{-2} e^{j71^\circ 35'}$ См; в) $\underline{A}_{11} = \underline{A}_{22} = 5{,}54e^{-j12^\circ 32'}$; $\underline{A}_{12} = 72{,}2e^{j56^\circ 17'}$ Ом; $\underline{A}_{21} = 0{,}412e^{-j82^\circ 12'}$ См. **11.15.** $\underline{A}_{11} = -0{,}25 + j1{,}25$; $\underline{A}_{12} = (-25 + j175)$ Ом; $\underline{A}_{21} = (25 + j75) \cdot 10^{-4}$ См; $\underline{A}_{22} = 0{,}25 + j0{,}25$. **11.16.** а) $\underline{A}_{11} = 1 - j0{,}5$; $\underline{A}_{12} = (100 - j200)$ Ом; $\underline{A}_{21} = -j0{,}0025$ См; $\underline{A}_{22} = 0{,}5$; б) $\underline{A}_{11} = 1 - j0{,}5$; $\underline{A}_{12} = (25 - j50)$ Ом; $\underline{A}_{21} = -j0{,}01$ См; $\underline{A}_{22} = 0{,}5$; в) и г) $\underline{A}_{11} = \underline{A}_{12} = \underline{A}_{21} = \underline{A}_{22} = \infty$. **11.17.** а) $\underline{A}_{11а} = \underline{A}_{11}$; $\underline{A}_{12а} = \underline{A}_{12}$; $\underline{A}_{21а} = \dfrac{\underline{A}_{11}}{\underline{Z}} + \underline{A}_{21}$; $\underline{A}_{22а} = \dfrac{\underline{A}_{12а}}{\underline{Z}} + \underline{A}_{22}$; б) $\underline{A}_{11б} = \underline{A}_{11} + \dfrac{\underline{A}_{12}}{\underline{Z}}$; $\underline{A}_{12б} = \underline{A}_{12}$; $\underline{A}_{21б} = \underline{A}_{21} + \dfrac{\underline{A}_{22}}{\underline{Z}}$; $\underline{A}_{22б} = \underline{A}_{22}$; в) $\underline{A}_{11в} = \underline{A}_{11} + \underline{Z}\,\underline{A}_{21}$; $\underline{A}_{12в} = \underline{A}_{12} + \underline{Z}\,\underline{A}_{22}$; $\underline{A}_{21в} = \underline{A}_{21}$; $\underline{A}_{22в} = \underline{A}_{22}$; г) $\underline{A}_{11г} = \underline{A}_{11}$; $\underline{A}_{12г} = \underline{A}_{12} + \underline{Z}\,\underline{A}_{11}$; $\underline{A}_{21г} = \underline{A}_{21}$; $\underline{A}_{22г} = \underline{A}_{22} + \underline{Z}\,\underline{A}_{21}$. **11.18.** $\underline{A}_{11} = 1{,}625 - j1{,}75$; $\underline{A}_{12} = (125 - j100)$ Ом; $\underline{A}_{21} = 25 \times$

$\times 10^{-4}(1-j2)$ См; $\underline{A}_{22}=0{,}5$. **11.19.** а) $\underline{A}_{11}=0{,}5-j0{,}25$; $\underline{A}_{12}=(100-$ $-j200)$ Ом; $\underline{A}_{21}=-j0{,}0025$ См; $\underline{A}_{22}=1$; б) $\underline{A}_{11}=0{,}5-j0{,}25$; $\underline{A}_{12}=(25-$ $-j50)$ Ом; $\underline{A}_{21}=-j0{,}01$ См; $\underline{A}_{22}=1$. **11.21.** $\underline{Z}_{1c}=43{,}1e^{j58°40'}$ Ом; $\underline{Z}_{2c}=$ $=13{,}2e^{j69°20'}$ Ом; $\underline{\Gamma}=1{,}2-j0{,}111$. **11.23.** $\underline{A}_{11}=\underline{A}_{22}=1{,}74e^{-j26°20'}$; $\underline{A}_{12}=$ $=1{,}09\cdot 10^{3}e^{-j32°}$ Ом; $\underline{A}_{21}=2{,}35\cdot 10^{-3}e^{-j38°50'}$ См. **11.24.** $\underline{Z}_{н1}=224e^{j26°30'}$ Ом; $\underline{Z}_{н2}=100$ Ом. **11.25.** 224 Ом. **11.26.** 10 Ом. **11.28.** Одно из сопротивлений П-образной схемы имеет отрицательный знак действительной части. **11.29.** $Z_a=$ $=\underline{Z}_{1т}$; $\underline{Z}_B=\underline{Z}_{1т}+2\underline{Z}_{2т}$. **11.32.** $\underline{p}_{11}=0{,}74e^{-j106°40'}$; $\underline{p}_{и}=0{,}87e^{-j166°20'}$; $\underline{Z}_{1вх}=42{,}5e^{j51°10'}$ Ом; $\dfrac{(Z_{1в}-Z_{1c})}{Z_{1c}}100\%=1{,}4\%$; $\dfrac{\varphi_{1вх}-\varphi_{1c}}{\varphi_k}100\%=$ $=12{,}8\%$; $A_{эхо}=1{,}44$ дБ; $A_{вн}=-0{,}56$ дБ; $A_р=-0{,}29$ дБ; $T_U=$ $=0{,}175e^{-j24°50'}$; $T_I=0{,}7e^{j24°50'}$. **11.33.** $\underline{Z}_{1вх}=\sqrt{\dfrac{\underline{A}'_{12}}{\underline{A}'_{21}}}=$

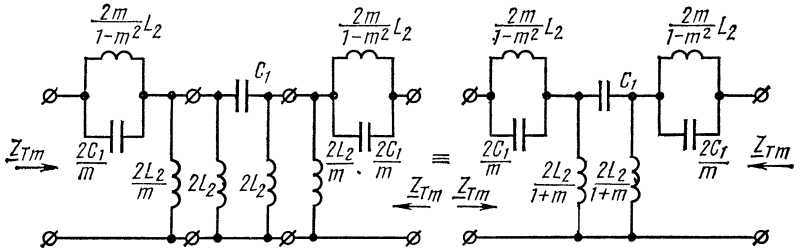
$=\sqrt{\dfrac{\underline{A}''_{12}}{\underline{A}''_{21}}}$; $T_U=T_I=\dfrac{1}{\left(\underline{A}'_{11}+\sqrt{\underline{A}'_{12}\underline{A}'_{21}}\right)^2}=\dfrac{1}{\left(\underline{A}''_{11}+\sqrt{\underline{A}''_{12}\underline{A}''_{21}}\right)^2}$.

11.34. $A_р=21{,}8$ дБ; $A_{вн}=21{,}6$ дБ. **11.35.** $A_р=2$ дБ; $A_{вн}=-12{,}1$ дБ. **11.36.** Для Т-схемы: $R_1=462$ Ом; $R_2=425$ Ом; для П-схемы: $R_1=587{,}5$ Ом; $R_2=540$ Ом; для Т-образно-мостовой: $R_1=500$ Ом; $R_2=291$ Ом; $R_3=860$ Ом. **11.37.** $\underline{Z}_т=454$ Ом; $A=8{,}6$ дБ. **11.40.** $\sigma=0{,}0259$; $R_1=513$ Ом; $L_1=15{,}6$ Гн; $n=0{,}316$; $R_2=51{,}3$ Ом; $L_2=1{,}56$ Гн. **11.41.** $n=0{,}73$; $L_1=0{,}844$ Гн; $L_2=1{,}585$ Гн; $C_2=7$ мкФ. **11.52.** $\underline{Y}_4=\underline{Y}_{21}-\underline{Y}_{12}$. **11.53.** $Z_{11б}=215$ Ом; $Z_{12б}=200$ Ом; $Z_{21б}=1{,}9\cdot 10^6$ Ом; $Z_{22б}=2\cdot 10^6$ Ом. **11.58.** $A_{11э}=-0{,}56\cdot 10^{-3}$; $A_{12э}=-62{,}1$ Ом; $A_{21э}=-1{,}03\cdot 10^{-6}$ См; $A_{22э}=-0{,}031$; $Z_{вх}=1900$ Ом; $T_U=495$. **11.59.** а) да; б) нет; в) да; г) нет; д) да; е) нет. **11.60.** б) нет; в) нет; г) да. **11.61.** а) нет; б) да; в) да; г) нет.

К главе 12

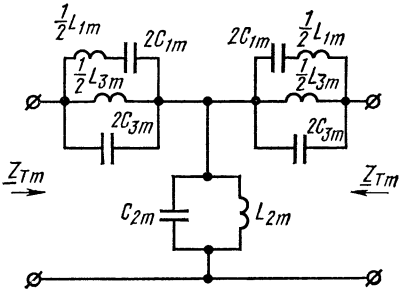
12.1. Схема рис. 12.6, *б* — полосовой фильтр; $\omega_1=1{,}58\cdot 10^4$ с$^{-1}$; $\omega_b=$ $=2\cdot 10^4$ с$^{-1}$; схема рис. 12.6, *в* — полосовой фильтр; $\omega_a=10^4$ с$^{-1}$; $\omega_в=$ $=1{,}1\cdot 10^4$ с$^{-1}$. **12.5.** $f_c=56{,}5$ Гц. **12.6.** $L_1/2=0{,}03$ Гн; $C_2=0{,}167$ мкФ. **12.7.** $f_c=3200$ Гц; $L_1=0{,}06$ Гн; $C_2=0{,}167$ мкФ. **12.11.** $f_c=212$ Гц; 2,64 Нп. **12.12.** $L_2=0{,}159$ Гн; $C_1=0{,}159$ мкФ; 2,64 Нп. **12.13.** $f_c=940$ Гц; $L_2=0{,}424$ Гн; $C_1=0{,}017$ мкФ. **12.15.** $A=3{,}8$ Нп. **12.16.** $L_1=1{,}24$ мГн; $L_2=15{,}9$ мГн; $C_1=44{,}3$ нФ; $C_2=3{,}45$ нФ; $A=3{,}73$ Нп. **12.18.** $f_c=3200$ Гц; $A=1{,}57$ Нп. **12.20.** $m=0{,}59$; $2C_{1m}=91{,}5$ нФ; $2L_{2m}=33$ мГн; $C_{2m}/2=49$ нФ.

12.21. $A=4{,}3$ Нп.



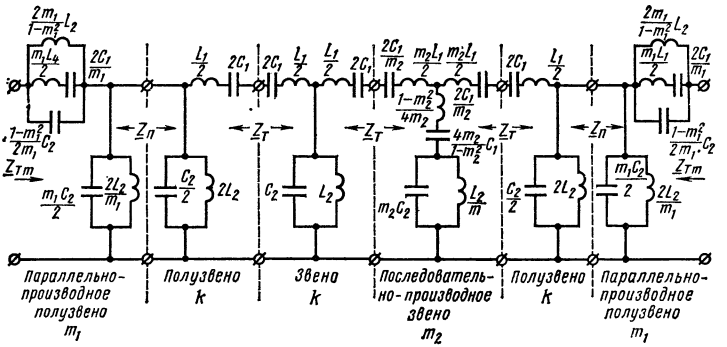
К ответу задачи 12.21

12.22. В схемах *б*, *в*, *д* и *е* соединение осуществлено по принципу согласования характеристических сопротивлений; в схемах *а* и *г* согласования нет. 12.24. $L_{1m}/2 = 0{,}469$ мГн; $2C_{1m} = 12{,}3$ пФ; $L_{3m}/2 = 6{,}6$ мкГн; $2C_{3m} = 0{,}875$ нФ; $L_{2m} = 6{,}15$ мкГн; $C_{2m} = 0{,}938$ нФ; $A = 1{,}36$ Нп (см. рис. к ответу).



К ответу задачи 12.24

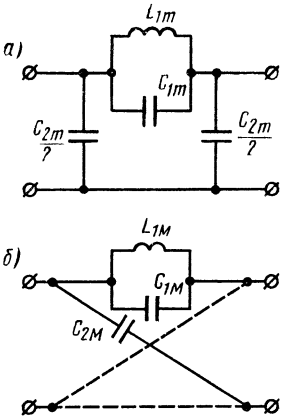
12.25.



К ответу задачи 12.25

12.26. $f_{1\infty} = 10{,}67$ кГц; $f_{2\infty} = 18{,}73$ кГц; $A = 1{,}386$ Нп. 12.28. Схема рис. 12.24, *в* соответствует ФВЧ; схема рис. 12.24, *г* — ПЗФ. 12.31. Для схемы рис. 12.24, *а* см. решение задачи 12.28; схема рис. 12.24, *б*: ФНЧ; $\omega_c = 9{,}55 \cdot 10^4$ с$^{-1}$; схема рис. 12.24, *в*: ФНЧ; $\omega_c = 1{,}12 \cdot 10^5$ с$^{-1}$; схема рис. 12.24, *г*: ПЗФ; $\omega_{2c} = 0{,}79 \cdot 10^5$ с$^{-1}$; $\omega_{1c} = 1{,}12 \cdot 10^5$ с$^{-1}$. 12.32. Выражение ослабления $\left.\begin{matrix} \text{th}\,\dfrac{A}{2} \\ \text{cth}\,\dfrac{A}{2} \end{matrix}\right\} = \sqrt{\left| -\omega^2 \dfrac{L_4}{L_1} \dfrac{\omega_3^2 - \omega^2}{(\omega_2^2 - \omega^2)^2} \right|}$, частота $\omega_\infty = 8{,}55 \times$ $\times 10^4$ с$^{-1}$. При частотах $\omega < \omega_\infty$ имеет место соотношение $Z_1 < Z_2$; при этом следует пользоваться выражением $\text{th}\,A/2$. При частотах $\omega > \omega_\infty$ ($Z_1 > Z_2$) — выражением $\text{cth}\,A/2$. При ω' $A' = 1{,}58$ Нп; при ω'' $A'' = 3{,}57$ Нп.

12.35. См. рис. к ответу.

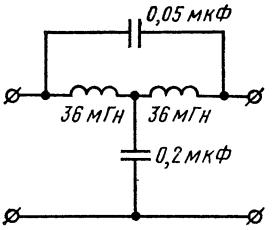


К ответу задачи 12.35

К главе 13

13.3. $R_1 = 600$ Ом; $C = 25{,}5$ нФ; $R_2 = 3267$ Ом; ослабление при 0,3 и 4 кГц; $A_{300} = 0{,}1$ дБ; $A_{4000} = 2{,}7$ дБ. **13.7.** При выборе схемы рис. 13.2, *а*: 1) $R_1 = 450$ Ом; $C_1 = 74{,}86$ мкФ; $R_2 = 800$ Ом; $L_2 = 27$ мГн; $\Delta A_{к\,max} = 0{,}5$ дБ при $f = 10$ кГц. 2) $R_1 = 472$ Ом; $C_1 = 75{,}35$ мкФ; $R_2 = 763$ Ом; $L_2 = 27{,}1$ мГн; $\Delta A_{к\,max} = 0{,}5$ дБ при $f = 10$ кГц. **13.9.** При выборе схемы рис. 13.2, *в*: 1) $R_1 = 3400$ Ом; $L_1 = 19{,}7$ мГн; $C_1 = 0{,}046$ мкФ; $R_2 = 106$ Ом; $L_2 = 16{,}5$ мГн; $C_2 = 0{,}057$ мкФ. 2) $R_1 = 3180$ Ом; $L_1 = 18{,}4$ мГн; $C_1 = 0{,}049$ мкФ; $R_2 = 113$ Ом; $L_2 = 17{,}6$ мГн; $C_2 = 0{,}051$ мкФ. 3) $R_1 = 3400$ Ом; $L_1 = 17{,}1$ мГн; $C_1 = 0{,}047$ мкФ; $R_2 = 106$ Ом; $L_2 = 17$ мГн; $C_2 = 0{,}048$ мкФ.

13.14.

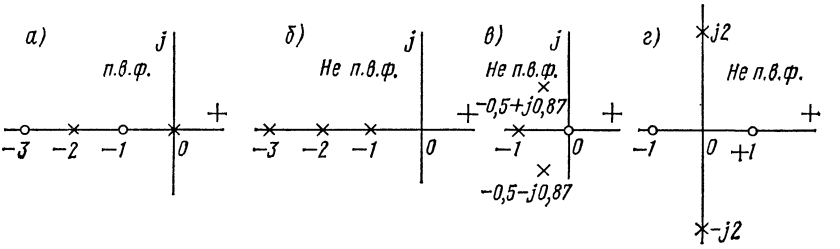


К ответу задачи 13.14

К главе 14

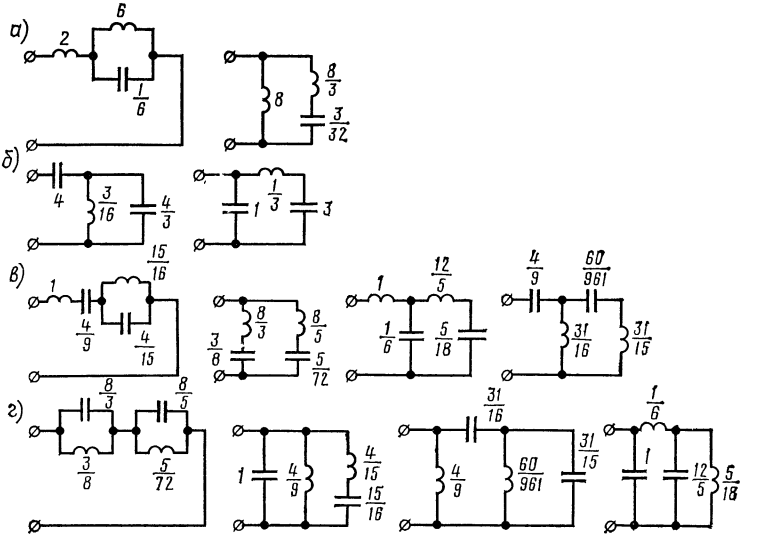
14.3. а) Не п. в. ф., так как наибольшие степени p числителя и знаменателя отличаются более чем на единицу (см. п.2, *б* основных положений); б) не п. в. ф., так как на мнимой оси имеются кратные полюсы в точках $\pm j1$ (см. п.2, в основных положениях), в) не п.в.ф., так как вещественная часть $F_3(j\omega)$ на мнимой оси отрицательна при $0{,}707 < \omega < 1$. **14.4.** Пункты б) и в) не п. в. ф., так как наибольшие степени p в числителе и знаменателе отличают-

ся более чем на единицу; пункт г) не п. в. ф., так как имеется нуль в правой полуплоскости



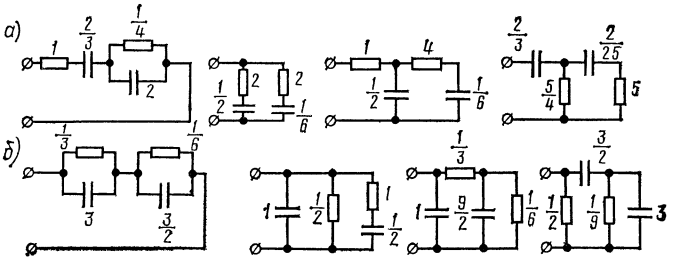
К ответу задачи 14.4

14.6.



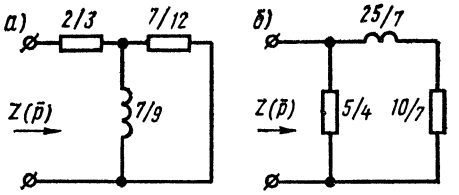
К ответу задачи 14.6

14.8.



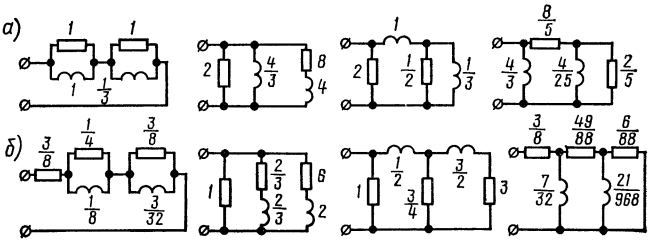
К ответу задачи 14.8

14.9.



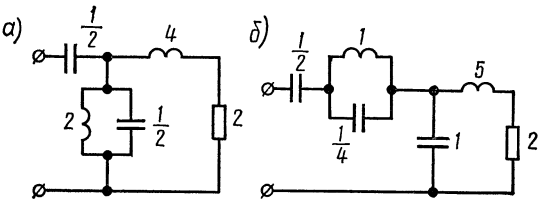
К ответу задачи 14.9

14.10.



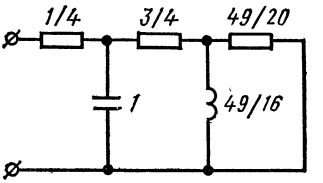
К ответу задачи 14.10

14.12.



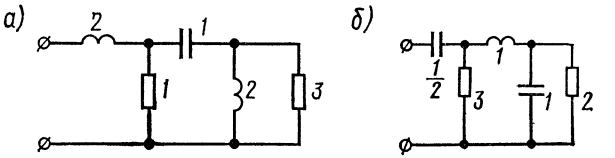
К ответу задачи 14.12

14.14.



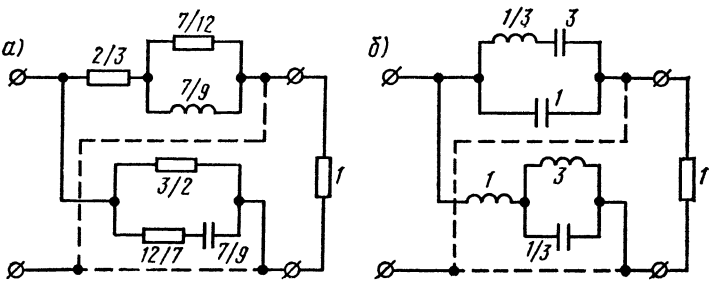
К ответу задачи 14.14

14.15.



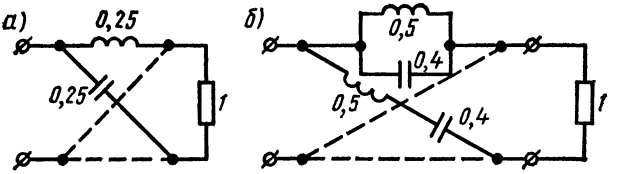
К ответу задачи 14.15

15.2.



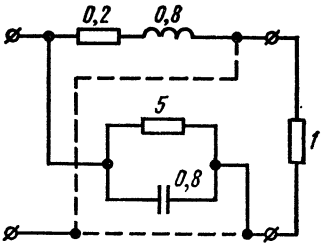
К ответу задачи 15.2

15.4.



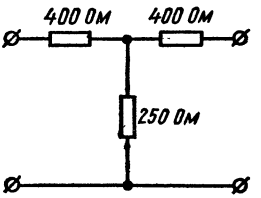
К ответу задачи 15.4

15.5.

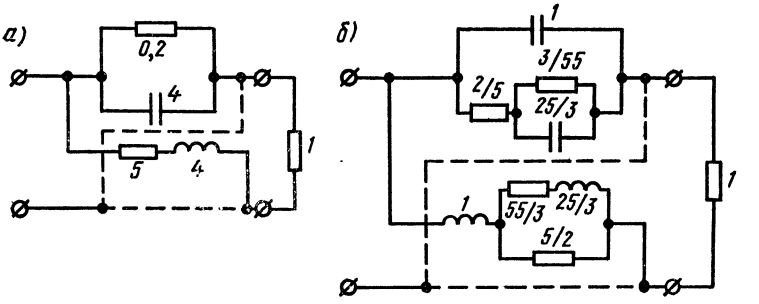


К ответу задачи 15.5

15.6.



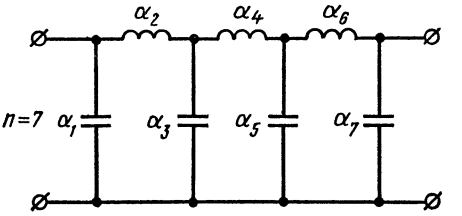
К ответу задачи 15.6



К ответу задачи 15.8

К главе 16

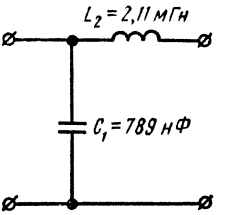
16.3. См. рис.



К ответу задачи 16.3

16.6. $L_1 = 6{,}57$ мГн; $L_2 = 8{,}39$ мГн; $L_3 = 6{,}57$ мГн; $C_2 = 15{,}56$ нФ; $C_1' = 11{,}3$ нФ; $C_2' = 8{,}86$ нФ; $C_3' = 11{,}3$ нФ; $L_2' = 4{,}79$ мГн. **16.7.** $C_1 = 60{,}9$ нФ; $C_2 = 35{,}0$ нФ; $C_3 = 33{,}0$ нФ; $L_2 = 0{,}359$ мкГн; $L_1' = 27{,}7$ мкГн; $L_2' = 48{,}2$ мкГн; $L_3' = 51{,}2$ мкГн; $C_2' = 4{,}7$ мкФ.

16.9. См. рис.



К ответу задачи 16.9

Приложение 1

Переход от алгебраической формы комплексного числа к показательной и обратный переход с помощью логарифмической линейки

Если комплексное число $\underline{A}$ задано в алгебраической форме

$$\underline{A} = A' + jA'',$$

то его аргумент α и модуль R определяются по формулам

$$\operatorname{tg}\alpha = A''/A'; \qquad (\text{П1.1})$$

$$R = A''/\sin\alpha = A'\cos\alpha, \qquad (\text{П1.2})$$

тогда

$$\underline{A} = A' + jA'' = Ae^{j\alpha}. \qquad (\text{П1.3})$$

Проще всего находить α и A с помощью логарифмической линейки. При этом надо иметь в виду, что на шкале тангенсов нанесены углы только до 45°. Поэтому надо различать следующие случаи:

1) $A' > 0$, $A'' > 0$ и $A''/A' \leqslant 1$; в этом случае угол α находится на шкале тангенсов;

2) $A' > 0$, $A'' > 0$ и $A''/A' > 1$; в этом случае на шкале тангенсов находится угол $(90° - \alpha)$, так как $\operatorname{tg}(90° - \alpha) = A'/A'' \leqslant 1$;

3) одно из чисел A' или A'' (или оба) отрицательно; предварительно определяем, в какой четверти лежит α. Затем, найдя на линейке острый угол, тангенс которого равен $|A''|/|A'|$, по известным из тригонометрии формулам приведения определяем угол α.

Для выполнения указанных операций нужно движок линейки перевернуть так, чтобы шкала синусов и тангенсов оказалась снаружи.

Рассмотрим несколько типичных случаев.

Пример 1. $\underline{A}_1 = 26 + j11$.

Р е ш е н и е. Устанавливаем волосок над меньшим числом 11 на основной нижней шкале и делим его на 26, для этого движок передвигаем до тех пор, пока его конец не станет под числом 26. Тогда на шкале тангенсов под волоском найдем $\alpha = 22°55'$.

Для определения модуля по формуле (П1.2) передвигаем движок до тех пор, пока под волосок не попадет угол в 22°55′, нанесенный на шкале синусов. Тогда под концом движка на основной шкале найдем $R = 28{,}2$.

Итак,

$$\underline{A} = 26 + j11 = 28{,}2e^{j22°55'}.$$

Пример 2. $\underline{A}_2 = 4 + j7$.

Р е ш е н и е. Деля, как и в первом примере, меньшее число 4 на большее 7, найдем на шкале тангенсов угол 29°45′. Так как $A'' > A'$, то $\alpha = 90° - 29°45' = 60°15'$.

Передвигаем движок и устанавливаем под волоском угол в 29°45′ со шкалы синусов. На основной шкале найдем $R = 8{,}06$.

Таким образом,

$$\underline{A}_2 = 4 + j7 = 8{,}06e^{j60°15'}.$$

Пример 3. $\underline{A}_3 = 382 + j28$.

Р е ш е н и е. Так как $28/382 < 0{,}1$, то угол меньше 5°45′ ($\mathrm{tg}5°45' \approx \approx \sin 5°45' \approx 0{,}1$) и находится на средней шкале (где обозначено S и T). Деля меньшее число 28 на 382, на этой шкале найдем $\alpha = 4°12'$.

Так как для углов меньше 5°45′ $\mathrm{tg}\alpha \approx \sin\alpha$, то модуль равен 382.

Итак,

$$\underline{A}_3 = 382 + j28 = 382e^{j4°12'}.$$

Пример 4. $\underline{A}_4 = 110 - j90$.

Р е ш е н и е. Угол α лежит в четвертой четверти; так как $A'' < A'$, то по абсолютной величине он меньше 45°. Деля меньшее число 90 на 110, найдем угол 39°20′. Следовательно, $\alpha = -39°20'$. Модуль находят, как и в предыдущих примерах:

$$\underline{A}_4 = 110 - j90 = 142e^{-j39°20'}.$$

Пример 5. $\underline{A}_5 = -8 + j13$.

Р е ш е н и е. Угол α лежит во второй четверти. Так как $13/8 > 1$, что $\alpha < 135°$ ($\mathrm{tg}\,135° = -1$. Следовательно, $\alpha = 90° +$ угол, найденный на линейке.

Деля меньшее число 8 на 13, найдем угол 31°35′;

$$\alpha = 90° + 31°35' = 121°35'.$$

Таким образом, $\underline{A}_5 = -8 + j13 = 15{,}3e^{j121°35'}$.

Рассмотрим, как выполнить обратный переход от показательной формы к алгебраической.

Пример 6. $\underline{A}_6 = 74e^{j28°} = 74\cos 28° + j\,74\sin 28°$.

Р е ш е н и е. Устанавливаем волосок над числом 74 на нижней основной шкале и совмещаем с этим числом конец движка. Умножая 74 на $\cos 28° = \sin 62°$ (для чего устанавливаем волосок на 62° шкалы синусов), получим $74\cos 28° = \approx 74\sin 62° = 65{,}3$.

Умножая 74 на $\sin 28°$, для чего нужно только передвинуть бегунок так, чтобы под волоском оказалось 28° шкалы синусов, получим $74\sin 28° = 34{,}7$.

Следовательно, $\underline{A}_6 = 74e^{j28°} = 65{,}3 + j34{,}7$.

Приложение 2

Расчет гиперболических функций от комплексного аргумента

При расчете четырехполюсников, фильтров, длинных линий приходится определять значения гиперболических синуса, косинуса и тангенса от комплексного аргумента $\underline{\Gamma} = A + jB$. Для вычисления этих функций можно использовать приведенные далее два способа расчета. При этом следует иметь в виду, что при вычислении по формулам $\mathrm{sh}\,(A + jB) = Se^{j\varphi_s}$, $\mathrm{ch}\,(A + jB) = Ce^{j\varphi_c}$ углы φ_s и φ_c находятся в тех же четвертях окружности, что и угол B, причем для нечетных четвертей окружности $\varphi_s \geqslant B \geqslant \varphi_c$, а угол $\varphi_t > 0$; для четных четвертей окружности $\varphi_s \leqslant B \leqslant \varphi_c$, а угол $\varphi_t < 0$.

Пример 1. Найти $\mathrm{sh}\,(0{,}65 + j1{,}334)$; $\mathrm{ch}\,(0{,}65 + j1{,}334)$; $\mathrm{th}\,(0{,}65 + j1{,}334)$.

Р е ш е н и е. Здесь $A = 0{,}65$ Нп, $B = 1{,}334$ рад или так как 1 рад = 57,3°, то $B = 1{,}334 \cdot 57{,}3° = 76{,}5° = 76°30'$, т. е. угол лежит в первой четверти.

По таблицам функций действительного аргумента находим используемые в дальнейших расчетах $\mathrm{sh}\,A = \mathrm{sh}\,0{,}65 = 0{,}697$; $\mathrm{ch}\,A = 0{,}65 = 1{,}219$; $\sin B = = 1{,}334 = \sin 76°30' = 0{,}972$; $\cos B = \cos 76°30' = 0{,}233$; $\mathrm{sh}\,2A = \mathrm{sh}\,1{,}30 = 1{,}698$; $\mathrm{ch}\,2A = \mathrm{ch}\,1{,}30 = 1{,}971$; $\sin 2B = \sin 2{,}668 = \sin 153° = 0{,}454$; $\cos 2B = = \cos 2{,}668 = -0{,}891$.

Расчет гиперболического синуса sh (0,65 + j1,334).

Способ 1. $\operatorname{sh}(A + jB) = \operatorname{sh} A \cdot \cos B + j \operatorname{ch} A \cdot \sin B = 0{,}697 \cdot 0{,}233 + j1{,}219 \cdot 0{,}972 = 0{,}163 + j1{,}185 = 1{,}196e^{j82°12'}$.

Способ 2. $S = \sqrt{0{,}5(\operatorname{ch} 2A - \cos 2B)} = \sqrt{0{,}5(1{,}971 + 0{,}891)} = 1{,}196;$

$$\operatorname{tg}\varphi_s = \frac{\operatorname{tg} B}{\operatorname{th} A} = \frac{\operatorname{tg} 76°30'}{\operatorname{th} 0{,}65} = \frac{4{,}165}{0{,}572} = 7{,}27, \quad \varphi_s = 82°12'.$$

Следовательно, $\operatorname{sh}(0{,}65 + j1{,}334) = 1{,}196e^{j82°12'}$.

Расчет гиперболического косинуса ch(0,65 + j1,334).

Способ 1. $\operatorname{ch}(A + jB) = \operatorname{ch} A \cos B + j \operatorname{sh} A \sin B = 1{,}219 \cdot 0{,}233 + j0{,}697 \cdot 0{,}972 = 0{,}284 + j0{,}677 = 0{,}735e^{j67°12'}$.

Способ 2. $C = \sqrt{0{,}5(\operatorname{ch} 2A + \cos 2B)} = \sqrt{0{,}5(1{,}971 - 0{,}891)} = 0{,}735,$ $\operatorname{g}\varphi_c = \operatorname{tg} B \cdot \operatorname{th} A = 4{,}165 \cdot 0{,}572 = 2{,}385$, $\varphi_c = 67°12'$.

Следовательно, $\operatorname{ch}(0{,}65 + j1{,}334) = 0{,}735e^{j67°12'}$.

Расчет гиперболического тангенса th (0,65 + j1,334).

Способ 1. $$\operatorname{th}(A + jB) = \frac{\operatorname{sh} 2A}{\operatorname{ch} 2A + \cos 2B} + j\,\frac{\sin 2B}{\operatorname{ch} 2A + \cos 2B} =$$

$$= \frac{1{,}696}{1{,}971 - 0{,}891} + j\,\frac{0{,}454}{1{,}971 - 0{,}891} = 1{,}57 + j0{,}42 = 1{,}628e^{j15°}.$$

Способ 2. $\operatorname{th}(A + jB) = Te^{j\varphi_T}$,

где $$T = \sqrt{\frac{\operatorname{ch} 2A - \cos 2B}{\operatorname{ch} 2A + \cos 2B}} = \sqrt{\frac{1{,}971 + 0{,}891}{1{,}971 - 0{,}891}} = 1{,}628;$$

$$\operatorname{tg}\varphi_T = \pm\,\frac{\sin 2B}{\operatorname{sh} 2A} = \frac{0{,}454}{1{,}698} = 0{,}268; \quad \varphi_t = 15^c.$$

Способ 3. $$\operatorname{th}(A + jB) = \frac{\operatorname{sh}(A + jB)}{\operatorname{ch}(A + jB)} = \frac{Se^{j\varphi_S}}{Ce^{j\varphi_C}} = \frac{1{,}196e^{j82°12'}}{0{,}735e^{j67°12'}} =$$

$= 1{,}628e^{j15°}$.

Согласно указанному ранее, так как угол B лежит в первой (нечетной) четверти, поэтому $\varphi_s = 82°12' > B = 76^c30' > \varphi_c = 67°12'$.

Пример 2. Найти sh (1,15 + j2,825); ch (1,15 + j2,825); th (1,15 + j2,825). Здесь $A = 1{,}15$ Нп; $B = 2{,}825$ рад $= 162^c$, т.е. угол B лежит во второй (четной) четверти.

По таблицам находим: sh 1,15 = 1,421; ch 1,15 = 1,737; sin 2,825 = 0,309; cos 2,825 = —0,951; sh 2,30 = 4,937; ch 2,30 = 5,037; sin 5,65 = —0,588; cos 5,65 = 0,809.

Расчет гиперболического синуса sh (1,15 + j2,825).

Способ 1. $\operatorname{sh}(1{,}15 + j2{,}825) = 1{,}421\,(-0{,}951) + 1{,}737 \cdot 0{,}309 =$

$= -1{,}351 + j\,0{,}536 = 1{,}454e^{j158°20'}$.

Способ 2. $S = \sqrt{0{,}5(5{,}037 - 0{,}809)} = 1{,}454;$

$$\operatorname{tg}\varphi_s = \frac{\operatorname{tg} 162^c}{\operatorname{th} 1{,}15} = \frac{-0{,}325}{0{,}818} = -0{,}397; \quad \varphi_s = 158°20';$$

$$\operatorname{sh}(1{,}15 + j2{,}825) = 1{,}454e^{j158°20'}.$$

Расчет гиперболического косинуса ch (1,15 + j2,825).

Способ 1. $\operatorname{ch}(1{,}15 + j2{,}825) = 1{,}737\,(-0{,}951) + j1{,}421 \cdot 0{,}309 =$

$= -1{,}652 + j0{,}439 = 1{,}71e^{j165°7'}$

Способ 2. $C = \sqrt{0{,}5\,(5{,}037 + 0{,}809)} = 1{,}710;$

$$\operatorname{tg}\varphi_c = \operatorname{tg} 162^\circ.\quad \operatorname{th} 1{,}15 = -0{,}325 \cdot 0{,}818 = -0{,}266;\quad \varphi_c = 165^\circ 7';$$

$$\operatorname{ch}(1{,}15 + j2{,}825) = 1{,}710 e^{j165^\circ 7'}.$$

Расчет гиперболического тангенса th (1,15 + j2,825).

Способ 1. $$\operatorname{th}(1{,}15 + j\,2{,}825) = \frac{\operatorname{sh} 2{,}30}{\operatorname{ch} 2{,}30 + \cos 5{,}65} + j\,\frac{5{,}65}{\operatorname{ch} 2{,}30 + \cos 5{,}65} = \frac{4{,}937}{5{,}037 + 0{,}809} + j\,\frac{-0{,}588}{5{,}037 + 0{,}809} = 0{,}843 -$$

$$- j\,0{,}100 = 0{,}850 e^{j6^\circ 47'}.$$

Способ 2. $$T = \sqrt{\frac{5{,}037 - 0{,}809}{5{,}037 + 0{,}809}} = 0{,}850;\quad \operatorname{tg}\varphi_t = \frac{-0{,}588}{4{,}937} =$$

$$= -1{,}119,\quad \varphi_t = -6^\circ 47'.$$

Способ 3. $$\operatorname{th}(1{,}15 + j\,2{,}825) = \frac{1{,}454 e^{j158^\circ 20'}}{1{,}710 e^{j165^\circ 7'}} = 0{,}850 e^{-j6^\circ 47'}.$$

Так как угол B лежит во второй четверти, то в соответствии с указанным имеет место неравенство

$$\varphi_s = 158^\circ 20' < B = 162^\circ < \varphi_c = 165^\circ 7'.$$

Приложение 3

Основные понятия о матрицах

Матрица — это прямоугольная таблица, которая характеризует взаимное расположение коэффициентов в определенной системе линейных уравнений. Обычно каждый элемент матрицы имеет два индекса: первый соответствует номеру строки, второй — номеру столбца. Матрица записывается в виде определителя, но в отличие от него обрамляется по бокам прямоугольными скобками (существуют и другие формы записи матриц). Далее записана матрица, имеющая m строк и n столбцов:

$$[a] = \begin{bmatrix} a_{11}a_{12} \ldots a_{1n} \\ a_{21}a_{22} \ldots a_{2n} \\ \ldots\ldots \\ a_{m1}a_{m2} \ldots a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Матрицу нельзя отождествлять с определителем системы уравнений, который представляет собой определенное число, если раскрыть определитель по известным правилам.

Порядок матрицы, имеющей m строк и n столбцов, определяется произведением: $m \times n$.

Классификация матриц. *Квадратной* матрицей называется такая матрица, у которой число строк равно числу столбцов ($m = n$). У такой матрицы линия, соединяющая элементы a_{11} и a_{mn}, называется главной диагональю матрицы. Симметричная матрица — квадратная матрица, у которой все элементы $a_{ik} = a_{ki}$.

Диагональной называется матрица, все элементы которой, кроме расположенных на главной диагонали, равны нулю. Единичная матрица — диагональная, все элементы главной диагонали равны единице. Матрица — строка — таблица, у которой имеется лишь одна строка ($m = 1$); матрица — столбец — таблица, имеющая лишь один столбец ($n = 1$).

Неопределенной называют матрицу, у которой сумма элементов любой строки и любого столбца равна нулю.

Свойства матриц. 1. Равенство матриц имеет место при равенстве всех соответствующих элементов. 2. При сложении (вычитании) матриц следует сложить (вычесть) соответствующие элементы этих матриц:

$$[a]+[b]=\begin{bmatrix} a_{11}a_{12} \\ a_{21}a_{22}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix} b_{11}b_{12} \\ b_{21}b_{22}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22}\end{bmatrix}.$$

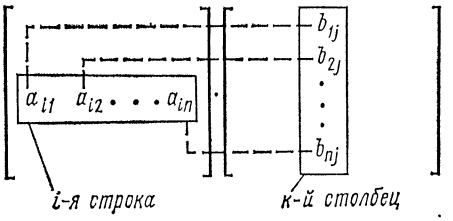


Рис. П3.1

3. Перемножать матрицы можно, если число столбцов первой матрицы равно числу строк второй. Умножение производится по правилу «строка — столбец»: элемент матрицы произведения c_{ij}, находящийся на пересечении i-й строки первой матрицы и j-го столбца второй матрицы, равен сумме произведений элементов i-й строки первой матрицы на соответствующие элементы j-го столбца второй матрицы.

$$(c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+$$
$$+a_{in}b_{nj})\ \text{(рис. П3.1)}.$$

При умножении матриц сохраняет силу сочетательный закон:

$$[a]\cdot[b]\cdot[c]=[d]\cdot[c]=[a]\cdot[e],$$

где

$$[d]=[a]\cdot[b],\quad [e]=[b]\cdot[c].$$

Однако умножение матриц не подчиняется переместительному закону

$$[a]\cdot[b]\neq[b]\cdot[a].$$

Умножение матрицы на число k соответствует умножению каждого ее элемента на это число. Это же соответствует умножению данной матрицы на диагональную матрицу с элементами k.

Обратная матрица. Для квадратной матрицы $[a]$, если ее определитель не равен нулю, можно составить обратную матрицу $[a]^{-1}$. Для этого надо: а) каждый элемент исходной матрицы $[a]$ заменить его алгебраическим дополнением; б) транспонировать полученную матрицу (т. е. строки сделать столбцами); в) разделить транспонированную матрицу на определитель исходной матрицы $[a]$.

Произведение исходной матрицы $[a]$ на транспонированную $[a]^{-1}$ независимо от порядка перемножения равно единице:

$$[a]\cdot[a]^{-1}=[a]^{-1}[a]=1.$$

Пример. Найти матрицу, обратную матрице $[a]=\begin{bmatrix} a_{11}a_{12} \\ a_{21}a_{22}\end{bmatrix}$. Сначала рассчитываем алгебраические дополнения: вычеркивая первую строку и первый столбец, получаем алгебраическое дополнение $Д_{11}=a_{22}(-1)^{1+1}=a_{22}$, вычеркивая первую строку и второй столбец, получаем $Д_{12}=a_{21}(-1)^{1+2}=-a_{21}$, аналогично — вторую строку и первый столбец, получаем $Д_{21}=a_{12}(-1)^{2+1}=-a_{12}$ и, наконец, — вторую строку и второй столбец, будем иметь $Д_{22}=a_{11}(-1)^{2+2}=a_{11}$. Заменив элементы матрицы на алгебраические дополнения, получим транспонированную матрицу $\begin{bmatrix} a_{22} & -a_{21} \\ -a_{12} & a_{11}\end{bmatrix}$.

Следовательно, обратная матрица $[a]^{-1}=\dfrac{\begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11}\end{bmatrix}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}$.

Для решения уравнения $[a] \cdot [b] = [c]$ относительно матрицы $[b]$ надо обе части этого уравнения умножить на $[a]^{-1}$, получим $[a]^{-1}[a] \cdot [b] = [a]^{-1} \cdot [c]$, и учесть, что $[a]^{-1} \cdot [a] = 1$, тогда найдем $[b] = [a]^{-1} \cdot [c]$.

Приложение 4

Расчет первичных параметров воздушных и кабельных линий

А. Воздушные двухпроводные линии (рис. П4.1). Сопротивление проводов двухпроводной линии при постоянном токе на единицу длины

$$R_{20} = \rho \frac{8000}{\pi d^2} = \rho \frac{2550}{d^2} \text{ Ом/км*}, \qquad \text{(П4.1)}$$

где ρ — удельное сопротивление, Ом·мм²/м, при температуре 20°С; d — диаметр проводов, мм.

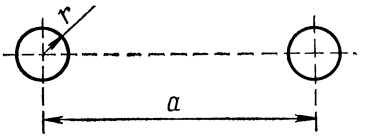


Рис. П4.1

Сопротивление единицы длины линии на постоянном токе при температуре $t°$, отличной от 20°С, вычисляют по формуле

$$R_{t°} = R_{20} [(1 + \alpha_R)(t° - 20°)] \text{ Ом/км}. \qquad \text{(П4.2)}$$

Здесь α_R — температурный коэффициент сопротивления.

Некоторые характеристики металлов, из которых изготовляют провода линий, приведены в табл. П4.1.

Таблица П4.1

Наименование металлов	ρ, Ом · мм²/м	α_R	Удельная масса, г/см³
Медь	0,01785	0,0039	8,9
Алюминий	0,0292	0,0037	2,72
Сталь	0,138	0,0046	7,7

Активное сопротивление единицы длины линии при переменном токе

$$R_0 = R_{t°} [1 + F(x)] \text{ Ом/км}. \qquad \text{(П4.3а)}$$

Здесь $F(x)$ — поправочный коэффициент, учитывающий увеличение активного сопротивления линии вследствие поверхностного эффекта; он является функцией x, определяемой по формуле

$$x = 7{,}09 \sqrt{\frac{f\mu}{10^4 R_{t°}}}, \qquad \text{(П4.4)}$$

где f — частота, Гц; μ — магнитная проницаемость (для медных и алюминиевых проводов $\mu = 1$, для стальных $\mu = 120$).

Коэффициент $F(x)$ определяется по табл. П4.2.

---

* Вывод этой и других формул, приведенных в этом приложении, можно найти в [16].

Таблица П4.2

x	$F(x)$	$G(x)$	$H(x)$	$Q(x)$
0	0	0	0,0417	1
0,5	0,0003	0,001	0,042	0,9998
1,0	0,0052	0,0152	0,053	0,997
1,5	0,0258	0,0691	0,092	0,987
2,0	0,0782	0,1724	0,169	0,961
2,5	0,1756	0,295	0,263	0,913
3,0	0,318	0,405	0,348	0,845
3,5	0,492	0,499	0,416	0,766
4,0	0,678	0,584	0,466	0,686
4,5	0,862	0,669	0,503	0,616
5,0	1,042	0,755	0,530	0,556
6,0	1,394	0,932	0,575	0,465
7,0	1,743	1,109	0,608	0,400
8,0	2,094	1,287	0,634	0,351
9,0	2,446	1,464	0,655	0,313
10,0	2,799	1,641	0,750	0,282
Более 10	$\frac{x\sqrt{2}-3}{4}$	$\frac{x\sqrt{2}-1}{8}$	0,750	$\frac{2\sqrt{2}}{x}$

Активное сопротивление единицы длины медной двухпроводной линии диаметром d при радиочастотах может быть вычислено по формуле

$$R_0 = \frac{16{,}65 \cdot 10^{-2}}{d\ (\text{мм})} \sqrt{f\ (\text{Гц})}\ \text{Ом/км}. \qquad (\text{П4.3б})$$

Индуктивность двухпроводной воздушной линии на единицу длины при переменном токе определяется по формуле

$$L_0 = \left[4 \ln \frac{a}{r} + Q(x)\,\mu\right] \cdot 10^{-4}\ \text{Гн/км}. \qquad (\text{П4.5а})$$

Здесь a — расстояние между осями проводов; r — радиус проводов, коэффициент $Q(x)$, учитывающий внутреннюю индуктивность линии, определяется по табл. П4.2 в зависимости от x.

При радиочастотах индуктивность $L_0 = 4 \cdot 10^{-4} \ln \frac{a}{r}$ Гн/км. (П4.5б)

Емкость двухпроводной воздушной линии на единицу длины

$$C_0 = 1{,}05 \frac{1}{36 \ln \frac{a}{r}} 10^{-6}\ \text{Ф/км}. \qquad (\text{П4.6})$$

Коэффициент 1,05 учитывает влияние изоляторов и соседних проводов на емкость линии. При радиочастотах вместо коэффициента 1,05 берут 1.

Проводимость изоляции единицы длины двухпроводной линии

$$G_0 = G' + nf, \qquad (\text{П4.7})$$

где G' — проводимость изоляции при постоянном токе, равная $0{,}01 \cdot 10^{-6}$ См/км при сухой погоде и $0{,}5 \cdot 10^{-6}$ См/км при сырой погоде; n — коэффициент диэлектрических потерь в изоляторах, равный при сухой погоде $0{,}05 \cdot 10^{-9}$, а при сырой $-0{,}25 \cdot 10^{-9}$; f — частота, Гц.

Б. Кабельные линии. Сопротивление единицы длины линии при постоянном токе и температуре $+20°C$ может быть вычислено по формуле (П4.1), а при температуре, отличной от 20°С, — по формуле (П4.2).

Активное сопротивление при переменном токе токопроводящих жил двухпроводной цепи с учетом дополнительных сопротивлений, обусловленных поверхностным эффектом и эффектом близости, определяется по формуле

$$R' = R_{t^\circ}\left[1 + F(x) + \frac{pG(x)\left(\frac{d}{a}\right)^2}{1 - H(x)\left(\frac{d}{a}\right)^2}\right] \text{ Ом/км}, \qquad (\text{П4.8})$$

где a — расстояние между осями проводников; d — диаметр жилы проводника; p — коэффициент, учитывающий тип скрутки жил кабеля; $F(x)$, $G(x)$ и $H(x)$ — коэффициенты, зависящие от x, которые вычисляются по формуле (П4.4), они определяются по табл. П4.2.

В диапазоне высоких частот (свыше 30 кГц) еще учитывают дополнительное сопротивление кабельной линии, обусловливаемое потерями на вихревые токи в соседних проводниках и свинцовой оболочке, по формуле

$$\Delta R' = 8\sqrt{\frac{f\ (\text{Гц})}{200\,000}} \text{ Ом/км}. \qquad (\text{П.9})$$

Таким образом, активное сопротивление единицы длины кабеля

$$R_0 = R' + \Delta R'. \qquad (\text{П4.10})$$

Индуктивность единицы длины цепи кабеля вычисляется (приближенно) по формуле (П4. 5).

Емкость единицы длины кабеля определяют по формуле

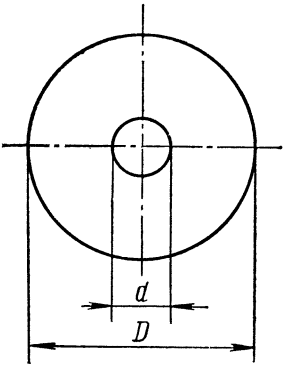


Рис. П4.2

$$C_0 = \frac{\varepsilon}{36 \ln 0{,}6 \frac{a}{r}} 10^{-6} \text{ Ф/км}. \qquad (\text{П4.11})$$

Здесь ε — эквивалентная диэлектрическая проницаемость изоляции; 0,6 — среднее значение коэффициента, учитывающего скрутку жил кабеля.

Проводимость изоляции определяется по формуле

$$G_0 = \omega C_0 \operatorname{tg}\delta \text{ См/км}. \qquad (\text{П4.12})$$

Здесь δ — угол диэлектрических потерь.

В. Коаксиальные кабели. Первичные параметры коаксиальной пары (рис. П4.2) из медных проводников вычисляются по формулам: активное сопротивление (при $f > 60$ кГц)

$$R_0 = 8{,}35\sqrt{f\ (\text{Гц})}\left(\frac{1}{d\ (\text{мм})} + \frac{1}{D\ (\text{мм})}\right) 10^{-2} \text{ Ом/км}; \qquad (\text{П4.13})$$

индуктивность

$$L_0 = 2 \ln \frac{D}{d} 10^{-4} \text{ Гн/км}; \qquad (\text{П4.14})$$

емкость

$$C_0 = \frac{\varepsilon}{18 \ln \frac{D}{d}} 10^{-6} \text{ Ф/км}, \qquad (\text{П4.15})$$

где ε — эквивалентная диэлектрическая проницаемость изоляции; G_0 — проводимость, определяемая по формуле (П4.12).

В формулах (П4.13 — П4.15) d — диаметр внутреннего проводника, мм; D — внутренний диаметр внешнего проводника, мм; f — частота, Гц.

ЛИТЕРАТУРА

Учебники

1. Атабеков Г. И. Теоретические основы электротехники. Линейные электрические цепи. М., 1978, ч. 1.
2. Атабеков Г. И. Основы теории цепей. М., 1969.
3. Бессонов Л. А. Теоретические основы электротехники. М., 1978.
4. Зевеке Г. В., Ионкин П. А., Нетушил А. В. и др. Основы теории цепей. М., 1975.

Учебные пособия

5. Нейман Л. Р., Демирчян К. С. Теоретические основы электротехники, Л., 1976, т. I, II.
6. Гоноровский И. С. Радиотехнические цепи и сигналы. М., 1964.
7. Зернов П. В., Карпов В. Г. Теория радиотехнических цепей. М., 1972.
8. Каплянский А. Е., Лысенко А. П., Полотовский Л. С. Теоретические основы электротехники. М., 1972.
9. Лосев А. К. Линейные радиотехнические цепи. М., 1971.
10. Теория линейных электрических цепей /Афанасьев Б. В., Гольдин О. Е., Кляцкин И. Г. и др. М., 1973.
11. Поливанов К. М. Линейные электрические цепи с сосредоточенными параметрами. М., 1972.
12. Жуховицкий Б. Я., Негневицкий И. Б. Теоретические основы электротехники. М., 1972, т. II.
13. Харкевич А. А. Основы радиотехники. М., 1962.
14. Бессонов Л. А. Линейные электрические цепи. М., 1974.
15. Белецкий А. Ф. Основы теории линейных электрических цепей. М., 1967.
16. Гроднев И. И., Курбатов Н. Д. Линейные сооружения связи. М., 1963.
17. Круг К. А. Переходные и установившиеся процессы в линейных электрических цепях. М., 1948.
18. Максимович Н. Г. Линейные электрические цепи и их преобразования. М., 1961.
19. Матханов П. Н. Линейные цепи. Основы анализа электрических цепей. М., 1972.
20. Матханов П. Н. Основы синтеза линейных электрических цепей. М., 1976.
21. Реза Ф., Сили С. Современный анализ электрических цепей. М., 1964.
22. Сешу С., Балабанян Н. Анализ линейных цепей. М., 1963.
23. Толстов Ю. Г. Теория линейных электрических цепей. М., 1978.
24. Аносович Б. Ф. Конспект лекций по теории линейных электрических цепей. Двухполюсники, четырехполюсники, цепи с распределенными параметрами, корректирующие цепи. М., 1977.
25. Шебес М Р., Исхаков К. Ф., Циклина Е. А. Лекции по теории линейных электрических цепей. М., 1969, вып. 3 и 4.
26. Сильвинская К. А., Голышко З. И. Расчет фазовых и амплитудных корректоров. М., 1969.
27. Татур Т. А Основы теории электрических цепей. М., 1980.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие (3)

Глава первая. **Методы расчета линейных электрических цепей (на примерах цепей с постоянными токами и напряжениями)** (4).

Основные положения и соотношения (4) Упражнения и задачи (14) А Расчет эквивалентных сопротивлений (14). Б. Законы Ома и Кирхгофа. Баланс мощностей (15). В. Методы контурных токов и узловых потенциалов (24). Г. Метод наложения. Преобразование треугольника в звезду и обратно (30). Д Метод эквивалентного источника. Преобразование источников. Принцип взаимности (32). Е. Условие выделения максимальной мощности в нагрузке (41). Ж Входные и взаимные проводимости ветвей (43).

Глава вторая. **Электрические цепи синусоидального тока** (44).

Основные положения и соотношения (44). Упражнения и задачи (55). А. Мгновенные значения синусоидального тока, напряжения, мощности. Последовательное и параллельное соединение элементов. Б. Различные формы записи комплексных величин. Активная и реактивная составляющие напряжения и тока. Соединение сопротивлений. Мощности. Векторные диаграммы (65). В. Применение различных методов к расчету цепей синусоидального тока (78). Г. Условия выделения максимальной мощности в нагрузке (82). Д. Частотные характеристики. Единицы измерения частотного интервала (84). Е. Трехфазные цепи (87). Ж. Электронные цепи в линейном режиме (93).

Глава третья. **Одиночные колебательные контуры** (96).

Основные положения и соотношения (96). Упражнения и задачи (102). А Резонанс напряжений (102). Б. Резонанс токов (109). В. Резонансы напряжений и токов в сложных контурах (115).

Глава четвертая **Связанные электрические цепи** (121).

Основные положения и соотношения (121). Упражнения и задачи (130). А. Расчет связанных электрических цепей (130). Б. Резонансы в связанных контурах (142). В. Трансформатор со стальным сердечником (149).

Глава пятая **Цепи при периодических несинусоидальных воздействиях** (155).

Основные положения и соотношения (155). Упражнения и задачи (160). А. Аналитический метод разложения периодических кривых в ряд Фурье (160). Б. Расчет цепей при несинусоидальных периодических воздействиях (164). В. Коэффициенты, характеризующие форму периодической несинусоидальной кривой (170).

Глава шестая. **Классический метод расчета переходных процессов в электрических цепях с сосредоточенными параметрами** (172).

Основные положения и соотношения (172). Упражнения и задачи (176). А. Расчет цепей, содержащих *RL*- или *RC*-элементы (176). Б. Расчет цепей, содержащих элементы *R*, *L*, *C* (187). В. Переходные процессы при импульсных воздействиях (195). Г. Решение задач с «некорректно» поставленными начальными условиями (198).

Глава седьмая. **Операторный метод расчета переходных процессов в электрических цепях с сосредоточенными параметрами** (202).

Основные положения и соотношения (202) Упражнения и задачи (207). А. Расчет переходных процессов. Операторные схемы замещения Использование таблицы 7.1 и теоремы разложения (207). Б. Расчет переходных процессов в цепях с взаимной индуктивностью (222).

Глава восьмая. **Расчет линейных электрических цепей с сосредоточенными параметрами методом интеграла Дюамеля и спектральным методом** (225).

Основные положения и соотношения (225). Упражнения и задачи (230). А. Переходные характеристики Расчет переходных процессов с помощью интеграла Дюамеля (230). Б. Импульсные характеристики. Расчет переходных процессов при импульсных воздействиях (237). В Дифференцирующие и интегрирующие цепи (239). Г. Спектры непериодических сигналов (интеграл Фурье). Частотные характеристики цепей. Прохождение непериодических сигналов через линейные цепи (240).

Глава девятая. **Электрические цепи с распределенными параметрами (длинные линии)** (248).

Основные положения и соотношения (248). Упражнения и задачи (253). А. Первичные и вторичные параметры линий Фазовая скорость. Длина волны (253). Б. Согласованная и несогласованная нагрузки линии. Напряжение, ток, мощность в начале и конце линии. Входное сопротивление. Прямые и обратные волны. (259). В Неискажающая линия. Схемы замещения линии (264). Г. Рабочее затухание линии, определение параметров линии по опытам холостого хода и короткого замыкания (265). Д. Расчет уровней передачи (268). Е. Линия без потерь. Стоячие волны (269). Ж Методы согласования линии с нагрузкой (278). З. Схемы, эквивалентные отрезкам линии (282).

Глава десятая. **Двухполюсники** (285).

Основные положения и соотношения (285). Упражнения и задачи (289). А. Эквивалентные и обратные двухполюсники (289). Б. Реактивные двухполюсники (293). В. Частотные характеристики двухполюсников (301).

Глава одиннадцатая. **Четырехполюсники** (303).

Основные положения и соотношения (303). Упражнения и задачи (321). А. Параметры четырехполюсника. Т- и П-схемы замещения четырехполюсника (321). Б. Входное сопротивление

четырехполюсника (323). **В. Схемы соединения четырехполюсников (324).** Г. Характеристические параметры, их связь с другими параметрами четырехполюсника. Повторные параметры (327). Д. Эквивалентность четырехполюсников (329). Е. Коэффициенты отражения, эхо. Вносимое и рабочее ослабление. Коэффициенты передачи напряжения, тока (330). Ж. Удлинители (333). З. Трансформаторы для согласования сопротивлений четырехполюсника и нагрузки (334). И. Полюсно-нулевое изображение передаточных и входной функций. Минимально- и неминимально-фазовые четырехполюсники (335). К. Активные неавтономные четырехполюсники (339). Л. Устойчивость (346).

Глава двенадцатая. **Электрические фильтры** (348).

Основные положения и соотношения (348) Упражнения и задачи (357). А. Задачи на применение общей теории реактивных Т -и П-образных фильтров (357). Б Фильтры типа *k* (360). В. Фильтры типа *m*. Совместная работа фильтров типа *k* и *m* (369). Г. Мостовые фильтры (377). Д. Задачи на различные темы, не рассмотренные в предыдущих пунктах (382).

Глава тринадцатая. **Корректирующие цепи** (386).

Основные положения и соотношения (386) Упражнения и задачи (391). А. Корректоры амплитудно-частотных искажений (391) Б Корректоры фазочастотных искажений (403).

Глава четырнадцатая. **Основы синтеза двухполюсников** (411).

Основные положения и соотношения (411). Упражнения и задачи (421). А. Положительные вещественные функции (421). Б. Синтез реактивных двухполюсников (422). В. Синтез двухполюсников, состоящих из *RC*- или *RL*-элементов (426). Г. Синтез двухполюсников общего вида. Полином Гурвица (431).

Глава пятнадцатая. **Основы синтеза четырехполюсников** (440).

Основные положения и соотношения (440) Упражнения и задачи (442).

Глава шестнадцатая. **Синтез фильтров и линий задержки с помощью таблиц** (447).

Основные положения и соотношения (447) Упражнения и задачи (452).
Ответы (457). Приложения (478). Литература (487).

Михаил Романович Шебес

ЗАДАЧНИК ПО ТЕОРИИ ЛИНЕЙНЫХ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ

Зав. редакцией Л. А. Романова. Редактор Е. А. Орехова. Художественный редактор Т. М. Скворцова. Технический редактор Э. М. Чижевский. Корректор Р. К. Косинова

ИБ № 2978

Изд № Эр-307. Сдано в набор 13 07 81. Подп в печать 16.02 82. Формат 60×90/16. Бум. тип. № 3. Гарнитура литературная Печать высокая. Объем 30,5 усл. печ. л. Усл. кр.-отт. 30,5 28,81 уч.-изд л Тираж 65 000 экз Зак. № 481. Цена 1 р. 10 к.

Издательство «Высшая школа», Москва, К-51, Неглинная ул., д. 29/14

Ярославский полиграфкомбинат Союзполиграфпрома при Государственном комитете СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли. 150014. Ярославль, ул. Свободы, 97

1 р. 10 к.